水平集方法与图像分割

只贴出**完全**由我写的部分。

引言

图像分割的动态轮廓（active contour）方法

动态轮廓方法的基本思想是定义一条可动的连续曲线，并对该曲线定义一个合适的函数，这个函数在物体的边界处取极小值。只要使曲线向着函数值减小的方向演化，并最终停在极小值处，就可以分割出物体的边界。根据曲线演化方式的不同，动态轮廓方法可以分为基于能量最小原理的参数化动态轮廓方法和基于几何分析的动态轮廓方法 \cite{Serdar}。

```
@inproceedings{Serdar,
  title={Active Contours : A Brief Review},
  author={Serdar K. Balci and Burak Acar},
  url={https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16788693}
}
```

基于能量最小原理的参数化动态轮廓方法（parametric active contour）以参数化的形式来描述曲线，并对曲线定义了一个合适的能量泛函。能量泛函由两个部分组成：内部能量（internal energy）让曲线在演化过程中保持光滑性；外部能量（external energy）使曲线朝着物体的边界运动，且能量泛函在物体边界处取最小值。初始曲线在内部能量和外部能量的共同作用下演化，当曲线使能量泛函取最小值时，就得到了物体的边界。典型的例子就是

Snake 方法\cite{Kass1988}。但是这一方法有不少缺点，其一是不能够解决边界的拓扑变化，对于需要同时分割出图像中多个物体边界的情况无能为力；其二是能量泛函的定义依赖于曲线的参数，而和图像本身的几何性质无直接关联\cite{Serdar}。

```
@article{Kass1988,
  title={Snakes: Active Contour Models},
  author={ Kass, Michael  and  Witkin, Andrew  and  Terzopoulos, Demetri },
  journal={International Journal of Computer Vision},
  volume={1},
  number={4},
  pages={321-331},
  year={1988},
  url={https://doi.org/10.1007/BF00133570}
}
```

基于几何分析的动态轮廓方法（geometric active contour）用几何方法来描述曲线，并让曲线根据一个特殊的偏微分方程（geometric flow）演化。这一偏微分方程含有两个速度项，一个和曲线的正则性（regularity，简单来说就是曲线连续可微且切向量不为零） 有关，另一个使曲线向物体边界收缩。将这一方法和水平集方法\cite{Osher1988}结合起来，就可以自动处理拓扑变化问题。

```
@article{Osher1988,
title = {Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations},
journal = {Journal of Computational Physics},
volume = {79},
number = {1},
pages = {12-49},
year = {1988},
issn = {0021-9991},
doi = {https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90002-2},
url = {https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999188900022},
author = {Stanley Osher and James A Sethian},
}
```

在 Snake 方法和水平集方法的基础上，又出现了一个新的方法，即测地线动态轮廓方法（Geodesic Active Contour, GAC）\cite{Caselles1997}。GAC 是一种特殊的 Snake 方法，它的基本原理是利用从图像中得到的度规寻找对应的黎曼空间中的测地线，这一测地线就是图像分割问题中的物体的边界。进一步地，若假设这一测地线动态轮廓是一个三维函数的零水平集，则测地线的计算就简化为了求解和几何方法类似的偏微分方程。GAC 相比于几何方法的改进之处在于它在曲线的演化方程中增加了一个基于图像信息的速度项，因此曲线可以准确贴合到具有剧烈梯度变化的物体边界。

```
@article{Caselles1997,
author = {Caselles, Vicent and Kimmel, Ron and Sapiro, Guillermo},
title = {Geodesic Active Contours},
year = {1997},
issue_date = {Feb./March 1997},
publisher = {Kluwer Academic Publishers},
address = {USA},
```

```
volume = {22},
number = {1},
issn = {0920-5691},
url = {https://doi.org/10.1023/A:1007979827043},
doi = {10.1023/A:1007979827043},
journal = {Int. J. Comput. Vision},
month = {feb},
pages = {61–79},
numpages = {19},
}
```

为了详细讲述 GAC 方法，我们首先介绍水平集方法，然后介绍基于能量最小原理的 Snake 方法，并由此引出 GAC 方法。接着我们将水平集方法引入 GAC 方法，并展示 GAC 方法在图像分割领域的应用。

上述方法需要用图像的梯度控制曲线移动和停止，对于一些梯度不明显的物体，曲线有可能越过边界。为了解决这一问题，Chan 和 Vese 等人提出了一种基于区域的动态轮廓方法，即 C-V 方法\cite{Chan2001}，该方法摆脱了对梯度的依赖，我们将在这一章的最后部分对 C-V 方法作简要介绍。

```
@ARTICLE{Chan2001,
  author={Chan, T.F. and Vese, L.A.},
  journal={IEEE Transactions on Image Processing},
  title={Active contours without edges},
  year={2001},
  volume={10},
  number={2},
  pages={266-277},
  doi={10.1109/83.902291}}
```

水平集方法

我们首先推导水平集演化方程。

水平集演化方程

有两种常用的方式来描述平面上的一条二维曲线。第一种方式是直接该平面上用一个平面直角坐标系来描述；第二种方式是将这条曲线看作三维物体表面的一部分，然后用一个平面去截取这个三维物体，只要满足一定的条件就可以使得截面的边界恰好是我们想要的曲线。水平集方法简单来说就是利用了第二种方式来研究曲线的演化，进而用于图像分割。

假设三维物体的表面由函数 $z=\phi(x,y)$ 描述。定义满足条件

$$\{(x,y)|\phi(x,y)=c\} \tag{1}$$

的点 (x,y) 构成的集合为该曲面的 c-水平集（c-level set），也就是用平面 $z=c$ 去截取三维物体表面所得的截线。一般将我们感兴趣的曲线放置于 $x-y$ 平面上，也就是由零水平集描述的曲线

$$\{(x,y)|\phi(x,y)=0\}. \tag{2}$$

为了表示曲线的演化，我们用参数 t 来参数化零水平集曲线，即

$$\phi(x(t),y(t),t)=0. \tag{3}$$

给定一个时刻 t，求解零水平集方程，就可以得到该时刻的零水平集曲线。曲线的演化可以通过求解不同时刻的零水平集曲线来得到，因此 (3) 式也可以看作是曲线的运动方程。

对 (3) 式求 t 的全微分，令 $\vec{r}(t)=x(t)\hat{x}+y(t)\hat{y}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\nabla\phi\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\phi}{\partial t}=0, \tag{4}$$

其中用到了关系式

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}, \tag{5}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{x}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{y}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{z}. \tag{6}$$

多数情况中，我们仅仅对曲线沿着其法向的演化感兴趣。令曲线的内法向量为 $\hat{n}=-\nabla\phi/|\nabla\phi|$。曲线需要外力的作用才能够运动，定义这一使曲线运动的“外力”为 F，则曲线运动的速度可以定义为

$$\vec{v}\equiv\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-F\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}. \tag{7}$$

将速度代入 (4) 式得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=F|\nabla\phi|, \tag{8}$$

这就是最一般的水平集演化方程。这是一个偏微分方程，需要提供初始值迭代求解。使用向前微分的方法

$$\phi_{i+1}=\phi_i+\Delta tF_i|\nabla\phi_i|, \tag{9}$$

因此只要给定了曲线的初始位置以及“力”的具体形式，就可以通过 (9) 式迭代计算出最终的曲线。

图像分割的水平集方法

图像分割中，图像的边界构成我们感兴趣的曲线。根据上一小节的叙述，力 F 可以看作是曲线的运动速率，因此一个最自然的想法就是让 F 在边界以外的地方运动快，而在边界附近运动慢，最终停止在边界处。为了实现这一效果，最简单的做法是使用图像像素的梯度，即定义

$$F=g(I)=\frac{1}{1+|\nabla I|^2}, \tag{10}$$

其中 I 是输入的图像。这样，在边界以外的地方像素变化慢，$|\nabla I|$ 小， F 大，曲线运动快；在边界附近像素变化快，$|\nabla I|$ 大， F 小，曲线运动慢。

基于能量最小原理的 Snake 方法

定义一条参数化的平面曲线 $C(q):[0,1]\to\mathbb{R}^2$，定义我们想要进行分割的图像为 $I:[0,a]\times[0,b]\to\mathbb{R}^+$（该图像含有一个或多个具有明显边界且不相交的物体）。Snake 方法中曲线 C 的能量泛函定义为

$$E(C)=\alpha\int_0^1|C'(q)|^2\mathrm{d}q+\beta\int_0^1|C''(q)|^2\mathrm{d}q-\lambda\int_0^1|\nabla I(C(q))|^2\mathrm{d}q, \tag{11}$$

其中 α, β, λ 是预先选定的一组非负常数，撇号代表对参数 q 求导。这一能量的前两项控制曲线分割出的边界的光滑性，即内部能量；第三项帮助曲线尽可能地收敛到物体的边界，即外部能量。

Snake 方法就是在给定 α, β, λ 和一条初始曲线 C_0 之后，找到能够最小化能量 $E(C)$ 的曲线，这一曲线也就是分割出的物体边界。这一方法对于图像中只有一个物体的情况结果较好；当物体数目增加后，找到的曲线仅仅是一条将所有物体都包括在内的边界曲线，但是这一曲线并不会断开为多条曲线，分别框柱每个物体的边界。实际上可以证明，最终得到的曲线具有和初始曲线相同的拓扑结构，因此 Snake 方法无法用于处理具有复杂拓扑结构的图像。

Snake 方法的另一个缺点是依赖于一组预先人为选定的参数来权衡所得曲线的光滑性和对物体边界的贴合性。

在不影响结论的前提下\cite{Caselles1997}，我们考虑 $\beta = 0$ 的特殊情况，此时的能量泛函为

$$E(C) = \alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 \mathrm{d}q - \lambda \int_0^1 |\nabla I(C(q))|^2 \mathrm{d}q. \tag{12}$$

为了找到能量最小值，我们需要在保持曲线光滑性和对物体边界的贴合性的前提下寻找使得 $|\nabla I|$ 尽可能大的曲线，并把 $|\nabla I|$ 称为边界检测器（edge detector）。

将 (12) 式一般化，令 $g : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^+$ 是一个严格单调递减的正函数，满足当 $r \to +\infty$ 时 $g(r) \to 0$ 。则 $-|\nabla I|^2$ 可以替换为更一般的 $g^2(|\nabla I|)$，因此能量泛函为推广为

$$\begin{aligned} E(C) &= \alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 \mathrm{d}q + \lambda \int_0^1 g^2(|\nabla I(C(q)))\mathrm{d}q \\ &= \int_0^1 (E_{int}(C(q)) + E_{ext}(C(q)))\mathrm{d}q. \end{aligned} \tag{13}$$

只要找到使得能量泛函 (13) 式取最小值的曲线，就完成了图像分割。

基于 Snake 方法和水平集方法的测地线动态轮廓方法

测地线动态轮廓方法

这一方法的推导借助了经典力学的概念。定义势能

$$U(C) \equiv -\lambda g^2(|\nabla I(C)|). \tag{14}$$

令 $m \equiv 2\alpha$，则能量泛函可以写作

$$E(C) = \int_0^1 L(C(q))\mathrm{d}q, \tag{15}$$

其中 L 是系统的 Lagrange 量，

$$L(C) \equiv \frac{m}{2}|C'(q)|^2 - U(C). \tag{16}$$

则系统的 Hamilton 量写作

$$H(C) = \frac{p^2}{2m} + U(C), \tag{17}$$

其中动量 $p \equiv mC'(q)$。根据经典力学中的莫培督原理（Maupertuis' Principle）\cite{Landau1976}，保守场中具有 Hamilton 量 H 的运动物体的轨迹是测地线，且其作用量（是最小作用量，称为简约作用量）为

$$S_0=\int\sqrt{g_{ij}\mathrm{d}C_i\mathrm{d}C_j}=\int_0^1\sqrt{g_{ij}C_i'C_j'}\mathrm{d}q, \tag{18}$$

其中 $g_{ij}=2m(E_0-U(C))\delta_{ij}$，$\delta_{ij}$ 是 Kronecker 符号，$H=E_0$ 是物体的能量。因此寻找使得能量泛函 (13) 最小的曲线的问题就转变为在由度规 g_{ij} 定义的 Riemann 空间中寻找使得简约作用量最小的曲线（等价地，寻找该 Riemann 空间中的测地线）。

```
@book{Landau1976,
  title={Mechanics: Volume 1},
  author={Landau, L.D. and Lifshitz, E.M.},
  number={1},
  isbn={9780080503479},
  year={1976},
  edition={3},
  publisher={Elsevier Science}
}
```

接下来我们需要确定 E_0 是多少。根据定义，$E_0=E_{int}-E_{ext}$。对于一个理想的边界，应该有 $|\nabla I|\to+\infty$，根据 (13) 式有 $E_{ext}=0$；另一方面，当曲线演化到边界时也应该有 $E_{int}=0$。因此 $E_0=0$。考虑到实际问题中并不存在理想边界，我们可以放宽标准，只要满足 $E_{int}=E_{ext}$ 即可，此时仍然有 $E_0=0$。

将 $E_0=0$ 和 g_{ij} 代入 (18) 式，问题等价于寻找满足下式的曲线 $C(q)$

$$\min\left\{\int_0^1 g(|\nabla I(C(q))|)|C'(q)|\mathrm{d}q\right\}. \tag{19}$$

(19) 式可作进一步的几何解释。考虑欧式空间中曲线，其长度可以表示为

$$L\equiv\oint_C\mathrm{d}s=\oint_C|C'(q)|\mathrm{d}q. \tag{20}$$

设曲线的曲率为 κ，单位内法向量为 $\hat{n}$，容易证明，当曲线沿着 $C_t'\equiv\kappa\hat{n}$ 的方向演化时 L 减小的速率最快，即沿着梯度方向演化时曲线长度减小地最快。

作为类比，(19) 式可以看作是 Riemann 空间中的曲线的一种“加权”长度，即

$$L_R\equiv\int_0^1 g(|\nabla I(C(q))|)|C'(q)|\mathrm{d}q=\oint_C g(|\nabla I(C(q))|)\mathrm{d}s. \tag{21}$$

这一权重 $g(|\nabla I(C(q))|)$ 包含了物体边界的信息。为了最小化这一加权长度，我们需要找到曲线的梯度，用梯度下降法最小化 L_R。为此可以计算 (21) 式的 Euler-Lagrange 方程。

令初始曲线为 $C(0)=C_0$，时间演化下的曲线为 $C(t,q)$，为了简化公式，我们约定 $g\equiv g(C)\equiv g(|\nabla I(C)|)$，$C_t'\equiv C_t'(t,q)$，$C_q'\equiv C_q'(t,q)$，曲线 C 的单位切向量定义为 $\hat{\tau}\equiv\hat{\tau}(t,q)=C_q'/|C_q'|$。将 (21) 式对时间 t 求全导数有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_R(C(t))&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}|C_q'|\mathrm{d}q+\int_0^1 g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|C_q'|\mathrm{d}q\\&=\int_0^1\nabla g\cdot C_t'|C_q'|\mathrm{d}q+\int_0^1 g\hat{\tau}\cdot C_{tq}''\mathrm{d}q.\end{aligned} \tag{22}$$

对第二项使用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_R(C(t)) &= \int_0^1 \nabla g\cdot C_t'|C_q'|\mathrm{d}q + g\hat{\tau}\cdot C_t'\Big|_0^{t_{end}} - \int_0^1 C_t'\cdot(\nabla g\cdot C_q')\hat{\tau}\mathrm{d}q - \int_0^1 C_t'\cdot g\hat{\tau}_q'\mathrm{d}q \\ &= \int_0^1 \Big\{\big[\nabla g\cdot C_t' - (\nabla g\cdot\hat{\tau})(\hat{\tau}\cdot C_t')\big]|C_q'| - g\hat{\tau}_q'\cdot C_t'\Big\}\mathrm{d}q,\end{aligned} \tag{23}$$

其中用到了 $g(r)\to 0$ 当 $r\to+\infty$。用 s 表示曲线的弧长，有 $\hat{\tau}_q=\hat{\tau}_s|C_q'|$。注意到 $\mathrm{d}s=|C_q'|\mathrm{d}q$，则 (23) 式可以化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_R(C(t)) = \int_0^{L(C(t))} \big[\nabla g - (\nabla g\cdot\hat{\tau})\hat{\tau} - g\hat{\tau}_s'\big]\cdot C_t'\mathrm{d}s. \tag{24}$$

根据定义，$\hat{\tau}_s'=\kappa\hat{n}$，则 $t=0$ 时刻曲线长度对时间的导数值为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_R(C(t))\Big|_{t=0} &= \int_0^{L(C(0))} \Big\{\nabla g(C_0) - \big[\nabla g(C_0)\cdot\hat{\tau}\big]\hat{\tau} - g(C_0)\hat{\tau}_s'\Big\}\cdot C_t'(0)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{L(C(0))} \Big\{\big[\nabla g(C_0)\cdot\hat{n}\big]\hat{n} - g(C_0)\kappa\hat{n}\Big\}\cdot C_t'(0)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{25}$$

根据梯度下降法，给定 C_0 求解 $L_R(C)$ 的最小值相当于求解下列偏微分方程的初值问题

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = g(C)\kappa\hat{n} - \big[\nabla g(C)\cdot\hat{n}\big]\hat{n}. \tag{26}$$

(26) 式就是使得 L_R 最小化的曲线的演化方程，最终分割出的物体边界由 (26) 式处于稳定状态时给出，即 $C_t'=0$ 时的曲线。

引入水平集方法的测地线动态轮廓方法

上一小节我们先把寻找使得能量泛函最小的曲线的问题转化为了在由度规 g_{ij} 定义的 Riemann 空间中寻找使得简约作用量最小的曲线，进一步转化为了寻找最小化 Riemann 空间中的加权长度的曲线，并最终给出了曲线的演化方程 (26) 式。这一小节我们尝试将水平集方法和 GAC 方法结合起来。

假设曲线 C 是曲面 $z=\phi(x,y)$ 的零水平集，即 $C=\{(x,y)|\phi(x,y)=0\}$。根据 2.0 节的内容，若 $C_t'=f\hat{n}$ ，则 $\phi_t'=f|\nabla\phi|$，其中 f 是一个给定的函数。将这一结果代入 (26) 式，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= g(I)\kappa|\nabla\phi| - (\nabla g\cdot\hat{n})|\nabla\phi| \\ &= g(I)|\nabla\phi|\nabla\cdot\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) + \nabla g\cdot\nabla\phi,\end{aligned} \tag{27}$$

其中用到了 $\kappa=\nabla\cdot\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$，且将 $g(C)$ 写作 $g(I)$。因此求解曲线演化方程 (26) 式就变为求解水平集演化方程 (27) 式。

在图像分割领域的应用

直接使用 (27) 式计算收敛的速率很慢，为了加快收敛速率可以在 (27) 式的基础上再增加一个速度项 $g(I)|\nabla\phi|v$ \cite{Caselles1993}，即

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = g(I)|\nabla\phi|\nabla\cdot\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) + g(I)|\nabla\phi|v + \nabla g(I)\cdot\nabla\phi. \tag{28}$$

这就是最终使用的演化方程。(28) 式的第一项让曲线向曲率方向演化，使得图像更加光滑；第二项控制曲线移动的速率，并推动曲线向内（$v > 0$）或向外（$v < 0$）演化；第三项帮助曲线收敛到物体的边界。

```
@article{Caselles1993,
  title={A geometric model for active contours in image processing},
  author={Vicent Caselles and Francine Catt{\'e} and Tomeu Coll and Françoise Dibos},
  journal={Numerische Mathematik},
  year={1993},
  volume={66},
  pages={1-31},
}
```

实际运用前还需要预先选定 $g(I)$，根据其定义以及 (13) 式可以知道 $g(I)$ 的代表图像力，它的主要作用是让曲线停在物体边界。类似于水平集方法，$g(I)$ 可以选择为

$$g(I) = \frac{1}{1+|\nabla \hat{I}|^2}, \tag{29}$$

其中 $\hat{I}$ 是对原始图像 I 进行光滑化（例如用 Gaussian 滤波器卷积）之后的结果。

我们将在第三章展示使用 (28) 式作图像分割的结果。

图像分割的 Chan-Vese 方法

之前的方法都用图像的梯度控制曲线移动和停止，对于一些梯度不明显的物体，曲线有可能越过边界，这类方法可以称为基于边缘的动态轮廓方法\cite{Hamza2022}。为了摆脱对梯度的依赖，Chan 和 Vese 等人提出了一种基于区域的动态轮廓方法，即 C-V 方法。这一方法本质是利用曲线内部像素和外部像素的差作为动力驱动曲线演化。

```
@INPROCEEDINGS{Hamza2022,
  author={Zia, Hamza and Niaz, Asim and Choi, Kwang Nam},
  booktitle={2022 Asia Conference on Advanced Robotics, Automation, and Control Engineering (ARACE)},
  title={Active Contour Model for Image Segmentation},
  year={2022},
  volume={},
  number={},
  pages={13-17},
  keywords={Deep learning;Image segmentation;Control engineering;Computational modeling;Level set;Force;Fitting;Level set;image segmentation;Active contour model;Bias-correction},
  doi={10.1109/ARACE56528.2022.00011}}

```

令 C 是图像 Ω 上的一条闭曲线，ω 是这条曲线所圈出的区域，即 $C = \partial\omega$，用 $inside(C)$ 表示区域 ω，$outside(C)$ 表示余下的区域 $\bar{\omega}$，$u_0 = u_0(x, y)$ 为图像各点的像素值，c_1 表示曲线 C 内的平均像素值，c_2 表示曲线 C 外的平均像素值。

为了直观地描述 C-V 方法，我们考虑一种简单的情况。假设图像由均匀的两部分组成，其中一部分的平均像素值为 u_0^i，另一部分的平均像素值为 u_0^o，并假设我们想要分割的物体是 u_0^i 所代表的区域，其边界为 C_0。定义如下的能量泛函

$$E_1(C)+E_2(C)=\iint_{inside(C)}|u_0(x,y)-c_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{outside(C)}|u_0(x,y)-c_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{30}$$

显然当且仅当 $C=C_0$，即曲线 C 演化到物体边界时，这一能量取最小值

$$\min_C\{E_1(C)+E_2(C)\}=E_1(C_0)+E_2(C_0)=0. \tag{31}$$

在添加一些正则项之后，可以得到 C-V 方法实际使用的能量泛函

$$\begin{aligned}E(c_1,c_2,C)=\mu\cdot\mathrm{Length}(C)+\nu\cdot\mathrm{Area}(inside(C))\\+\lambda_1\iint_{inside(C)}|u_0(x,y)-c_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\+\lambda_2\iint_{inside(C)}|u_0(x,y)-c_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{32}$$

其中第一项代表曲线长度引入的正则项，第二项代表曲线内的面积引入的正则项，参数 $\mu\ge 0$，$\nu\ge 0$，$\lambda_1,\lambda_2>0$。

类似地，我们可以引入水平集方法来解决这一最小化问题。定义水平集函数 $\phi(x,y)$ 如下

$$\begin{cases}C & =\partial\omega & =\{(x,y)|(x,y)\in\Omega,\phi(x,y)=0\}\\ inside(C) & =\omega & =\{(x,y)|(x,y)\in\Omega,\phi(x,y)>0\}\\ outside(C) & =\bar{\omega} & =\{(x,y)|(x,y)\in\Omega,\phi(x,y)<0\}.\end{cases} \tag{33}$$

为了描述曲线长度和曲线内的面积，引入 Heaviside 函数 $H(z)$ 和 Dirac delta 函数 $\delta(z)$，

$$H(z)\equiv\begin{cases}1, & z\ge 0\\ 0, & z<0,\end{cases} \tag{34}$$

$$\delta(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}H(z). \tag{35}$$

则曲线长度为

$$\begin{aligned}\mathrm{Length}(C)=\mathrm{Length}(C)\Big|_{\phi=0}&=\iint_\Omega|\nabla H(\phi(x,y))|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_\Omega\delta(\phi(x,y))|\nabla\phi(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{36}$$

曲线内的面积为

$$\mathrm{Area}(C)=\mathrm{Area}(C)\Big|_{\phi>0}=\iint_\Omega H(\phi(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{37}$$

因此 (32) 式可以改写为

$$
\begin{aligned}
E(c_1, c_2, \phi) = \mu & \iint_\Omega \delta(\phi(x,y))|\nabla\phi(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
& + \nu \iint_\Omega H(\phi(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
& + \lambda_1 \iint_\Omega |u_0(x,y) - c_1|^2 H(\phi(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
& + \lambda_2 \iint_\Omega |u_0(x,y) - c_2|^2 (1 - H(\phi(x,y)))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{38}
$$

(38) 式分别对 c_1 和 c_2 求偏导数，得到二者的计算公式

$$
c_1(\phi) = \frac{\iint_\Omega u_0(x,y)H(\phi(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_\Omega H(\phi(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \tag{39}
$$

$$
c_2(\phi) = \frac{\iint_\Omega u_0(x,y)(1 - H(\phi(x,y)))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_\Omega (1 - H(\phi(x,y)))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{40}
$$

可以看出，二者确实代表曲线 C 内外的平均像素值。

实际上并不存在 δ 函数，因此在计算机中我们需要用一个有限的函数去趋近它，定义为

$$
H_\epsilon(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{z}{\epsilon})\right), \tag{41}
$$

$$
\delta_\epsilon = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} H_\epsilon(z). \tag{42}
$$

类似地使用梯度下降法，可以得到最终的水平集演化方程

$$
\frac{\partial\phi}{\partial t} = \delta_\epsilon(\phi)\left[\mu\nabla\cdot(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}) - \nu - \lambda_1(u_0 - c_1)^2 + \lambda_2(u_0 - c_2)^2\right]. \tag{43}
$$

只需要给定参数 $\mu, \nu, \lambda_1, \lambda_2$，然后求解该偏微分方程，直到获得稳定解，就可以得到所希望的物体边界。本文的实验均取 $\nu = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\mu$ 在不同实验中有所不同，具体结果将在下一章展示。

实验结果

总结

参考文献

附录

具体分工

源代码