1.4：2012-2013学年第一学期 第二次测试

1.(1) $$\left(x^2e^x\right)^n=C_n^0(x^2)(e^x)^{(n)}+C_n^1(x^2)^{(1)}(e^x)^{(n-1)}+C_n^2(x^2)^{(2)}(e^x)(n-2)+0+\cdots+0$$
$$=(x^2+2nx+x(n-1))e^x$$

(2) $\cos(xy)(x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x)+2y\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{difx}=\dfrac{1-\cos(xy)\cdot y}{2y+\cos(xy)\cdot x}$

(3)原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2)^2}{x^3\sin x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

(4)原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}xb^{\frac{1}{x}}\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}b^x\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^x-1\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot x\cdot\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$$

(5)原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(6)原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cos2x\cos3x+2\sin2x\cos x\cos3x+3\sin3x\cos x\cos2x}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}(\cos2x\cos3x+2\cos^2x\cos3x+3\cos x\cos2x+4\sin^2\cos x\cos2x)=6$$

(7) $y=\ln x$，曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+{y'}^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

2.先证如下结论：当 $n\geq3$ 时，$\{\sqrt[n]{n}\}$ 递减。

即 $n>3$ 时，有 $n^{n+1}>(n+1)^n$，$\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(-n-1)-1}\cdot n>1$，

而 $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(-n-1)}>\dfrac{81}{256}$，故 $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(-n-1)-1}\cdot n>\dfrac{81(n+1)}{256}>1$，即证。

故 $\sqrt[n]{n}<\sqrt[3]{3}(n>3)$，$A=\max\{\sqrt[n]{n}\}=\max\{1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}$，而显然 $\sqrt[3]{3}$ 最大，故 $A=\sqrt[3]{3}$。

3.可导一定连续，$f(0-0)=f(0)=b$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan^2ax}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}ax^2=0=f(0)$，故 $b=0$；

$x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2\tan(ax)\cdot\frac{ax}{1+a^2x^2}-\tan^2(ax)}{x^2}$，$x<0$ 时，$f'(x)=2a-1$，

$f'_-(0)=f'(0-0)=2a-1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan^2ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a^2x^2}{x^2}=a^2=f'_-(0)=2a-1$，

解得 $a=1$，

综上，$a=0,b=1$。

4.设 $|f'(x)|\leq M$ 对于 $\forall x\in I$ 恒成立，由微分中值定理，有：

$\forall a,b\in I$，$\exists\xi\in I$，$f'(\xi)(a-b)=f(a)-f(b)<M|a-b|$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$，$\forall x,x_0\in I$，$|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)-f(x_0)<M|x-x_0|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$，

故 f 在 I 上一致连续。而必要性不一定成立，反例如下：

$f(x)=\sqrt{x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$f'(0+0)=+\infty$，但 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

5.由题，$f(x)$为凸函数，先证$f(x)$在(a,b)上连续。

$\forall x\in I$，$\exists A,a,x_1,x2,b,B\in I$，

其中A,A',B',B为定点，x_1,x_2任意，且$x\in(x_1,x_2)\subset(A',B')\subset(A,B)$

故有$\dfrac{f(A')-f(A)}{A'-A}\le\dfrac{f(x_1)-f(A')}{x_1-A'}\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(B')-f(x_2)}{B'-x_2}\le\dfrac{f(B)-f(B')}{B-B'}$

令$M=\max\left\{\left|\dfrac{f(A')-f(A)}{A'-A}\right|,\left|\dfrac{f(B)-f(B')}{B-B'}\right|\right\}\ge 0$，则$\left|\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\le M$

$|f(x_2)-f(x_1)|\le M|x_2-x_1|$

若$M=0$，$f(x_2)=f(x_1)$，即$f(x)=c$，$\forall x\in(x_1,x_2)$，f在x处连续

若$M>0$，$f(x)$在$[x_1,x_2]$中满足利普西茨条件，f在$[x_1,x_2]$上一致连续，故在x处连续

综上，$f(x)$在(a,b)上连续。

令$p=\max\{f(a),f(b)\}$，若$\exists x_0\in(a,b)$，$f(x_0)>p$，则取$\lambda=\dfrac{b-x_0}{b-a}$，则有

$f(\lambda a+(1-\lambda)b)=f(x_0)>\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$，矛盾。

故$f(x)$在$[a,b]$上有上界。

令$mid=\dfrac{a+b}{2}$，取$f\,(mid)=q$，若$f(x)$下无界，即$\exists t\in(a,b)$，$t\ne mid$，$q-f(t)>p-q$，

若$t>mid$，则有$\dfrac{f(mid)-f(a)}{mid-a}\ge\dfrac{f(t)-f(mid)}{t-mid}$，矛盾；

若$t<mid$，则有$\dfrac{f(mid)-f(t)}{mid-t}\ge\dfrac{f(b)-f(mid)}{b-mid}$，矛盾。

故$f(x)$有下界。综上，$f(x)$在$[a,b]$上有界。

6.由微分中值定理，$\exists\xi\in(0,x)$或$(x,0)$，取$\theta=\dfrac{\xi}{x}\in(0,1)$，有$f(x)-f(0)=f^{'}(\theta x)\cdot x$，

由$f^{''}(0)\ne 0$，$|x|$充分小，可使$f^{''}$符号不变，$f^{'}(x)$单调，

故存在唯一的θ使得$f^{'}(\theta x)\cdot x=f(x)-f(0)$。$x\to 0$时，有：

$x\cdot f^{'}(\theta x)=f^{'}(0)\cdot x+f^{''}(0)\cdot\theta x^2+o_1(x^2)=f(x)-f(x_0)=f^{'}(0)\cdot x+\dfrac{f^{''}}{2!}(0)\cdot\theta x^2+o_3(x^2)$

$\theta=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{o_1(x^2)-o_21(x^2)}{x^2f^{''}(0)}\right)=\dfrac{1}{2}$