

## 1.6: 2013-2014学年第一学期 第二次测试

1.  $|x| < 1$ 时,  $f(x) = ax^2 + bx$ ;  $|x| > 1$ 时,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $|x| = 1$ 时,  $f(x) = \frac{a}{2} \pm \frac{1+b}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = a - b$$

得  $a = 0, b = 1, f(1) = 1, f(-1) = -1$ 。

2.  $f(x)$ 在  $x = 0$ 处有二阶导, 故  $f(x)$ 在  $x = 0$ 得领域内连续,

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \text{故 } f(x) = 0, \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f''(0).$$

$$\begin{aligned} 3. \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f'(x_0) - f(x) + f(x_0)}{(f(x) - f(x_0))(x - x_0)f'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f'(x_0)} \frac{f'(x_0) - f'(x)}{f'(x)(x - x_0) + f(x) - f(x_0)} \\ &= -\frac{1}{f'(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{f'(x) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = -\frac{f''(x_0)}{2f'^2(x_0)} \end{aligned}$$

$$4. \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{-(\sin t + \cos t)^2 - (\cos t - \sin t)^2}{(\sin t + \cos t)^2 \cdot e^t(\sin t + \cos t)} = -\frac{2}{e^t(\sin t + \cos t)^3}$$

5. 若  $f'(0) = A \neq 0$ , 不妨设  $A > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ,

$\exists \delta > 0$ ,  $x \in (0, \delta)$ 时  $f(x) > f(0)$ ,  $x \in (-\delta, 0)$ 时  $f(x) < f(0)$ ,

$$|f(x)| \text{在 } x = 0 \text{可导, 即 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x},$$

即  $x = 0$ 领域内  $f(x)$ 同号,  $f(0) \neq 0$

$$\text{若 } A = 0, \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0,$$

对  $\forall f(0) \in \mathbb{R}$ 均成立。

6. 取  $y = 1$ , 有  $f(x) = f(x) + f(1), f(1) = 0$ 。

由  $f(x)$ 在  $x = 1$ 处连续, 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - 1| < \delta$ 时  $|f(x)| < \varepsilon$ ,

对任意一点  $x_0 \neq 1$ , 对于上述  $\varepsilon, \exists \delta > 0, |x_0 y - x_0| < x_0 \delta$ 时,  $|y - 1| < \delta$ ,

$|f(y)| < \varepsilon, |f(x_0 y) - f(x_0)| = |f(y)| < \varepsilon$ , 故  $f(x)$ 在  $(0, +\infty)$ 上各点连续。

7. 两边取对数移项, 即证  $\frac{\ln \sqrt{n}}{\sqrt{n}} > \frac{\ln \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ 在  $n > 9$ 时成立。

$$\text{研究 } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f'(e) = 0, \quad x > e \text{时 } f'(x) < 0, \quad f(x) \text{递减}.$$

故对于  $f(\sqrt{n})$ , 当  $\sqrt{n} > e$ 即  $n > 9$ 时, 有  $f(n) > f(n+1)$ , 得证。

8. 利用微分中值定理即可解释, 略。

9. 若  $\exists t \in (a, b), f(t) \neq 0$ , 又  $f(a) = f(b) = 0$ , 故  $(a, b)$ 一定存在最值同时为极值。

不妨设其有最大值  $f(x_0) > 0$ , 则此时  $f''(x_0) \leq 0$ , 但  $f''(x_0) = e^{x_0} f(x_0) > 0$ , 矛盾。

最小值同理。故不存在  $t \in (a, b), f(t) \neq 0$ , 即  $f(x) \equiv 0$ 。