$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln(e^{-x}+e^{x})\,e^{-\alpha x^2}dx$$

① α 大 $\Rightarrow$

$$I\simeq\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(1-x+\frac{x^2}{2}+1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-\alpha x^2}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln(2+x^2)\,e^{-\alpha x^2}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\ln 2+\frac{x^2}{2}\right)e^{-\alpha x^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,(1+4\alpha\ln 2)}{4\alpha^{3/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}+\ln 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

② $\alpha\to 0$, 主要由 $\ln(e^{x}+e^{-x})$ 决定.

$$I=2\int_{0}^{+\infty}\ln(e^{x}+e^{-x})\,e^{-\alpha x^2}dx$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}x\,e^{-\alpha x^2}dx+2\int_{0}^{+\infty}[\ln(e^{x}+e^{-x})-x]\,e^{-\alpha x^2}dx$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2\int_{0}^{+\infty}[\ln(1+e^{-2x})-1]\,e^{-\alpha x^2}dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}+2\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-2x}-\frac{e^{-4x}}{2}+\frac{e^{-6x}}{3}+\cdots\right)\left(1-\alpha x^2+\frac{\alpha^2}{2}x^4\right)dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-2nx}}{n}(-1)^n\,dx$$

$$+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-2nx}}{n}(-1)^n\,x^2\,dx$$

$$-\alpha^2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-2nx}}{n}(-1)^n\,x^4\,dx$$

可用 mathematica 求解.

$$= \frac{1}{\alpha} + \underbrace{\frac{\pi^2}{12}}_{\to 0.822} - \underbrace{\frac{7\pi^4}{1440}}_{\to 0.47}\alpha + \underbrace{\frac{31\pi^6}{40320}}_{\to 0.73}\alpha^2$$

$$- \underbrace{\frac{127\pi^8}{645120}}_{1.86}\alpha^3 + \underbrace{\frac{511\pi^{10}}{7299072}}_{6.5562}\alpha^4$$