1.3：2012-2013学年第一学期 第一次测试

1.(1)伪。举例：$a_n=(-1)^n\cdot a$

(2)真。$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，$|a_n-a_N|<\varepsilon$，即$n_1,n_2>N$时，$|a_{n_1}-an_2|<2\varepsilon$，由柯西收敛准则，$\{a_n\}$收敛。

(3)真。$g(x)=f(x)-x$，$g(-2)\geq-1-(-2)=1>0$，$g(2)\leq1-2=-1<0$，$g(x)$在$[-2,2]$上连续，由介值定理，$\exists x_0\in(-2,2)$，$g(x_0)=f(x_0)-x_0=0$即$f(x_0)=x_0$。

(4)伪。举例：$f(x)=x$，在$\mathbb{R}$上一致连续，但很明显无界。

2.(1)$n>1$时，$1<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，

而$\lim\limits_{n\to+\infty}1=1=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，故$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$

$n<-1$时，$1<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}$，

而$\lim\limits_{n\to-\infty}1=1=\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}$，故$\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}+1$

$$=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}+1=\frac{3}{2}$$

(3)原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot4-2}=e^4\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)\right)^{-2}=e^4$

(4)原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(\sqrt{1+\sin x}-1)}{\cos x(1-\cos(\sin x))}\overset{t=\sin x}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t(\sqrt{1+t}-1)}{1-\cos t}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\sqrt{1+t}+1}\cdot\frac{t^2}{1-\cos t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\frac{1}{2}t^2}=1$$

3.当$x>0$，$nx>0$，$nx\to+\infty(n\to+\infty)$，令$t=nx$，$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1+x^2e^t}{xe^t}=x$；

当$x=0$，$f(x)=1$；

当$x<0$，$nx<0$，$nx\to-\infty(n\to-\infty)$，令$t=nx$，$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1+x^2e^t}{xe^t}=-\infty$；

综上，$f(x)$在$(0,+\infty)$连续, $x=0$处为无穷间断点

4.反证法，设其不为常值函数，即$\exists a\in\mathbb{R}$，$a\neq1$，$f(a)\neq f(1)$，不妨设$a>1$。

取$a_n=a^{\frac{1}{2^n}}$, 由$f(x^2)=f(x)$，显然$f(a_n)=f(a)\neq f(1)$，而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，

$f(x)$在$x=1$处连续，但取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}|f(a)-f(1)|$，$\forall\delta>0$，$|x-1|<\delta$时，

$\exists N=\left[\log_2\left(\ln\dfrac{a}{1+\delta}\right)\right]+1$，$|a_n-1|<\delta$，但$|f(a_n)-f(1)|=2\varepsilon>\varepsilon$，与$x=1$处$f$连续矛盾，

故$f(x)$在$x\geq1$时为常值函数。而$x\in(0,1)$证明同理。故原命题成立。

5.令$f(x)=\dfrac{\alpha(1+x)}{\alpha+x}$,

当$0<x_1<\sqrt{\alpha}$时，由$\alpha>1$, 有$\alpha>x_{n+1}=\dfrac{\alpha(1+x_n)}{\alpha+x_n}>x_n$，$\{x_n\}$递增且由上界，设$\{x_n\}$收敛于$t$，

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(t)=t$，得$t=\pm\sqrt{\alpha}$，又$x_n>0$，故$t\geq 0$，$t=\sqrt{\alpha}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$;

当$x_1=\sqrt{\alpha}$时，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$x_n=\sqrt{\alpha}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$;

当$x_1>\sqrt{\alpha}$时，$\alpha<x_{n+1}<x_n$，$\{x_n\}$递减且有下界，设$\{x_n\}$收敛于p，

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(p)=p$，得$p=\pm\sqrt{\alpha}$，又$x_n>0$，故$p\geq 0$，$p=\sqrt{\alpha}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$;

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$。

6.$a_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}>0$,

$a_{2k+1}-a_{2k-1}=-\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k+1}<0$，$\{a_{2k+1}\}$递减，又$a_{2k+1}>0$，设$\{a_{2k+1}\}$收敛于$p$;

$a_{2k+2}-a_{2k}=-\dfrac{1}{2k+2}+\dfrac{1}{2k+1}>0$，$\{a_{2k}\}$递增，

又$a_{2k}=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(2k-1)\cdot 2k}<1-\dfrac{1}{2k}<1$，设$\{a_{2k}\}$收敛于$q$;

$\lim\limits_{k\to\infty}(a_{2k+1}-a_{2k})=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2k+1}=0=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}-\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=p-q$，即$p=q$，

故$\{a_n\}$收敛。

7.由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0\in\mathbb{N}_+$，当$n>N_0$时$\left|\dfrac{a_n}{n}\right|<\varepsilon$，$|a_n|<n\varepsilon$，

取$M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{N_0}\}$，当$n>\max\left\{N_0,\left[\dfrac{M}{\varepsilon}+1\right]\right\}$时，$\forall i\leq n$，$i\in\mathbb{N}_+$，有:

$\left|\dfrac{a_i}{n}\right|\leq\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\max\limits_{1\leq k\leq n}\{a_k\}=0$。