复变函数 · 历年真题集

说明

1. 这里收录了若干套中国科学技术大学复变函数 (A/B)、复分析考试题.

2. 按照复变函数 (A)、复变函数 (B)、复分析进行排序，其次为时间先后.

3. 本附录的主要作用是供同学们考试之前模拟使用，越靠近现在的考卷越能接近现在的出题风格.

4. 没有参考答案，希望读者自行思考，同时熟悉题目类型. 建议助教在考前习题课讲解对应的考试题.

5. 正值科大 60 周年校庆，亦为少年班成立 40 周年之际，谨以此真题集锦，献礼科大，也便于以后的助教的习题课工作和同学们复习本门课程.

6. 感谢杨光灿烂同学提供往年题目！感谢王昌煜助教录入题目！再次祝愿科大数学教育越办越好！

2018-2019 秋季学期复变函数 (A) 助教

15 级少年班学院 理科试验 1 班 吴天

2018 年 12 月于合肥

欢迎拜访我的主页：http://home.ustc.edu.cn/~wt1997

再版说明

1. 本版增添了 2019、2020 年的复变函数试题，供同学们参考.

2. 感谢吴天助教曾经在复变函数课程中给予我的帮助！希望能有更多的同学未来也能担任助教，帮助更多学弟学妹（划掉)!

3. 感谢 17 级李明哲助教和 18 级刘炜昊助教提供和录入题目！

4. （话说有一点参考答案了来着）

2020-2021 秋季学期复变函数 (A) 助教

17 级少年班学院 少年班 杨光灿烂

2020 年 10 月于合肥

更新说明

1. 本版增添了 2021、2022、2023 年的复变函数 A 试题，供同学们参考.
2. 进行了重新的排版，修正部分数学格式，使得本版更加适合打印或在电子设备上书写.
3. 新增目录，方便检索和电子版跳转.
4. 更正了一些错误.

21 级 少年班学院 施耀炜

2023 年 12 月 于合肥

试卷投稿、纠错、意见反馈欢迎联系我: ywshi.mail@qq.com

最后修改日期: 2023 年 12 月 25 日

目录

2005-2006 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (20 分 =5 分 +5 分 +10 分) 计算.

   (1) 设 $f(z)=\oint_{|t|=3}\dfrac{2t^2+5t+1}{t-z}\,\mathrm{d}t$, 计算 $f'(2+\mathrm{i})$.

   (2) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^5+1}$.

   (3) $\oint_{\gamma}\dfrac{e^{\pi+z}}{z(1-z)^2}\,\mathrm{d}z$, 其中 γ 为不经过 0, 1 的简单闭曲线.

2. (8 分) 已知 $A>1$, 试求 Laurent 级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}A^{-n}(z-1)^n$ 的收敛区域.

3. 求 $\dfrac{1}{1+z}$ 在 $z_0=\mathrm{i}$ 处的 Taylor 展开式及其收敛半径.

4. (8 分) 试将 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)}$ 在 $4<|z-3|<+\infty$ 展成 Laurent 级数.

5. (8 分) 试求方程 $4z^4+2z+9=0$ 在圆环 $1<|z|<\dfrac{3}{2}$ 内根的个数. (附: 如果把 $2z$ 改成 2^z 呢?)

6. (20 分 =10 分 ×2) 用留数定理计算实积分.

   (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\sin ax\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

   (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}\ (a>1)$.

7. (10 分) 用拉氏变换解微分积分方程 $\begin{cases} y'(t)-e^t=\displaystyle\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\mathrm{d}\tau, \\ y(0)=0. \end{cases}$

8. (10 分) 求一保形变换 $w=f(z)$ 将圆盘区域 $|z|<1$ 映为角形域 $\dfrac{\pi}{3}<\arg w<\dfrac{2}{3}\pi$

9. (6 分) 若函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析, 且 $u+v=2x^2-4xy+x-y-2y^2$. 试求 $f(z)$.

10. (7 分) 设 $f(z)$ 是一个整函数, 并且假定存在着一个正整数 n, 以及两个正数 R 及 M, 使得当 $|z|\geqslant R$ 时, $|f(z)|\leqslant M|z|^n$, 试证: $f(z)$ 是个至多 n 次多项式或一常数.

2006-2007 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (10 分) 求 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{1}{z^2}$ 在 $z=-1$ 处的 Taylor 展式, 并指出收敛半径.

2. (10 分) 设在 $0<r_1<|z-\mathrm{i}|<r_2<1$ 内有:

$$f(z)=\oint_{|\zeta-\mathrm{i}|=r_2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-\mathrm{i})(\zeta^2-\zeta z)}-\oint_{|\zeta-\mathrm{i}|=r_1}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-\mathrm{i})(\zeta^2-\zeta z)}$$

求 $f(z)$ 在 $r_1<|z-\mathrm{i}|<r_2$ 内的解析表达式及其 Laurent 展开式.

3. (10 分) 计算 $I=\oint_{|z|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-1|^2}$

4. (10 分) 试求方程 $z^6-3z^4+z^3-az=0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内按重数计算的根个数, 其中 $0<|a|<1$.

5. (20 分 =10 分 ×2) 用留数定理计算实积分 (任选两题).

   (1) $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$

   (2) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$ $(0<b<a)$

   (3) $\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)d\theta$ (a 是实数且 $a\neq 0$)

6. (10 分) 用拉氏变换解积分方程 $y(t)-e^t=\int_0^t y(\tau)(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau$.

7. (10 分)

   (1) 问 $w=\frac{z+1}{z-1}$ 将有割痕 $(-\infty,-1]$ 的单位圆外域映成了什么?

   (2) 求保形变换 $w=f(z)$ 将有割痕 $(0,1]$ 的右半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 映为带形域 $-\pi<\mathrm{Im}(w)<\pi$, $\mathrm{Re}(z)>0$.

8. (10 分) 设解析函数 $f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$, 其中 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$. 试证明: $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$.

9. (5 分) 假设 $f(z)=\sqrt[3]{(z-1)^2(z+1)}$ 在 $(-1,1)$ 的上边沿为正, 试求 $f(\mathrm{i})$ 和 $f(-\mathrm{i})$.

10. (5 分) 设 $f(z)$ 在扩充平面上除去非本性奇点 $z=z_0$ 外是单叶解析的, 则 $f(z)$ 必是分式线性变换.

2007-2008 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (25 分 =5 分 ×5) 简答题.

   (1) 试在复平面上画出满足 $|z| < 1 - \mathrm{Re} z$ 的点集的图形.

   (2) 设 $f(z) = xy^2 + \mathrm{i}x^2y$, 问: 复变函数 $f(z)$ 在何处满足柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程.

   (3) 求下列值: (a) Ln i；(b) i^{i}.

   (4) 求下列函数 $f(z)$ 的奇点 (不包含 ∞) 且指出其类型. 如果是极点, 给出它的阶数:

   (a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z - \pi}$

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(\mathrm{e}^{z^3} - 1)}$

   (2) 求下列值: (a) Ln i；(b) i^{i}.

   (5) 设 D 是一个以正三角形为边界的有界区域, 而 G 为一个以椭圆为边界的有界区域, 问: 是否存在单叶解析函数 $w = f(z)$ 将 D 映满 G.（回答“存在”或“不存在”, 并且简要地给出理由. ）

2. (10 分) 求一个解析函数 $f(z)$, 使其实部为 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$, 且满足 $f(\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$.

3. (10 分) 设 $0 < a < b$, 求函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在域 $D: a < |z| < b$ 内的罗朗 (Laurent) 展开.

4. (25 分 =5 分 ×5) 计算题.

   (1) $\displaystyle\int_{|z+3\mathrm{i}|=1} \frac{\cos z}{z + \mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$

   (2) $\displaystyle\int_{|z+\mathrm{i}|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{1 + z^2}\,\mathrm{d}z$

   (3) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{3}} \sin\frac{1004}{z}\,\mathrm{d}z$

   (4) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z^{2007}}{z^{2008} - 1}\,\mathrm{d}z$

   (5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2 + a^2)^2}\,\mathrm{d}x,\ \ (m > 0, a > 0)$

5. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程: $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = \mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 0\ y'(0) = 1. \end{cases}$

6. (7 分) 求一保形变换 $w = f(z)$, 将半带域 $D: -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\, z < \dfrac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\, z > 0$ 映射为上半平面 $\mathrm{Im}\, w > 0$.

7. (7 分) 求方程 $kz^4 = \sin z$ $(k > 2)$ 在圆 $|z| < 1$ 内根的个数.

8. (6 分) 设 $f(z)$ 是在有界域 D 上解析的非常值函数, 并且在有界闭域 $D + C$ 上连续, 其中 C 为 D 的边界. 如果存在实数 a 使得 $|f(z)| = a$, $\forall z \in C$, 证明: 在 D 内至少存在一个点 z_0 使得 $f(z_0) = 0$.

2008-2009 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (24 分 =4 分 +8 分 +6 分 +6 分) 填空题.

 (1) 若幂函数 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=1$ 的分支, 则 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{z^2}{1-\sqrt{z}},1\right]=$ ____________.

 (2) 设 $\sqrt[3]{z(1-z)^2}$ 在去掉线段 [0,1] 的区域内的某一单值分支为 $f(z)$. 若 f 在 $\dfrac{1}{2}$ 的上边沿的值是 $\dfrac{1}{2}$, 则 $f(2)=$ ____________, $f'(2)=$ ____________.

 (3) 设 $f(z)=\displaystyle\oint_{|t|=3}\frac{t^2+t+1}{t-z}\,\mathrm{d}t$, 则 $f'(2+\mathrm{i})=$ ____________.

 (4) $\displaystyle\oint_{|z|=1.5}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z-2)^2}=$ ____________.

2. (8 分) 设 u 和 v 是解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部, 且 $u+v=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2+3xy$, 其中 $z=x+y\mathrm{i}$, $f(0)=0$. 试求 $f(z)$.

3. (8 分) 试将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ 展开成 Laurent 级数, 其中 $|a|<|b|$, a,b 都是复数. 圆环域为

 (1) $0<|a|<|z|<|b|$;

 (2) $|z|>|b|$.

4. (8 分) 设 $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-3)^2z^2(z+1)^3}$, 试指出它的不解析点的类型.

5. (8 分) 试求方程 $2z^6-3z^3+2=0$ 在各个象限内根的个数.

6. (20 分 =10 分 ×2) 计算积分.

 (1) $\displaystyle\oint_{0<|z|=r\neq 1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z-1}$.

 (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0,b>0)$.

7. (8 分) 用拉普拉斯变换解方程.

$$\begin{cases} y'(t)-e^t=\displaystyle\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau,\\ y(0)=0.\end{cases}$$

8. (8 分) 求一分式线性变换 $w=f(z)$ 将圆盘区域 $|z-2\mathrm{i}|<2$ 映为圆盘区域 $|w-2|<1$, 且满足条件 $f(\mathrm{i})=2$, $\arg f'(\mathrm{i})=0$.

9. (8 分) 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是不可约有理真分式函数, $a_k(k=1,\cdots,m)$ 是 $Q(z)$ 的全部零点, 且其阶数为 n_k. 试证明 $f(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}$, 其中 A_{ks} 为复常数.

2019-2020 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (39 分) 填空题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) 设 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, 那么 $z^{2019}+z^{2020}=$ ________________.

(2) $1^{\sqrt{3}}=$ ________________.

(3) 若函数 $f(z)=x^2+2xy-y^2+\mathrm{i}(y^2+axy-x^2)$ 是复平面上的解析函数, 那么实常数 $a=$ ________________.

(4) 设 $f(z)=\dfrac{\sin(z-5)}{z^3(z-5)^2}+e^{\frac{1}{z-\mathrm{i}}}$, 给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 ∞），并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）：____.

(5) $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1-\cos z}{z^5},0\right)=$ ________________ ; $Res\left(z^2e^{\frac{1}{z-\mathrm{i}}},\mathrm{i}\right)=$ ________________.

(6) 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析, 并且 $f(0)=1, f'(0)=2$, 那么 $\int_{|z|=1}(z+1)^2\dfrac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z=$ ________________.

(7) 设函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z}$ 在 0 处的泰勒（Taylor）展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径 $R=$ ________________.

(8) 设函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{1-z}$, 那么 $f(z)$ 在区域 $0<|z-1|<+\infty$ 内的罗朗（Laurent）展开式为 ________________.

(9) 设 $z_0\in\mathbb{C}$, 函数 $|e^z|$ 在闭圆盘 $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le 1\}$ 上的最大值为________________.

(10) 设 $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, 那么在右半平面 $\{z\in\mathbb{C}:Re(z)>0\}$ 解析并以 $u(x,y)$ 为它的实部的函数为 $f(z)=$ ________________.

(11) 对函数 $f(t)$, 记 $F(p)=L[f(t)]$ 为它的 Laplace 变换, 并且记 $f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

(a) 设 $f(t)$ 满足 $\begin{cases} f''(t)-2f'(t)+f(t)=t-\sin t \\ f(0)=f'(0)=0 \end{cases}$, 那么 $F(p)=$ ________________.

(b) $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2-p)(p-2)}\right]=$ ________________.

2. (30 分) 计算题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2z^n$的和函数, 并且计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$.

(2) 计算积分 $\int_{|z|=3}\dfrac{z+\bar{z}}{|z|}\,\mathrm{d}z$.

(3) 计算积分 $\int_C\dfrac{z\cos^2\frac{1}{z}}{1-z}\,\mathrm{d}z$,其中$C:|z-\frac{1}{2}|+|z+\frac{1}{2}|=3$.

(4) 计算积分 $\int_0^{2\pi}\left|\dfrac{1}{(2-e^{i\theta})^4}\right|\,\mathrm{d}\theta$.

(5) 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin(x-1)}{(x^2+4)(x-1)}\,\mathrm{d}x$.

3. (31 分) 综合题

(1) (5 分) 设 $f(z)$ 为定义在上半平面内的解析函数, 则 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 为定义在下半平面上的复变函数, 请问: $g(z)$ 在下半平面上是否为解析函数? 给出你的答案, 如果“是”, 给出证明; “否”, 举个反例.

(2) (5 分) 设 $f(z)$ 为在区域 D 内解析的非常数值复变函数, C 为 D 内的一条简单闭曲线, 它的内部包含在 D 内. 证明: 对于任何复数 A, $f(z)=A$ 在 C 的内部只有有限个解.

(3) (6 分) 设 $f(z)=\dfrac{z\,(\sin z-z)}{(z^3+1)(z+1)^3}$, 设 $C:|z|=R>0$ 为圆周, 方向取正向, 其中 $R\neq 1$, 试计算 $\Delta_C argf(z)$.

(4) (8 分) 求保形变换 $\omega=f(z)$, 将区域 $D=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|>1,|z-\sqrt{3}i|<2\right\}$ 映为区域 $\Omega=\{\omega\in\mathbb{C}:|\omega|<1\}$, 并且满足条件 $f(\sqrt{3}i)=0, f'(\sqrt{3}\mathrm{i})>0$. (请画出必要的示意图)

(5) (7 分) 设 $P_n(z)=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}$, A_n 表示 $P_n(z)$ 的 n 个零点模的最小值, 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=+\infty.$$

2020-2021 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (30 分) 填空题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) 设方程为 $e^x=\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$，那么方程的全部根为：________________.

(2) 若函数 $f(z)=x^3-3xy^2+\mathrm{i}\,(ax^2y-y^3-1)$ 是复平面上的解析函数,那么实常数 $a=$ ________________.

(3) 设函数 $f(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 是平面上的诗和函数，其中 a,b,c,d 为是实数常数. 那么实常数 a,b,c,d 应满足下面条件：________________.

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi+2t}\left(e^{-z}-\cos\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}z=$ ________________.

(5) 设 $f(z)=\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z-1}}}{(e^{2z}-1)\sin z}$，给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 ∞），并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）：________________.

(6) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(z-1)^{2021}}\right),1\right)=$ ________________,
$\operatorname{Res}\left(z^2\sin\dfrac{1}{z-\mathrm{i}},\mathrm{i}\right)=$ ________________.

(7) 对函数 $f(t)$，记 $F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$ 为它的 Laplace 变换，并且记 $f(t)=\mathrm{L}^{-1}[F(p)]$：

i. 设 $f(t)$ 满足 $\begin{cases} f''(t)-f(t)=4\sin t+5\cos 2t \\ f(0)=-1, f'(0)=-2 \end{cases}$，那么 $F(p)=$ ________________;

ii. $\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{3p+7}{p^2+2p+2}\right]=$ ________________

(8) 方程 $z^5+13z^2+15=0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 和圆环 $2<|z|<3$ 内根的个数分别为 ________________ 和 ________________.

2. (40 分) 计算题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) 求函数 $f(z)=\dfrac{z}{e^z+1}$ 在 $z=0$ 处泰勒（Taylor）展开前 5 项（即展开到 z^4 为止），并且给出所得幂级数的收敛半径.

(2) 将函数 $f(z)=z^2\sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<+\infty\}$ 内展成罗朗（Laurent）级数.

(3) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin(z-1)}{(z^2-z)\sin z}\,\mathrm{d}z.$

(4) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z(1-\cos 2z)\sin 3z}{(1-e^{3z})^5}\,\mathrm{d}z.$

(5) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2},\quad (0<b<a).$

(6) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x.$

3. (30 分) 综合题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) (7 分) 设函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析, 在有界用域 $C+D$ 上连续, 这里 C 为 D 的边界. 证明: 如果函数 $f(z)$ 没有零点, 并且对于 $z\in C$ 有 $|f(z)|=M(M>0$ 为常数 $)$, 那么存在实数 α 使得 $f(z)=Me^{\mathrm{i}\alpha}$.

(2) (7 分) 计算积分 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{z+a}{z-a}\frac{\mathrm{d}z}{z}, (|a|<R)$, 并且由此证明:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{|Re^{\mathrm{i}\theta}-a|^2}\,\mathrm{d}\theta=1.$$

(3) (7 分) 函数 $w=f(z)=\dfrac{3z-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}z-1}$ 把下半平面 $\operatorname{Im} z<0$ 变成复平面中的什么区域? (给出你的答案和论证过程)

(4) (9 分) 设 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$0<r<1$. 证明:

i. $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=0,\quad (n\geq 1)$.

ii. 设 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则 $a_n=\dfrac{1}{\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{u(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z, (n\geq 1)$.

iii. $\overline{f(0)}=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$，其中 $|z_0|<r$.

2021-2022 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (30 分) 填空题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

   (1) $\mathrm{Ln}\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}=$________________

   (2) 曲线 $|z-1|=1$ 在函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 下的像为（写出表达式）________________

   (3) 若函数 $f(z)=my^3+nx^2y+\mathrm{i}\left(x^3+lxy^2\right)$ 是复平面上的解析函数，那么实数常数 m,n,l 值分别为____________

   (4) 如果函数 $f:D\to G$ 是区域 D 到区域 $G=\{w\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,w>0\}$ 的解析函数，那么函数 $\arg f(z)$ ____（填写“是”或“否”）为调和函数.

   (5) 设 $u(x,y)=y^2-x^2+2021y$，那么它的共轭调和函数 $v(x,y)$ 为________________

   (6) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R, 那么级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^n-1\right)a_nz^n$ 的收敛半径为________________

   (7) 设 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{3}{z-2}}}{z\left(1-e^{-z}\right)}$，给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 ∞），并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）：

   ____

   ____

   (8) $\mathrm{Res}\left(z^3\cos\dfrac{1}{z-2},2\right)=$________________

   设 n 为正整数，那么 $\mathrm{Res}\left(z^n\sin\dfrac{1}{z},0\right)=$________________

   (9) 方程 $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$ 在区域 $|z|<1$ 内根的个数为________________

2. (40 分) 计算题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

   (1) 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ 在 $z=0$ 处泰勒（Taylor）展开，并且给出所得幂级数的收敛半径.

   (2) 将函数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)\left(z^2+1\right)}$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$ 内展成罗朗（Laurent）级数.

   (3) 设 $D=\left\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z>-\dfrac{1}{2}\right\}$，设 γ 为区域 D 内从 0 到 1 的不经过 i 任意简单曲线，计算积分 $\displaystyle\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$.

   (4) 计算积分 $\displaystyle\int_C\frac{e^z\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}$，其中 C 为不过点 0 和 1 的简单闭曲线.

   (5) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x$.

   (6) 利用留数计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

3. (30 分) 综合题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) 利用拉氏（Laplace）变换求解微分方程：

$$\begin{cases} y'(t) - 4y(t) + 4\displaystyle\int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{t^3}{3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(2) 设 $f: D \to \mathbb{C}$ 为区域 D 内的解析函数，γ 为 D 内简单闭曲线，其内部包含于 D. 设 a 为 $f(z)$ 在 γ 内部的 n 阶零点，b 为 $f(z)$ 在 γ 内部的 m 阶极点，$f(z)$ 在 γ 内除了 b 外没有其它奇点，在 γ 上没有零点和奇点. 证明：

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \sin z\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(n\sin a - m\sin b).$$

(3) 求一保形变换 $w = f(z)$，将区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1, |z| < 2\}$ 映为单位圆盘 $|w| < 1$，并且满足 $f(-1) = 0$.（请画出必要的示意图）

(4) 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析，且满足 $\left|f\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi;\ \left|f\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| \leq 3,\ \pi \leq \theta \leq 2\pi$. 证明：

$$|f(0)| \leq \sqrt{6}$$

2022-2023 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (30 分) 基础知识

(1) 求下列值：

(a) $\ln(2+2i)$　　(b) $\cos(3+i)$

(2) 已知 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，虚部 $v(x,y)=x^2-y^2+2x, f(0)=22$，求实部 $u(x,y)$.

(3) 求积分：

$$\int_{-1}^{1}\left(1+2iz+ie^{z}\right)\,\mathrm{d}z$$

(4) $f(z)=\sin z+\dfrac{3z}{(1-z)^2}$，把 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 展成 z 的幂级数.

(5) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$，把 $f(z)$ 在区域 $0<|z-2|<1$ 展开为罗朗级数.

(6) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}+z^2\sin\dfrac{1}{z}$，指出 $f(z)$ 的所有奇点 (不包含 ∞)，并指出每个奇点的类型 (极点指出阶数).

2. (36 分) 计算积分（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=5}\frac{e^{5z}}{2z}\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\left(\frac{5}{z-1}+z^2+2z^2\sin\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\cos 2z}{z^3\left(1+e^{z}\right)}\,\mathrm{d}z.$

(4) $\displaystyle\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z\left(e^{7z}-1\right)}.$

(5) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x\sin 3x}{\left(x^2-2x+4\right)^2}\,\mathrm{d}x.$

(6) $\displaystyle\oint_{|z-2|=1}\frac{z+3}{|z|^4}\,\mathrm{d}z.$

3. (34 分) 综合题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) (6 分) 确定方程 $z^{2021}+e^{2022z}=2023$ 在左半平面的根的个数，并说明理由.

(2) (10 分) 求一保形变换 $w=w(z)$，将半圆区域 $D=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0,|z|<2\}$ 变为单位圆内 $|w|<1$, 使得 $w(1)=\frac{1}{3}i$. (请画出必要的示意图)

(3) (10 分) 利用 Laplace 变换求解方程组：

$$\begin{cases}2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=1\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=te^{2t}\\ x(0)=2,y(0)=0\end{cases}$$

(4) (8 分) 当 $|z|\le 1$ 时，函数 $f(z)$ 解析，且 $|f(z)|\le 1$, 又已知 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 3 级零点，求证：在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 满足不等式

$$|f(z)|\le |z|^3$$

2003-2004 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (20 分) 填空.

(1) 设方程 $z^3 = \overline{z}$, 则 $z =$ ____________.

(2) 求复对数的单值解析分支 ____________, 使得 $\ln(-\mathrm{i}) = \dfrac{3\pi}{2}\mathrm{i}$, 其辐角主值是 ____________.

(3) 设复函数 $f(z) = x^4 + \mathrm{i}y^2$, 则 $f(z)$ 的可微点是 ____________. $f(z)$ 的解析点是 ____________.

(4) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1,\mathrm{Im}z\geqslant 0} \overline{z}dz =$ ____________. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{(z+1)^3}dz =$ ____________.

(5) $\mathrm{Res}\Big(z^{-2}\sin^3\dfrac{1}{z}, 0\Big) =$ ____________. $\mathrm{Res}\Big(\dfrac{1-\cos 7z}{z^3}, 0\Big) =$ ____________.

2. (20 分)

(1) 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部为 $x+y$, 且 $f(1) = \mathrm{i}$, 求 $f(z)$.

(2) 判别方程 $z^5 - 6z^3 + 2z^2 + 7 = 0$ 在圆环 $2 < |z| < 3$ 内有多少个根.

3. (20 分)

(1) 已知 $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$, 求 $f(z)$ 在 $|z-1| < 1$ 及 $0 < |z| < 2$ 内的级数展开式.

(2) 设 $f(z)$ 在 $z = a$ 解析, $f(z)$ 在 a 点附近不恒为 0, 而 $f(a) = 0$. 证明 $z = a$ 为 $f(z)$ 在 a 点的某个邻域内的唯一零点.

4. (20 分) 计算积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 + 2\cos^2\theta}$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z(z^2+4)}\,\mathrm{d}z$

5. (20 分) 用拉氏变换解方程.

(1) $\begin{cases} y''(t) - y(t) = 4\sin t \\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = \cos t \\ y'(t) - y(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$

2006-2007 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (16 分 =2 分 ×8) 填空题. (写出复数的标准式 $a+b\mathrm{i}$ 或指数表示 $r\mathrm{e}^{i\theta}$ 均可)

(1) $(1+\mathrm{i})^2 =$ ____________

(2) $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})^2} =$ ____________

(3) $\sin(1+\mathrm{i}) =$ ____________

(4) $\mathrm{ch}(1+\mathrm{i}) =$ ____________

(5) $\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i}) =$ ____________

(6) $(1+\mathrm{i})^{\frac{3}{2}} =$ ____________

(7) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} =$ ____________

(8) $\sinh^{-1}\ \mathrm{i} =$ ____________

2. (25 分 =5 分 ×5) 设 $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)^4}$，试求：

(1) $f(z)$ 在环域 $0<|z|<1$ 内的罗朗级数展开式.

(2) $f(z)$ 在环域 $0<|z-1|<1$ 内的罗朗级数展开式.

(3) $f(z)$ 在环域 $|z|>1$ 内的罗朗级数展开式.

(4) $f(z)$ 在 $z=4$ 处的罗朗级数展开式.

(5) 求 $\mathrm{Res}[f(z),0]$, $\mathrm{Res}[f(z),1]$, $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$.

3. (36 分 =6 分 ×6)(1-4 小题的闭路积分方向均沿逆时针).

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \overline{z}\,\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z-\overline{z})}\,\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{\overline{z}}{2}}\,\mathrm{d}z$

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=10} \frac{\cos z}{\sin z}\,\mathrm{d}z$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{5-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$

4. (8 分) 解析函数 $f(z)$ 的实部为 $\mathrm{Re}\, f(z) = x^2+y^2+2x+y$, 且 $f(0)=0$, 求 $\mathrm{Im}\, f(z)$, 并求 $f'(1+\mathrm{i})$.

5. (5 分) 若在 $|z|\leqslant 1$ 上 $f(z)$ 解析, 且在 $|z|=1$ 上 $|f(z)|<1$, 求证: 在 $|z|<1$ 内存在唯一的点 z_0, 使得 $f(z_0)=z_0$.

6. (10 分) 利用拉普拉斯变换求初值问题.

$$\begin{cases} y''(t)+y'(t)-2y(t)=1\ (t>0) \\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1 \end{cases}$$

2007-2008 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (12 分) 求解下列方程:

   (1) $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

   (2) $e^z = 3 + 4\mathrm{i}$

   (3) $\cos(2 + z) = 3$

2. (12 分) 已知复变函数 $f(z)$ 解析, 实部 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - y + 1$, 且 $f(0) = 1$, 求虚部 $v(x, y)$ 和 $f'(0)$.

3. (15 分 =5 分 ×3) 已知 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 4}$.

   (1) 在 $|z| < 1$ 内把 $f(z)$ 展为 z 的幂级数.

   (2) 在 $0 < |z - 1| < 3$ 上把 $f(z)$ 展为罗朗级数.

   (3) 在 $1 < |z| < 4$ 上把 $f(z)$ 展为罗朗级数.

4. (36 分 =6 分 ×6) 求下列积分 (其中凡闭路积分沿逆时针方向)

   (1) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{(z-2)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z,\ C: |z| = 3.$

   (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + 2\sin^2\theta}.$

   (3) $\displaystyle\oint_C \frac{z - \sin z}{z^6}\,\mathrm{d}z,\ C: |z| = 1.$

   (4) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^7 - 2z^4},\ C: |z| = 1.$

   (5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 16}.$

   (6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 2x + 5)}\,\mathrm{d}x.$

5. (12 分) 用 Laplace 变换的方法求解处值问题:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

6. (6 分) 求方程 $z^4 + 7z + 1 = 0$ 在圆环 $\dfrac{3}{2} < |z| < 2$ 的根的个数, 并说明理由.

7. (7 分) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 区域 D 内解析, $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是 D 内的一个点列, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in D$, 如果对于任意的 k, 都有 $f(a_k) = g(a_k)$, 求证: 在 D 内恒有 $f(z) = g(z)$ 成立.

2009-2010 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (6 分 =3 分 ×2)

   (1) 若 $e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{1+i}=a+bi$, 其中 a,b 为实数, 请求出 a,b 的值.

   (2) 若 $1+\sin 2i=c+di$, 其中 c,d 为实数, 请求出 c,d 的值.

2. (9 分 =3 分 ×3) 求解以下复方程:

   (1) $z^4+2=0$ (2) $e^z=i$

3. (9 分) 已知复变函数 $f(z)$ 解析, 其实部 $u(x,y)=x^2-y^2+2y$, 且 $f(0)=i$, 求其虚部 $u(x,y)$, 并求 $f'(0)$.

4. (16 分 =6 分 +5 分 +5 分)

   (1) 设 $f_1(z)=\dfrac{1}{1-3z}, f_2(z)=\dfrac{z}{(1-3z)^2}$. 请把 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在区域 $|z|<\dfrac{1}{3}$ 展成 z 的幂级数.

   (2) 设函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z-6)}$. 在环域 $3<|z|<6$ 内把 $f(z)$ 展成 z 的罗朗级数.

   (3) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2}$. 在区域 $0<|z-2|<2$ 内把 $f(z)$ 展为 $z-2$ 的罗朗级数.

5. (21 分 =5 分 ×3+6 分) 计算复积分.

   (1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z-i}\,dz$

   (2) $\displaystyle\int_{|z|=2}z^2(1+e^{\frac{1}{z}})\,dz$

   (3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^2(z-5)}$

   (4) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^5(2-z)}$

6. (18 分 =6 分 ×3) 计算定积分.

   (1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$

   (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$

   (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2-2x+2}dx$

7. (16 分 =8 分 ×2) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

   (1) $\begin{cases} y''(t)+y'(t)=2 \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$

   (2) $\begin{cases} y''(t)-2y'(t)+y(t)=te^{2t} \\ y(0)=1,\ y'(0)=-2 \end{cases}$

8. (5 分) 记 $C=\left\{z\,\middle|\,|z|<R, R>0\right\}, H=\left\{z\,\middle|\,|z|<R, 0<\alpha<\arg z<\beta<\dfrac{1}{2}\pi\right\}$, 这样 H 为圆域 C 内的一个扇形区域, 设有复变函数 $f(z)$ 在 C 内解析, 且在 H 内为常数. 求证: $f(z)$ 在 C 内必为常数.

2017-2018 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (30 分) 基础知识.

(1) 求解以下复方程:

(a) $e^{iz} = 2017$　　　　(b) $(z-3)^4 = 1$

(2) 已知调和函数 $v(x,y) = 4x^2 + ay^2 + x$，求常数 a，并求出以 $v(x,y)$ 为虚部且满足 $f(0) = 1$ 的解析函数 $f(z)$.

(3) 已知幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{2^n}$，求收敛半径 R，并在收敛域内求出此幂级数的和函数.

(4) 已知 $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$，把 $f(z)$ 在区域 $0 < |z| < +\infty$ 展成 Laurent 级数

(5) 求 $z^5 + 5z^2 + 2z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 的根的个数，并说明理由.

2. (30 分) 计算以下复积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{3i} (2z + 3z^2)\, dz$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z - 2i}\, dz$

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\sin 5z}{z^2}\, dz$

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(\frac{1}{z-1})}{z^4}\, dz$

(5) $\displaystyle\oint_{|z-3|=2} \frac{e^z}{|z|^2} |\, dz|$

3. (14 分) 计算以下定积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 4\cos\theta)^2}$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x(x^4+1)}\, dx$

4. (10 分) 利用 Laplace 变换解微分方程初值问题: $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = te^{3t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 2017. \end{cases}$

5. (6 分) 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在围道 C 及内部解析，$g(z)$ 在围道 C 上没有零点，在 C 内 $g(z)$ 有唯一的零点 a. 已知 $f(a) = p_1 \neq 0$, $f'(a) = p_2$, $f''(a) = p_3$. 而 $g'(a) = 0$, $g''(a) = q_1 \neq 0$, $g'''(a) = q_2$, $g''''(a) = q_3$. 计算积分: $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}\, dz$.

6. (10 分) 设 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ $(a_0 \neq 0)$ 的收敛半径 $R > 0$.

(1) 记 $M(r) = \max\limits_{|z| \leqslant r} |f(z)|$ $(0 < r < R)$，利用 Cauchu 积分公式证明: $|f^{(n)}(0)| \leqslant \dfrac{n! M(r)}{r^n}$.

(1) 证明: 当 $|z| < \dfrac{|a_0| r}{|a_0| + M(r)}$ 时，函数 $f(z)$ 无零点. (其中 $r < R$)

2019-2020 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (10 分) 求解以下复方程:

(1) $z^3=-3\bar{z}(z\neq 0)$

(2) $\sin z=3$

2. (7 分) 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=e^{\alpha y}\cos 3x+3x$，其中 $\alpha>0$ 且 $f(0)=1$，求常数 α，并求出解析函数 $f(z)$.（请用 z 表示函数 $f(z)$）

3. (10 分)

(1) 把 $f(z)=z^5e^z$ 在 $z=0$ 展开成幂级数，并指出收敛区域.

(2) 把 $g(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2}$ 在区域 $0<|z-2|<2$ 展开成洛朗级数.

4. (36 分 =6 分 ×6) 计算复积分

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi i}\left(2019z^2-\cos z\right)\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=6}\left(2019z^2-\cos z\right)\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{5}{2}}\frac{z^2-8z+5}{z^3(z+2)(z-3)^2}\mathrm{d}z$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}{4-z}\mathrm{d}z$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}\mathrm{d}z$

(6) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-i|^4}$

5. (14 分 =7 分 ×2) 求以下定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{3-2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin 4x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

6. (5 分) 判断方程 $z^9=8z^3+2z^2+z+2$ 在 $1<|z|<5$ 的根的个数，并说明理由.

7. (10 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y''+y=e^t\cos 2t, \\ y(0)=4, y'(0)=0. \end{cases}$$

8. (8 分) 已知函数 $f(z)$ 在 $|z|\leq 1$ 内解析，函数 $g(z)$ 在 $|z|\geq 1$ 解析，且存在常数 M，使得在 $|z|>1$ 时，$|g(z)|<M$. 证明以下算式成立:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\left(\frac{f(\xi)}{\xi-a}-\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi-a)}\right)\mathrm{d}\xi=\begin{cases} f(a)\,, & \text{当}|a|<1, \\ g(a)\,, & \text{当}|a|>1. \end{cases}$$

2019-2020 学年第一学期复变函数（B）期末试题（补考）

1. (12 分) 求解以下复方程:

(1) $z^2 - 2019z + 2018 = 0$　　(2) $e^z = 5 + i$

2. (12 分) 利用柯西-黎曼方程求以下函数的可微点:

(1) $f(z) = xy + iy$　　(2) $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$

3. (30 分 =10 分 ×3) 计算复积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2i} (2019e^z - 4\cos 4z)\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\sin z}{(z-1)(z-8)^2}\,\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=9} \frac{e^z}{16+z^2}\,\mathrm{d}z.$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z}{(z^4+1)\sin^2 z}\,\mathrm{d}z.$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z|\mathrm{d}z|}{|z-1|^4}.$

4. (14 分) 求以下定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2i} \frac{1}{(10-8\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}\mathrm{d}x.$

5. (8 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = te^t, \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

6. (24 分 =10 分 +7 分 +7 分)

(1) 设 $f(z) = \dfrac{1}{\cos 2z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$，请求出 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4，并计算积分

$$\int_{|z-1|=2} \frac{2019}{z^5\cos 2z}\mathrm{d}z.$$

(2) 计算积分方程

$$f(t) = \sin 2t + \int_0^t \sin 2(t-u) f(u)\mathrm{d}u.$$

(3) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ 收敛，$|\arg c_n| \leq \dfrac{\pi}{3}$，求证：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n|$ 收敛.

2020-2021 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}+e^{-z}$ 在 $z=0$ 处展开为幂级数，并指出其收敛半径.

2. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^3+2z}$ 在 $1<|z+1|<+\infty$ 展开为洛朗级数.

3. (5 分) 计算 $(2020+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$.

4. (5 分) 计算 $\arccos 2$.

5. (10 分) 求 a 使得 $v(x,y)=ax^2y-y^3+x+y$ 是调和函数, 并求虚部为 $v(x,y)$ 且满足 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)$.

6. (30 分 =6 分 ×5) 求积分 (所有路径均为逆时针)

   (1) $\displaystyle\int_C (e^z+3z^2+1)\,\mathrm{d}z, C:|z|=2, \mathrm{Re}\,z<0$

   (1) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2(z-5)}, C:|z|=3$

   (1) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin z(z+6)(z-5)}, C:|z|=4$

   (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

   (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}$

7. (10 分) 求方程 $z^8+e^z+6z+1=0$ 在 $1<|z|<2$ 中根的个数, 并说明理由.

8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程:

$$\begin{cases} y''+2y'+y=te^t, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

9. (10 分) 设 f 是域 $|z|>r>0$ 上的解析函数. 证明：若对于 $|a|>R>r$, $\lim\limits_{z->\infty} f(z)=f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz=0$$

.

2010-2011 学年第二学期复分析期中试题

1. (15 分) 计算题.

   (1) 设 $u(x,y)=y^3-3x^2y$，求 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数 $f(z)$，使得 $\operatorname{Re} f(z)=u$ 且 $f(\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$.

   (2) 求积分 $I=\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z-2)}$，$r\neq 1,2$.

2. (15 分) 求函数 $f(z)=\sqrt[3]{\dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}$ 的所有支点，一个单值域，并求使得 $f(3)=0$ 的单值解析分支在 $z=\mathrm{i}$ 的值.

3. (15 分) 求将区域 $\left\{z:|z|<1,\left|z-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|>\dfrac{1}{2}\right\}$ 映到上半平面的单叶保角变换.

4. (15 分) 求证方程 $z+e^{-z}=a\ (a>1)$ 在 $\mathrm{Re}z>0$ 内只有一个根, 且为实根.

5. (15 分) 若 $f(z)$ 是 $|z|<1$ 上的全纯函数，且 $|f(z)|<1$. 求证：$|f'(z)|\leqslant\dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$，$|z|<1$.

6. (10 分) 设 $D=\{|z|<1\}$，若 $f(z)$ 是 D 上的函数，且 $f^2(z)$ 和 $f^3(z)$ 都是 D 上的全纯函数. 求证 $f(z)$ 是 D 上的全纯函数.

7. (15 分 =5 分 +10 分) 求证：

   (1) 若 $f(z)$ 是 $|z|<r$ 上的全纯函数，则 $|f(0)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\pi}r}\Big(\displaystyle\int_{|z|<r}|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{2}}$.

   (2) 若 $f(z)$ 在 $0<|z|<r$ 上全纯，且 $\displaystyle\int_{0<|z|<r}|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty$，则 $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

2014-2015 学年第二学期复分析 (H) 期末试题

1. (20 分 =10 分 $\times 2$)

   (1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^3}{2z^2+1}\,\mathrm{d}z$.

   (2) $a,b>0$，求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x$.

2. (15 分) 求一个共形映射，使 $B(0,1)\bigcap\Big\{\mathrm{Im}\,z>0\Big\}\longmapsto B(0,1)$.

3. (15 分) 利用 Rouché 定理去证代数学基本定理.

4. (10 分) 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上仅有一极点 $z=1$, 其主要部分是 $\dfrac{1}{(z-1)^2}$, $f(0)=1$，求 $f(z)$ 表达式, 并对 $f(z)$ 在 $1<|z|<+\infty$ 上作 Laurent 展开.

5. (10 分) 设 $f\in H\big(B(0,1)\big), f(0)=0$, 求证: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f(z^n)$ 在 $B(0,1)$ 绝对内闭一致收敛.

6. (10 分) 证明：除掉线性函数之外，不存在其它整函数使其反函数也是整函数.

7. (10 分) 设 $f\in H\big(B(0,1)\big)\bigcap C\big(\overline{B(0,1)}\big), |f(z)|=1, \forall z\in\partial B(0,1)$, 证明: f 是有理函数.

8. (10 分) 设区域 D 关于实轴对称，f 在 D 上全纯. 证明：存在 $f_1(z),f_2(z)\in H(D)$，使 $f(z)=f_1(z)+\mathrm{i}f_2(z)$，且 f_1,f_2 在实轴上取得实值.

2015-2016 年第二学期复分析期中试题

1. (20 分 =4 分 ×5) 判断下列命题的对错，请直接将答案写在命题左侧的下划线上，不要解答过程.

   (1) ____ $\mathbb{C}$ 中区域上的调和函数一定有共轭调和函数.

   (2) ____ 若函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中的区域 Ω 上全纯，在 Ω 的闭包上连续，则对任何 $z \in \Omega$ 有 $|f(z)| \leqslant \sup\limits_{w \in \partial\Omega} |f(w)|$.

   (3) ____ 设 f 为有理函数，且 ∞ 是 f 的一阶零点，那么 f 在 $\mathbb{C}$ 上的所有留数之和等于 0.

   (4) ____ 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径等于 1，在单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内定义出解析函数 $f(z)$，那么必有 z_0，使得 $|z_0| = 1$，并且 $f(z)$ 不能解析延拓到 z_0 的任何邻域上.

   (5) ____ 存在从上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ 到 $\mathbb{C}$ 的共形一一对应.

2. (24 分) 计算题，要求有详细解答过程，直接给出答案者不得分

   (1) 求留数 $\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} \cdot z^5, 0)$.

   (2) 利用留数定理计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 2} \mathrm{d}x$.

   (3) 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $0 < |z| < 1$ 和 $1 < |z| < +\infty$ 的 Laurent 展开.

   (4) 设 γ 为闭曲线 $z(t) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，$t \in [0, 2\pi]$, 计算积分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^9}{z^{10} - 1} \mathrm{d}z$.

3. (16 分) 设 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 中的区域 Ω 上的解析函数，且恒不为零，证明：实值函数 $\log|f(z)|$ 为 Ω 上的调和函数.

4. (10 分) 方程 $z^7 - 2z^5 + 2016z^3 - z + 1 = 0$ 在单位开圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内共有多少个根？要求详细说明理由，直接写出得数者不得分.

5. (10 分) 证明 Weierstrass 定理：设解析函数列 $\{f_n\}$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上内闭一致收敛，设 k 为任意正整数, 那么相应的 k 阶导函数列 $\{f_n^{(k)}(z)\}$ 也在 Ω 上内闭一致收敛.

6. (10 分) 求从区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\}$ 到单位圆盘 $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ 的共形一一对应 $w = f(z)$，使得 $f(\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}}) = 0$，且 $f'(\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}}) > 0$. 要求有详细解答过程, 直接写出答案者不得分.

7. (10 分) 设 $f(z)$ 为单位开圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上的解析函数，$|f(z)| \leqslant 1$, 且 f 在 $\mathbb{D}$ 内有两个不动点，i.e. 存在 $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{D}$，使得 $f(z_1) = z_1$, $f(z_2) = z_2$. 利用 Schwarz 引理证明：在 $\mathbb{D}$ 内 $f(z) = z$.

8. (10 分) 设 $f(z)$ 为上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ 上恒不为零的解析函数，并且当 $z \in \mathbb{H}$ 趋于实轴 $\mathbb{R}$ 上的点时，$|f(z)| \to 1$.

   (1) 证明 $f(z)$ 可以延拓为整函数，仍然记作 $f(z)$.

(2) 在 (1) 的条件下, 假设 ∞ 不是 $f(z)$ 的本性奇点, 证明 $f(z)$ 为常值函数.

9. (10 分) 设 $\Omega = \{0 < |z| < 1\}$, 设 f 在 Ω 上全纯，且 $\iint\limits_{\Omega} |f(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$. 证明：$z = 0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

2016-2017 年第二学期复分析期中试题

1. (2 分) 设 $z=x+\mathrm{i}y(x,y\in\mathbb{R})$，证明：$f(z)=\sqrt{xy}$ 在 $z=0$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程，但 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可导.

2. (2 分) 设 f 是凸区域 Ω 上的全纯函数，如果对每点 $z\in\Omega$ 有 $\mathrm{Re}f'(z)>0$，则 f 是 Ω 上的单叶函数.

3. (4 分 =2 分 ×2)

   (1) 若幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 $R=1$, 且在点 $z=1$ 收敛到 s, 则

   (a) 设 $\theta_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 且 A 为如下四条直线所围城的四边形区域 $y=\pm\cot\theta_0\cdot x$，$y=\pm\tan\theta_0\cdot(x-1)$，则上述级数在区域 A 上一致收敛.

   (b) $\lim_{z\to1,z\in A}f(z)=s$.

   (2) 利用上述结论求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$，并详细说明推导理由.

4. (2 分 =1 分 ×2)

   (1) 对任何 $z_1,z_2\in\mathbb{D}$，有 $\left|\dfrac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right|\leqslant\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|$.

   (2) 对任何 $z_1\in\mathbb{D}$，有 $|f'(z_1)|\leqslant\dfrac{1-|f(z_1)|^2}{1-|z_1|^2}$.

5. (2 分) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，试分别给出这个函数 $D_1=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|1<|z|<2\right\}$ 和 $D_2=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|2<|z|<\infty\right\}$ 上的 Laurent 展开式.

6. (2 分) 设 $\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|0<r_1<|z|<r_2<\infty\right\}$，$f$ 是 Ω 上的全纯函数且在 $\overline{\Omega}$ 上连续，$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$,求证:对任何 $r\in(r_1,r_2)$,$\log M(r)\leqslant\dfrac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_1)+\dfrac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_2)$.

7. (2 分) 利用留数定理计算积分.（写清楚详细推导过程，不得直接套用公式）

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\,\mathrm{d}x$$

8. (2 分) 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{D}=\left\{z\in\mathbb{C}\middle||z|<1\right\}$ 上的全纯函数，实数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$，且对任何 $n\in\mathbb{N}$ 有 $0<x_{n+1}<x_n<1$，求证：如果对任何 $n\in\mathbb{N}$ 有 $f(x_{2n+1})=f(x_{2n})$, 则 $f(z)$ 是常值函数.