1.2：2011-2012学年第一学期 第二次测试

1.(1)$f'(x)=(-2x^2+1)e^{-x^2}$，令$f'(x)=0$，得$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$f''(x)=(4x^3-6x)e^{-x^2}$，$f''(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2})\neq 0$，令$f''(x)=0$，得$x=0$或$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；

$x\in(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$时，$f'(x)>0$；$x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$f'(x)>0$，

故$f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$为极大值，$f-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$为最小值。

$x>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$x\in(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0)$时，$f''(x)>0$；$x<-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$x\in(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$时，$f''(x)>0$，

故凸区间为$(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0)$和$(\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$，凹区间为$(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2})$和$(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$。

(2)原式$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x^2-x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{1/x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{-2/x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+2}}=\sqrt{e}$

(3)原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x^2-1-3x+\frac{9}{2}x^2-1+3x-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{-x^2+o(x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2+o(x^2)}{-x^2+o(x^2)}=1$

(4)取$f(x)=\sqrt[4]{x}$，则$f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$，有：

$\sqrt[4]{x}\approx\sqrt[4]{x_0}+f'(x_0)\Delta x$，注意到$1.2^4=2.0736$，故取$x_0=2.0736$，$\Delta x=-0.0736$，

$\sqrt[4]{2}=1.2-\dfrac{0.0736}{4\cdot 1.2^3}=1.2-\dfrac{0.0736}{6.912}\approx 1.2-0.011=1.189$。

事实上$\sqrt[4]{2}\approx 1.1892$。

(5)略。

2.$f'(x)=n_1(x-x_1)^{n_1-1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k}+\cdots+n_k(x-x_1)^{n_1}\cdots(x-x_k)^{n_k-1}$，

令$g(x)=n\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i-1}\prod\limits_{i=1}k-1(x-\xi_i)$，

由$f(x_i)=0$，$\exists\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k-1}$，$f'(\xi_i)=0$，$\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$，

又$g(\xi_i)=0$，且最高此项均为nx^{n-1}，有$n-1$个根，其中$g(x)=0$，必有$k-1$个根为ξ_i，

其余$n-k$个根$t_1,\cdots,t_{n-k}\in\{x_1,\cdots,x_k\}$，显然这$n-k$个根亦为$f'(x)$的根。

故$f'(x)=g(x)$。

3.即证$\ln x_1+\ln x_2\le\ln\left(\dfrac{1}{p}\cdot x_1^p+\dfrac{1}{q}\cdot x_1^q\right)$，取$f(x)=\ln x$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$在$(0,+\infty)$恒负，

故$f(x)$在$(0,+\infty)$上恒凹，$f(\dfrac{1}{p}\cdot x_1^p+\dfrac{1}{q}\cdot x_1^q)\ge\dfrac{1}{p}f(x_1^p)+\dfrac{1}{q}f(x_2^q)=\ln x_1+\ln x_2$，得证。

4.令$G(x)=f^2(x)+f'^2(x)$，$G'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=0$，故$G(x)=c^2$。

即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{c^2-y^2}$，$y=A\sin x+B\cos x$，原命题易证。

5.(1)由$f'(a)f'(b)>0$，不妨设$f'(a),f'(b)$均为正，即 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0$，

即$\exists x_1\in(a,a+\delta_a)$，$f(x_1)-f(a)>0$，$f(x_1)>0$；

同理，$\exists x_2\in(b-\delta_b,b)$，$f(x_2)<0$，由介值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，$f(\xi)=0$。

(2)不妨设$f'(a),f'(b)$均为正，$g(x)=f(x)-f'(x)$，$g(a),g(b)$均为负，即证$\exists t\in(a,b)$，$g(t)>0$，

由(1)，$\exists t\in(x_1,\xi)$，ξ为x_1右侧最近的零点，$f(\xi)-f(x_1)=f'(t)(\xi-x_1)$，$f'(t)<0$，

而$f(t)>0$，$g(t)=f(t)-f'(t)>0$，

故$\exists\xi_1\in(a,t),\xi_2\in(t,b)$，$g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$，即$f'(\xi_1)=f(\xi_1),f'(\xi_2)=f(\xi_2)$。

(3)令$G(x)=e^x(f(x)-f'(x))$，$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$，$G'(x)=e^x(f(x)-f''(x))$，

则$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，$G'(\eta)=\dfrac{G(a)-G(b)}{a-b}=0$，即$f''(\eta)=f(\eta)$。