

1.1: 2011-2012学年第一学期 第一次测试

1. 当 $n > 1$ 时, 有 $\frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n+\sin n} < \frac{n}{2n-1}$, $\exists N = \max\{\frac{1}{\varepsilon}, 2\}$, $N \in \mathbb{N}_+$

$$\left| \frac{n}{2n+\sin n} - \frac{1}{2} \right| < \left| \frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+\sin n} = \frac{1}{2}$$

2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}^+$, 当 $a > b > x_0$ 时, $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且有限。

$$\begin{aligned} 3. (1) \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n + \sin \frac{1}{n} + \sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sin \frac{1}{n} + \sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right) \right)^{\frac{1}{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{而 } 1 < \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)^{\frac{1}{n}} < \left(\frac{2}{3} \right)^n + 1, \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)$$

$$\text{故原式} = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$(4) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (1 - \cos x))^{\frac{1}{1 - \cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2}} = \sqrt{e}$$

$$4. a_n \leq b a_{n-1} \leq b^2 b_{n-2} \leq \dots \leq b^{n-1} a_1$$

$$\text{故 } S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq (1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}) a_1 = \frac{1 - b^n}{1 - b} a_1 < \frac{a_1}{1 - b}, \{S_n\} \text{ 有上界.}$$

又 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} > 0$, $\{S_n\}$ 递增, 故 $\{S_n\}$ 收敛。

5. 由 $a_1 = 1$, $\sin a_1 < 1$, $a_2 = \frac{a_1 + \sin a_1}{2} < a_1$, 下归纳证明 $0 < a_{n+1} < a_n$:

若 $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 = 1$ 成立, 则需 $a_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a_n < a_n$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sin a_n}{2} < a_n, \text{ 又 } n = 1, 2 \text{ 时成立, 故 } 0 < a_{n+1} < a_n \text{ 恒成立, } \{a_n\} \text{ 递减且有下界,}$$

故 $\{a_n\}$ 收敛, 设其收敛与 a , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + \sin a_n}{2} = \frac{a + \sin a}{2}$, 即 $a = \sin a$,

又 $0 < a_n \leq 1$, 故 $0 \leq a \leq 1$, 即 $a = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

6. 取 $\varepsilon_1 = 1$, $\exists x_1 \in E$, $a - x_1 < \varepsilon_1$,

$$\text{取 } \varepsilon_n = \min\left(\frac{1}{n}, a - x_{n-1}\right), \exists x_n \in E, a - x_n < \varepsilon_n.$$

此时得到的 $\{x_n\}$ 即为严格递增的趋于 a 的数列。

7.(1)原式可化为 $\left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right| = M \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right), \forall \varepsilon > 0$

当 $|x|, |y| > \frac{M}{2\varepsilon}$ 时, 有 $\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) < \varepsilon$, 有 *Cauchy* 收敛准则, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ 存在。

(2) 令 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, 下证 $|f(x) - ax| \leq M$ 。

令 $f(x) = ax + \alpha(x)$, 由 $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a (x \rightarrow \infty)$, 有 $\frac{\alpha(x)}{x} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$,

原式可化为: $|f(x) - ax| \leq \frac{1}{|y|} (M|x| + |x \cdot \alpha(y)|) + M$, 令 $y \rightarrow \infty$, 有:

$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{|y|} (M|x| + |x \cdot \alpha(y)|) = 0$, 故 $|f(x) - ax| \leq M$ 。

数分(第二版)习题解答