1.5：2013-2014学年第一学期 第一次测试

1.$\dfrac{n}{2n+\sqrt{2}} < \dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}} < \dfrac{n}{2n-1}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\max\left\{\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}\right]+1,2\right\}$，$N\in\mathbb{N}_+$

当$n>N$时，$\left|\dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{\sqrt{2}}{2n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

2.(1)不收敛，下证子列$\{a_n=f(n)\}$不收敛。

$a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$，设$a_n\to t(n\to+\infty)$，

当$t\geq 0$，取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\exists a_{2n+1}=-\dfrac{2n+1}{2n+2}<t-\dfrac{1}{2}$

当$t\leq 0$，取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\exists a_{2n}=\dfrac{2n}{2n+1}>t+\dfrac{1}{2}$，

故a_n不收敛，故$\lim\limits_{x\to\infty}(-1)^{[k]}\dfrac{x}{x+1}$不存在。

(2)当$k\geq 1$，$\ln k\leq k-1$，对于$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当$k,l>N$时，

$|a_k-a_l|\leq\sum\limits_{k=N}^{+\infty}\dfrac{\ln k}{k^3}\leq\sum\limits_{k=N}^{+\infty}\dfrac{k}{k^3}\leq\dfrac{1}{N}<\varepsilon$，由$Cauchy$收敛准则，$\{a_n\}$收敛。

3.(1)$\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{k}}\leq\dfrac{n}{n-\sqrt{n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-\sqrt{n}}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{k}}=1$。

(2)原式$=\lim\limits_{x\to0}(1+\ln(2x+1))^{\frac{1}{\ln(2x+1)}\cdot\frac{\ln(2x+1)}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}}=e^2$。

(3)原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{n}x}{x}=\dfrac{1}{n}$。

(4)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\left((1+\dfrac{\ln n}{n})^\alpha-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\cdot\alpha\cdot\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha\cdot\dfrac{\ln n}{n^{1-\alpha}}=0$。

4.不妨设$f(x)$单增，

先证$f(x)$任一点a有左右极限，且$f(a-0)=\sup f(x),x<a$，$f(a+0)=\inf f(x),x>a$

令$A=\inf f(x),x>a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists t>0$，$A\leq f(a+t)\leq A+\varepsilon$，

又由单调，$\forall x\in(a,a+t)$，$A\leq f(x)\leq f(a+t)<A+\varepsilon$，$|f(x)-A|\leq\varepsilon$，

即$f(a+0)=A$，而$f(a-0)$同理，即证得$f(x)$任一点有左右极限。

故对于$f(x)$的复合$g(x)=\sin f(x)$，$\sin x$为连续函数，亦任一点均有左右极限。证毕。

5.取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$，$|a_n-a|<\dfrac{1}{2}$，

若$a_n\neq a$，取$\varepsilon_0=a_n-a$，则不存在$k\in\mathbb{N}_+$，使$|a_n-a|<\varepsilon_0$，故$a_n=a$。

6.$a_1 < 2$，$a_2 = 3 > 2$，$a_3 = \dfrac{5}{3} < 2$，$\cdots$，下证$\{a_{2n+1}\}$和$\{a_{2n}\}$均收敛。设$f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+2}$，

$a_{2n+1} = 1 + \dfrac{2}{1 + \frac{2}{a_{2n-1}}} = 3 - \dfrac{4}{a_{2n-1} + 2}$，$a_1 = 1$，而$x < 3 - \dfrac{4}{x+2}$得$-1 < x < 2$，

当$a_{2k+1} < 2$时，有$a_{2k+1} < a_{2k+3} < 2$，故$\{a_{2k+1}\}$递增且有上界2，设$\{a_{2k+1}\}$收敛于$p \leq 2$;

而$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_{2k+1}) = f(p) = p$，得$p = -1$或2，又$a_{2k+1} > 0$，故$p = 2$

类似的，对a_{2k}进行同理的计算，可知$\{a_{2k}\}$递减且有下界2，设$\{a_{2k}\}$收敛于q且可证$q = 2$;

综上，a_n收敛于2。