1.1：2011-2012学年第一学期 第一次测试

1.当$n>1$时，有$\dfrac{n}{2n+1}<\dfrac{n}{2n+\sin n}<\dfrac{n}{2n-1}, \exists N=\max\{\dfrac{1}{\varepsilon},2\}, N\in\mathbb{N}_+$

$$\left|\frac{n}{2n+\sin n}-\frac{1}{2}\right|<\left|\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\sin n}=\frac{1}{2}$$

2.$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in\mathbb{R}^+,$ 当$a>b>x_0$时，$|f(a)-f(b)|<\varepsilon$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在且有限。

3.(1)原式$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

(2)原式$=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{3}{2}$

(3)原式$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)\right)^{\frac{1}{n}}=3\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}$

而$1<\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$，$\lim\limits_{n\to\infty}1=1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right)$

故原式$=3\cdot1=3$。

(4)原式$=\displaystyle\lim_{x\to0}(1+(1-\cos x))^{\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}}=\sqrt{e}$

4.$a_n\le ba_{n-1}\le b^2b_{n-2}\le\cdots\le b^{n-1}a_1$

故$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\le(1+b+b^2+\cdots+b^{n-1})a_1=\frac{1-b^{n-1}}{1-b}a_1<\frac{a_1}{1-b}$，$\{S_n\}$有上界。

又$S_{n+1}-S_n=a_n+1>0$，$\{S_n\}$递增，故$\{S_n\}$收敛。

5.由$a_1=1$，$\sin a_1<1$，$a_2=\dfrac{a_1+\sin a_1}{2}<a_1$，下归纳证明$0<a_{n+1}<a_n$：

若$0<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_1=1$成立，则需$a_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin a_n<a_n$，

$a_{n+1}=\dfrac{a_n+\sin a_n}{2}<a_n$，又$n=1,2$时成立，故$0<a_{n+1}<a_n$恒成立，$\{a_n\}$递减且有下界，

故$\{a_n\}$收敛，设其收敛与a，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+\sin a_n}{2}=\dfrac{a_n+\sin a_n}{2}$，即$a=\sin a$，

又$0<a_n\le1$，故$0\le a\le1$，即$a=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

6.取$\varepsilon_1=1$，$\exists x_1\in E$，$a-x_1<\varepsilon_1$，

取$\varepsilon_n=\min\left(\dfrac{1}{n},a-x_{n-1}\right)$，$\exists x_n\in E, a-x_n<\varepsilon_n$。

此时得到的$\{x_n\}$即为严格递增的趋于a的数列。

7.(1)原式可化为$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right|=M\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)$，$\forall\varepsilon>0$

当$|x|,|y|>\frac{M}{2\varepsilon}$时，有$\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)<\varepsilon$，有$Cauchy$收敛准则，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$存在。

(2)令$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$，下证$|f(x)-ax|\leq M$。

令$f(x)=ax+\alpha(x)$，由$\frac{f(x)}{x}\to a(x\to\infty)$，有$\frac{\alpha(x)}{x}\to 0(x\to\infty)$,

原式可化为：$|f(x)-ax|\leq\frac{1}{|y|}(M|x|+|x\cdot\alpha(y)|)+M$，令$y\to\infty$，有：

$\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{|y|}(M|x|+|x\cdot\alpha(y)|)=0$，故$|f(x)-ax|\leq M$。

1.2：2011-2012学年第一学期 第二次测试

1.(1)$f'(x)=(-2x^2+1)e^{-x^2}$，令$f'(x)=0$，得$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$f''(x)=(4x^3-6x)e^{-x^2}$，$f''(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2})\neq 0$，令$f''(x)=0$，得$x=0$或$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；

$x\in(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$时，$f'(x)>0$；$x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$f'(x)>0$，

故$f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$为极大值，$f-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$为最小值。

$x>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$x\in(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0)$时，$f''(x)>0$；$x<-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$x\in(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$时，$f''(x)>0$，

故凸区间为$(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0)$和$(\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$，凹区间为$(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2})$和$(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$。

(2)原式$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x^2-x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{1/x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{-2/x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+2}}=\sqrt{e}$

(3)原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x^2-1-3x+\frac{9}{2}x^2-1+3x-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{-x^2+o(x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2+o(x^2)}{-x^2+o(x^2)}=1$

(4)取$f(x)=\sqrt[4]{x}$，则$f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$，有：

$\sqrt[4]{x}\approx\sqrt[4]{x_0}+f'(x_0)\Delta x$，注意到$1.2^4=2.0736$，故取$x_0=2.0736$，$\Delta x=-0.0736$，

$\sqrt[4]{2}=1.2-\dfrac{0.0736}{4\cdot 1.2^3}=1.2-\dfrac{0.0736}{6.912}\approx 1.2-0.011=1.189$。

事实上$\sqrt[4]{2}\approx 1.1892$。

(5)略。

2.$f'(x)=n_1(x-x_1)^{n_1-1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k}+\cdots+n_k(x-x_1)^{n_1}\cdots(x-x_k)^{n_k-1}$，

令$g(x)=n\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i-1}\prod\limits_{i=1}k-1(x-\xi_i)$，

由$f(x_i)=0$，$\exists\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k-1}$，$f'(\xi_i)=0$，$\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$，

又$g(\xi_i)=0$，且最高此项均为nx^{n-1}，有$n-1$个根，其中$g(x)=0$，必有$k-1$个根为ξ_i，

其余$n-k$个根$t_1,\cdots,t_{n-k}\in\{x_1,\cdots,x_k\}$，显然这$n-k$个根亦为$f'(x)$的根。

故$f'(x)=g(x)$。

3.即证$\ln x_1+\ln x_2\leq\ln\left(\dfrac{1}{p}\cdot x_1^p+\dfrac{1}{q}\cdot x_1^q\right)$，取$f(x)=\ln x$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$在$(0,+\infty)$恒负，

故$f(x)$在$(0,+\infty)$上恒凹，$f(\dfrac{1}{p}\cdot x_1^p+\dfrac{1}{q}\cdot x_1^q)\geq\dfrac{1}{p}f(x_1^p)+\dfrac{1}{q}f(x_2^q)=\ln x_1+\ln x_2$，得证。

4.令$G(x)=f^2(x)+f'^2(x)$，$G'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=0$，故$G(x)=c^2$。

即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{c^2-y^2}$，$y=A\sin x+B\cos x$，原命题易证。

5.(1)由$f'(a)f'(b)>0$，不妨设$f'(a),f'(b)$均为正，即$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0$，

即$\exists x_1\in(a,a+\delta_a)$，$f(x_1)-f(a)>0$，$f(x_1)>0$；

同理，$\exists x_2\in(b-\delta_b,b)$，$f(x_2)<0$，由介值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，$f(\xi)=0$。

(2)不妨设$f'(a),f'(b)$均为正，$g(x)=f(x)-f'(x)$，$g(a),g(b)$均为负，即证$\exists t\in(a,b)$，$g(t)>0$，

由(1)，$\exists t\in(x_1,\xi)$，ξ为x_1右侧最近的零点，$f(\xi)-f(x_1)=f'(t)(\xi-x_1)$，$f'(t)<0$，

而$f(t)>0$，$g(t)=f(t)-f'(t)>0$，

故$\exists\xi_1\in(a,t),\xi_2\in(t,b)$，$g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$，即$f'(\xi_1)=f(\xi_1),f'(\xi_2)=f(\xi_2)$。

(3)令$G(x)=e^x(f(x)-f'(x))$，$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$，$G'(x)=e^x(f(x)-f''(x))$，

则$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，$G'(\eta)=\dfrac{G(a)-G(b)}{a-b}=0$，即$f''(\eta)=f(\eta)$。

1.3：2012-2013学年第一学期 第一次测试

1.(1)伪。举例：$a_n=(-1)^n\cdot a$

(2)真。$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，$|a_n-a_N|<\varepsilon$，即$n_1,n_2>N$时，$|a_{n_1}-an_2|<2\varepsilon$，由柯西收敛准则，$\{a_n\}$收敛。

(3)真。$g(x)=f(x)-x$，$g(-2)\geq-1-(-2)=1>0$，$g(2)\leq 1-2=-1<0$，
$g(x)$在$[-2,2]$上连续，由介值定理，$\exists x_0\in(-2,2)$，$g(x_0)=f(x_0)-x_0=0$即$f(x_0)=x_0$。

(4)伪。举例：$f(x)=x$，在$\mathbb{R}$上一致连续，但很明显无界。

2.(1)$n>1$时，$1<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，

而$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1=1=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$，故$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$

$n<-1$时，$1<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}$，

而$\displaystyle\lim_{n\to-\infty}1=1=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$，故$\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$

综上，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$

(2)原式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)+\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}+1$

$$=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}+1=\frac{3}{2}$$

(3)原式$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot4-2}=e^4\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\right)^{-2}=e^4$

(4)原式$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\sqrt{1+\sin x}-1)}{\cos x(1-\cos(\sin x))}\overset{t=\sin x}{=}\lim_{t\to0}\frac{t(\sqrt{1+t}-1)}{1-\cos t}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\sqrt{1+t}+1}\cdot\frac{t^2}{1-\cos t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\frac{1}{2}t^2}=1$$

3.当$x>0$，$nx>0$，$nx\to+\infty(n\to+\infty)$，令$t=nx$，$f(x)=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1+x^2e^t}{xe^t}=x$；

当$x=0$，$f(x)=1$；

当$x<0$，$nx<0$，$nx\to-\infty(n\to-\infty)$，令$t=nx$，$f(x)=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1+x^2e^t}{xe^t}=-\infty$；

综上，$f(x)$在$(0,+\infty)$连续, $x=0$处为无穷间断点

4.反证法，设其不为常值函数，即$\exists a\in\mathbb{R}$，$a\neq1$，$f(a)\neq f(1)$，不妨设$a>1$。

取$a_n=a^{\frac{1}{2^n}}$, 由$f(x^2)=f(x)$，显然$f(a_n)=f(a)\neq f(1)$，而$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$，

$f(x)$在$x=1$处连续，但取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}|f(a)-f(1)|$，$\forall\delta>0$，$|x-1|<\delta$时，

$\exists N=\left[\log_2\left(\ln\dfrac{a}{1+\delta}\right)\right]+1$，$|a_n-1|<\delta$，但$|f(a_n)-f(1)|=2\varepsilon>\varepsilon$，与$x=1$处$f$连续矛盾，

故$f(x)$在$x\geq1$时为常值函数。而$x\in(0,1)$证明同理。故原命题成立。

5.令$f(x)=\dfrac{\alpha(1+x)}{\alpha+x}$,

当$0<x_1<\sqrt{\alpha}$时，由$\alpha>1$, 有$\alpha>x_{n+1}=\dfrac{\alpha(1+x_n)}{\alpha+x_n}>x_n$，$\{x_n\}$递增且由上界，设$\{x_n\}$收敛于$t$,

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(t)=t$，得$t=\pm\sqrt{\alpha}$，又$x_n>0$，故$t\geq 0$，$t=\sqrt{\alpha}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$;

当$x_1=\sqrt{\alpha}$时，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$x_n=\sqrt{\alpha}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$;

当$x_1>\sqrt{\alpha}$时，$\alpha<x_{n+1}<x_n$，$\{x_n\}$递减且有下界，设$\{x_n\}$收敛于p,

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(p)=p$，得$p=\pm\sqrt{\alpha}$，又$x_n>0$，故$p\geq 0$，$p=\sqrt{\alpha}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$;

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$。

6.$a_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}>0$,

$a_{2k+1}-a_{2k-1}=-\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k+1}<0$，$\{a_{2k+1}\}$递减，又$a_{2k+1}>0$，设$\{a_{2k+1}\}$收敛于$p$;

$a_{2k+2}-a_{2k}=-\dfrac{1}{2k+2}+\dfrac{1}{2k+1}>0$，$\{a_{2k}\}$递增,

又$a_{2k}=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(2k-1)\cdot 2k}<1-\dfrac{1}{2k}<1$，设$\{a_{2k}\}$收敛于$q$;

$\lim\limits_{k\to\infty}(a_{2k+1}-a_{2k})=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2k+1}=0=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}-\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=p-q$，即$p=q$,

故$\{a_n\}$收敛。

7.由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0\in\mathbb{N}_+$，当$n>N_0$时$\left|\dfrac{a_n}{n}\right|<\varepsilon$，$|a_n|<n\varepsilon$,

取$M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{N_0}\}$，当$n>\max\left\{N_0,\left[\dfrac{M}{\varepsilon}+1\right]\right\}$时，$\forall i\leq n$，$i\in\mathbb{N}_+$，有:

$\left|\dfrac{a_i}{n}\right|\leq\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\max\limits_{1\leq k\leq n}\{a_k\}=0$。

1.4：2012-2013学年第一学期 第二次测试

1.(1)$\left(x^2e^x\right)^n = C_n^0(x^2)(e^x)^{(n)} + C_n^1(x^2)^{(1)}(e^x)^{(n-1)} + C_n^2(x^2)^{(2)}(e^x)(n-2) + 0 + \cdots + 0$
$= (x^2 + 2nx + x(n-1))e^x$

(2) $\cos(xy)(x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x) + 2y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{difx} = \dfrac{1-\cos(xy)\cdot y}{2y+\cos(xy)\cdot x}$

(3)原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2)^2}{x^3\sin x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^4} = \dfrac{1}{2}$

(4)原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} xb^{\frac{1}{x}}\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}b^x\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^x - 1\right)$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\cdot x\cdot\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

(5)原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(6)原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cos2x\cos3x + 2\sin2x\cos x\cos3x + 3\sin3x\cos x\cos2x}{\sin x}$
$= \lim\limits_{x\to0}(\cos2x\cos3x + 2\cos^2x\cos3x + 3\cos x\cos2x + 4\sin^2\cos x\cos2x) = 6$

(7)$y = \ln x$，曲率$K = \dfrac{|y''|}{(1+{y'}^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

2.先证如下结论：当$n\ge3$时，$\{\sqrt[n]{n}\}$递减。

即$n>3$时，有$n^{n+1} > (n+1)^n$，$\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(-n-1)-1}\cdot n > 1$，

而$\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(-n-1)} > \dfrac{81}{256}$，故$\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(-n-1)-1}\cdot n > \dfrac{81(n+1)}{256} > 1$，即证。

故$\sqrt[n]{n} < \sqrt[3]{3}(n>3)$，$A = \max\{\sqrt[n]{n}\} = \max\{1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}$，而显然$\sqrt[3]{3}$最大，故$A = \sqrt[3]{3}$。

3.可导一定连续，$f(0-0) = f(0) = b$，$f(0+0) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan^2 ax}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}ax^2 = 0 = f(0)$，故$b=0$；

$x>0$时，$f'(x) = \dfrac{2\tan(ax)\cdot\frac{ax}{1+a^2x^2} - \tan^2(ax)}{x^2}$，$x<0$时，$f'(x) = 2a-1$，

$f'_-(0) = f'(0-0) = 2a-1$，$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan^2 ax}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a^2x^2}{x^2} = a^2 = f'_-(0) = 2a-1$，

解得$a=1$，

综上，$a=0, b=1$。

4.设$|f'(x)|\le M$对于$\forall x\in I$恒成立，由微分中值定理，有：

$\forall a,b\in I$，$\exists\xi\in I$，$f'(\xi)(a-b) = f(a)-f(b) < M|a-b|$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$，$\forall x,x_0\in I$，$|x-x_0|<\delta$时，$f(x)-f(x_0) < M|x-x_0| < M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$，

故f在I上一致连续。而必要性不一定成立，反例如下：

$f(x) = \sqrt{x}$，$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$f'(0+0) = +\infty$，但$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续。

5.由题，$f(x)$为凸函数，先证$f(x)$在(a,b)上连续。

$\forall x\in I$，$\exists A,a,x_1,x2,b,B\in I$，

其中A,A',B',B为定点，x_1,x_2任意，且$x\in(x_1,x_2)\subset(A',B')\subset(A,B)$

故有$\dfrac{f(A')-f(A)}{A'-A}\le\dfrac{f(x_1)-f(A')}{x_1-A'}\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(B')-f(x_2)}{B'-x_2}\le\dfrac{f(B)-f(B')}{B-B'}$

令$M=\max\left\{\left|\dfrac{f(A')-f(A)}{A'-A}\right|,\left|\dfrac{f(B)-f(B')}{B-B'}\right|\right\}\ge 0$，则$\left|\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\le M$

$|f(x_2)-f(x_1)|\le M|x_2-x_1|$

若$M=0$，$f(x_2)=f(x_1)$，即$f(x)=c$，$\forall x\in(x_1,x_2)$，f在x处连续

若$M>0$，$f(x)$在$[x_1,x_2]$中满足利普西茨条件，f在$[x_1,x_2]$上一致连续，故在x处连续

综上，$f(x)$在(a,b)上连续。

令$p=\max\{f(a),f(b)\}$，若$\exists x_0\in(a,b)$，$f(x_0)>p$，则取$\lambda=\dfrac{b-x_0}{b-a}$，则有

$f(\lambda a+(1-\lambda)b)=f(x_0)>\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$，矛盾。

故$f(x)$在$[a,b]$上有上界。

令$mid=\dfrac{a+b}{2}$，取$f\,(mid)=q$，若$f(x)$下无界，即$\exists t\in(a,b)$，$t\ne mid$，$q-f(t)>p-q$，

若$t>mid$，则有$\dfrac{f(mid)-f(a)}{mid-a}\ge\dfrac{f(t)-f(mid)}{t-mid}$，矛盾；

若$t<mid$，则有$\dfrac{f(mid)-f(t)}{mid-t}\ge\dfrac{f(b)-f(mid)}{b-mid}$，矛盾。

故$f(x)$有下界。综上，$f(x)$在$[a,b]$上有界。

6.由微分中值定理，$\exists\xi\in(0,x)$或$(x,0)$，取$\theta=\dfrac{\xi}{x}\in(0,1)$，有$f(x)-f(0)=f^{'}(\theta x)\cdot x$，

由$f^{''}(0)\ne 0$，$|x|$充分小，可使$f^{''}$符号不变，$f^{'}(x)$单调，

故存在唯一的θ使得$f^{'}(\theta x)\cdot x=f(x)-f(0)$。$x\to 0$时，有：

$x\cdot f^{'}(\theta x)=f^{'}(0)\cdot x+f^{''}(0)\cdot\theta x^2+o_1(x^2)=f(x)-f(x_0)=f^{'}(0)\cdot x+\dfrac{f^{''}}{2!}(0)\cdot\theta x^2+o_3(x^2)$

$\theta=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{o_1(x^2)-o_2 1(x^2)}{x^2 f^{''}(0)}\right)=\dfrac{1}{2}$

1.5：2013-2014学年第一学期 第一次测试

1.$\dfrac{n}{2n+\sqrt{2}} < \dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}} < \dfrac{n}{2n-1}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\max\left\{\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}\right]+1,2\right\}$，$N\in\mathbb{N}_+$

当$n>N$时，$\left|\dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\sqrt{2}}{2n}<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

2.(1)不收敛，下证子列$\{a_n=f(n)\}$不收敛。

$a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$，设$a_n\to t(n\to+\infty)$，

当$t\geq 0$，取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\exists a_{2n+1}=-\dfrac{2n+1}{2n+2}<t-\dfrac{1}{2}$

当$t\leq 0$，取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\exists a_{2n}=\dfrac{2n}{2n+1}>t+\dfrac{1}{2}$，

故a_n不收敛，故$\lim\limits_{x\to\infty}(-1)^{[k]}\dfrac{x}{x+1}$不存在。

(2)当$k\geq 1$，$\ln k\leq k-1$，对于$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当$k,l>N$时，

$|a_k-a_l|\leq\sum\limits_{k=N}^{+\infty}\dfrac{\ln k}{k^3}\leq\sum\limits_{k=N}^{+\infty}\dfrac{k}{k^3}\leq\dfrac{1}{N}<\varepsilon$，由$Cauchy$收敛准则，$\{a_n\}$收敛。

3.(1)$\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{k}}\leq\dfrac{n}{n-\sqrt{n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-\sqrt{n}}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{k}}=1$。

(2)原式$=\lim\limits_{x\to0}(1+\ln(2x+1))^{\frac{1}{\ln(2x+1)}\cdot\frac{\ln(2x+1)}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}}=e^2$。

(3)原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{n}x}{x}=\dfrac{1}{n}$。

(4)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\left((1+\dfrac{\ln n}{n})^\alpha-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\cdot\alpha\cdot\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha\cdot\dfrac{\ln n}{n^{1-\alpha}}=0$。

4.不妨设$f(x)$单增，

先证$f(x)$任一点a有左右极限，且$f(a-0)=\sup f(x),x<a$，$f(a+0)=\inf f(x),x>a$

令$A=\inf f(x),x>a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists t>0$，$A\leq f(a+t)\leq A+\varepsilon$，

又由单调，$\forall x\in(a,a+t)$，$A\leq f(x)\leq f(a+t)<A+\varepsilon$，$|f(x)-A|\leq\varepsilon$，

即$f(a+0)=A$，而$f(a-0)$同理，即证得$f(x)$任一点有左右极限。

故对于$f(x)$的复合$g(x)=\sin f(x)$，$\sin x$为连续函数，亦任一点均有左右极限。证毕。

5.取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$，$|a_n-a|<\dfrac{1}{2}$，

若$a_n\neq a$，取$\varepsilon_0=a_n-a$，则不存在$k\in\mathbb{N}_+$，使$|a_n-a|<\varepsilon_0$，故$a_n=a$。

6.$a_1 < 2$，$a_2 = 3 > 2$，$a_3 = \frac{5}{3} < 2$，$\cdots$，下证$\{a_{2n+1}\}$和$\{a_{2n}\}$均收敛。设$f(x) = 3 - \frac{4}{x+2}$，

$a_{2n+1} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{a_{2n-1}}} = 3 - \frac{4}{a_{2n-1} + 2}$，$a_1 = 1$，而$x < 3 - \frac{4}{x+2}$得$-1 < x < 2$，

当$a_{2k+1} < 2$时，有$a_{2k+1} < a_{2k+3} < 2$，故$\{a_{2k+1}\}$递增且有上界2，设$\{a_{2k+1}\}$收敛于$p \leq 2$;

而$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_{2k+1}) = f(p) = p$，得$p = -1$或2，又$a_{2k+1} > 0$，故$p = 2$

类似的，对a_{2k}进行同理的计算，可知$\{a_{2k}\}$递减且有下界2，设$\{a_{2k}\}$收敛于q且可证$q = 2$;

综上，a_n收敛于2。

1.6：2013-2014学年第一学期 第二次测试

1.$|x|<1$时，$f(x)=ax^2+bx$；$|x|>1$时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$；$|x|=1$时，$f(x)=\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{1+b}{2}$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=a+b$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=a-b$

得$a=0,b=1$，$f(1)=1,f(-1)=-1$。

2.$f(x)$在$x=0$处有二阶导，故$f(x)$在$x=0$得领域内连续，

由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，故$f(x)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\dfrac{1}{2}f''(0)$。

3.原式$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)f'(x_0)-f(x)+f(x_0)}{(f(x)-f(x_0))(x-x_0)f'(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f'(x_0)}\dfrac{f'(x_0)-f'(x)}{f'(x)(x-x_0)+f(x)-f(x_0)}$

$$=-\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\frac{1}{f'(x)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=-\frac{f''(x)}{2f'^2(x_0)}$$

4.$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-(\sin t+\cos t)^2-(\cos t-\sin t)^2}{(\sin t+\cos t)^2\cdot e^t(\sin t+\cos t)}=-\dfrac{2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}$

5.若$f'(0)=A\neq0$，不妨设$A>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=A=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$，

$\exists\delta>0$，$x\in(0,\delta)$时$f(x)>f(0)$，$x\in(-\delta,0)$时$f(x)<f(0)$，

$|f(x)|$在$x=0$可导，即$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$，

即$x=0$领域内$f(x)$同号，$f(0)\neq0$

若$A=0$，即$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$，

对$\forall f(0)\in\mathbb{R}$均成立。

6.取$y=1$，有$f(x)=f(x)+f(1)$，$f(1)=0$。

由$f(x)$在$x=1$处连续，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists delta>0$，$|x-1|<\delta$时$|f(x)|<\varepsilon$，

对任意一点$x_0\neq1$，对于上述ε，$\exists\delta>0$，$|x_0y-x_0|<x_0\delta$时，$|y-1|<\delta$，

$|f(y)|<\varepsilon$，$|f(x_0y)-f(x_0)|=|f(y)|<\varepsilon$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上各点连续。

7.两边取对数移项，即证$\dfrac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}>\dfrac{\ln\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$在$n>9$时成立。

研究$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$f'(e)=0$，$x>e$时$f'(x)<0$，$f(x)$递减。

故对于$f(\sqrt{n})$，当$\sqrt{n}>e$即$n>9$时，有$f(n)>f(n+1)$，得证。

8.利用微分中值定理即可解释，略。

9.若$\exists t\in(a,b)$，$f(t)\neq0$，又$f(a)=f(b)=0$，故(a,b)一定存在最值同时为极值。

不妨设其有最大值$f(x_0)>0$，则此时$f''(x_0)\leq0$，但$f''(x_0)=e^{x_0}f(x_0)>0$，矛盾。

最小值同理。故不存在$t\in(a,b)$，$f(t)\neq0$，即$f(x)\equiv0$。