

4. 设在  $Oxy$  平面上  $f(x, y)$  连续可微, 给定方程组

$$\frac{dx}{dt} = y - xf(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x - yf(x, y),$$

证明若在原点的某邻域内有  $f(x, y) > 0$ , 则零解渐近稳定, 若有  $f(x, y) < 0$ , 则零解不稳定.

5. 设  $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ ,  $P(x, y), Q(x, y)$  连续可微, 且存在  $\alpha, \beta$ , 使得在  $Oxy$  平面上原点的某邻域内除去原点外有

$$\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) > 0.$$

证明方程组

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

的零解不稳定.

6. 设函数  $g(x)$  连续可微,  $g(0) = 0$  且当  $x \neq 0$  时有  $xg(x) > 0$ . 证明方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = 0$$

的零解是稳定的, 但不是渐近稳定的.

7. 设  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  都是正数,  $\beta\gamma - \alpha\delta < 0$ , 函数  $f(y)$  连续可微,  $f(0) = 0$  且当  $y \neq 0$  时有  $yf(y) > 0$ . 利用形如

$$V = \frac{1}{2}Ax^2 + B \int_0^y f(u) du$$

的 Lyapunov 函数讨论方程组

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta f(y), \quad \frac{dy}{dt} = \gamma x - \delta f(y)$$

的零解的稳定性.

8. 给定方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (6.30)$$

若存在定正函数  $V(x)$ , 其通过方程组 (6.30) 的导数  $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.30)}$  为常负函数, 但使  $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.30)} = 0$  的点  $x$  的集合中除 (6.30) 的零解外不包含 (6.30) 的整条正半轨, 证明方程组 (6.30) 的零解是渐近稳定的.

## § 6.4 平面平衡点分析

前面我们研究了系统的零解的稳定性. 零解实质上是系统在相空间上的一个平衡点  $O$ , 而仅仅弄清平衡点的稳定性是不够的. 即使我们知道平衡点  $O$  是渐近稳定的, 我们还应该知道  $O$  点周围的轨道是否以某个固定方向逼近  $O$  点. 如果平衡点  $O$  是不稳定的, 在  $O$  附近或许所有轨道都远离  $O$  而去, 或许还存在逼

近  $O$  点的轨道. 我们怎样才能获得  $O$  点附近轨道的“走法”呢? 此外, 即使知道平衡点  $O$  的稳定性, 有的系统无论被怎样的微小改变都不改变  $O$  点的稳定性 (甚至  $O$  点附近轨道的“走法”), 有的系统却容易改变. 我们怎样去鉴别它们呢? 这些关于平衡点  $O$  附近轨道的“走法”包括  $O$  点的稳定性在内的性质即是本节要讨论的平衡点的定性性质.

在本节我们讨论平面自治系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad (6.31)$$

这里  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  为连续函数并对  $x$  和  $y$  具有二阶连续偏导数, 则系统 (6.31) 满足解的存在唯一性条件. 在系统 (6.31) 中, 如果  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  不同时为零, 则可消去自变量  $t$ . 比如若  $X(x, y) \neq 0$ , 则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \quad (6.32)$$

若  $Y(x, y) \neq 0$ , 则有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{X(x, y)}{Y(x, y)}. \quad (6.33)$$

(6.32) 和 (6.33) 分别为一阶微分方程, 满足解的存在唯一性条件和解对初值的连续性条件, 其解所确定的积分曲线即为系统 (6.31) 的轨道. 这时过相平面上每一点都有且仅有一条轨道通过. 因此对相平面上一点  $(x_0, y_0)$ , 如果  $X(x_0, y_0)$  和  $Y(x_0, y_0)$  不同时为零, 其附近的轨道结构是简单的: 在  $(x_0, y_0)$  的某一个邻域内, 系统 (6.31) 的轨道为一族不相交的曲线. 我们称这样的点为常点.

因此在研究相图的局部结构时问题就集中在系统 (6.31) 的平衡点附近, 这些平衡点由方程组

$$X(x, y) = 0, \quad Y(x, y) = 0 \quad (6.34)$$

决定. 一个动力系统可能有多个平衡点. 我们可分别将它们平移到原点  $O$ , 然后讨论一个等价系统在原点  $O$  附近的定性性质. 因此不失一般性, 下面设平衡点在原点.

若  $Oxy$  平面上的原点是系统 (6.31) 的平衡点, 则可将 (6.31) 右端进行 Taylor 展开并写成如下形式:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + R_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + R_2(x, y), \quad (6.35)$$

其中  $R_j(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $j = 1, 2$ , 称为高次项. 同前面讨论稳定性一样, 我们问: (6.35) 在原点附近的轨道结构是否和其线性部分

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy \quad (6.36)$$

在原点附近的轨道结构相似呢? 在回答这个问题之前, 我们首先要学会分析线性系统(6.36)的平衡点的定性性质.

用  $A$  表示(6.36)右端的系数矩阵. 首先考虑矩阵  $A$  非退化的情形, 即  $\det A \neq 0$ , 这时  $A$  在复数域  $\mathbb{C}$  有两个非零特征根  $\lambda_1, \lambda_2$ . 由线性代数中的 Jordan 标准形理论, 存在非奇异的线性变换  $P$ , 通过线性变换  $(u, v)^T = P(x, y)^T$  把系统(6.36)化成

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = PAP^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

其中  $J := PAP^{-1}$  是下面三种形式之一:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

其中  $\lambda, \mu, \alpha, \beta$  为实数,  $\lambda, \mu, \beta$  均非零. 这里第一、二种形式对应于矩阵  $A$  仅有实特征根的情形, 第三种形式相应于矩阵  $A$  具有一对共轭复根  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  的情形.

事实上, 所求线性变换可按下述方法给出: 首先注意到当  $b=c=0$  时方程组(6.36)已为第一种形式的标准形, 因此下面设  $b, c$  不同时为 0, 这时可分三种情况讨论:

(i) 若特征根  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \mu$  为相异实根, 当  $b \neq 0$  或  $c \neq 0$  时分别用线性变换

$$u = (d - \lambda_1)x - by, \quad v = (d - \lambda_2)x - by,$$

或

$$u = -cx + (a - \lambda_1)y, \quad v = -cx + (a - \lambda_2)y,$$

可将方程组(6.36)化为第一种形式的标准形.

(ii) 若特征根  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  为相同实根, 当  $b \neq 0$  或  $c \neq 0$  时分别用线性变换

$$u = (\lambda - d)x + by, \quad v = x,$$

或

$$u = cx + (\lambda - a)y, \quad v = y,$$

可将方程组(6.36)化为第二种形式的标准形.

(iii) 若特征根  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$  为共轭复根, 设  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ), 则用线性变换

$$u = -cx + (a - \alpha)y, \quad v = \beta y,$$

或

$$u = (d - \alpha)x - by, \quad v = \beta x,$$

均可将方程组(6.36)化为第三种形式标准形.

读者应注意将方程组(6.36)化为标准形式(6.37)的线性变换并不是唯一的.

显然,可逆线性变换(6.37)不改变平衡点的位置和相图结构,因此我们仅讨论由上述三种标准矩阵定义的系统.

对第一种形式的矩阵  $A$ ,可分为三种情况讨论:

- (I.1)  $\lambda = \mu$ ;
- (I.2)  $\lambda \neq \mu$  且  $\lambda\mu > 0$ ;
- (I.3)  $\lambda \neq \mu$  且  $\lambda\mu < 0$ .

在情况(I.1),方程组(6.36)可化成

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \frac{dv}{dt} = \lambda v,$$

其解为  $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ ,  $v(t) = v_0 e^{\lambda t}$ , 其中  $u_0, v_0$  为任意常数. 易见,当  $\lambda < 0$  时轨道方向将趋向平衡点  $O$ , 系统(6.36)的零解是渐近稳定的; 当  $\lambda > 0$  时, 轨道方向将远离平衡点  $O$ , 系统(6.36)的零解是不稳定的. 进而,  $\frac{u}{v} = \frac{u_0}{v_0}$ , 这表明平衡点附近的轨道都是过  $O$  点的直线. 因此  $O$  点附近的轨道当  $\lambda < 0$  时是射向原点  $O$  的直线束, 当  $\lambda > 0$  时是从原点  $O$  射向四面八方的直线束. 这样的平衡点称为**星形结点**(或**临界结点**), 见图 6.10 及图 6.11.

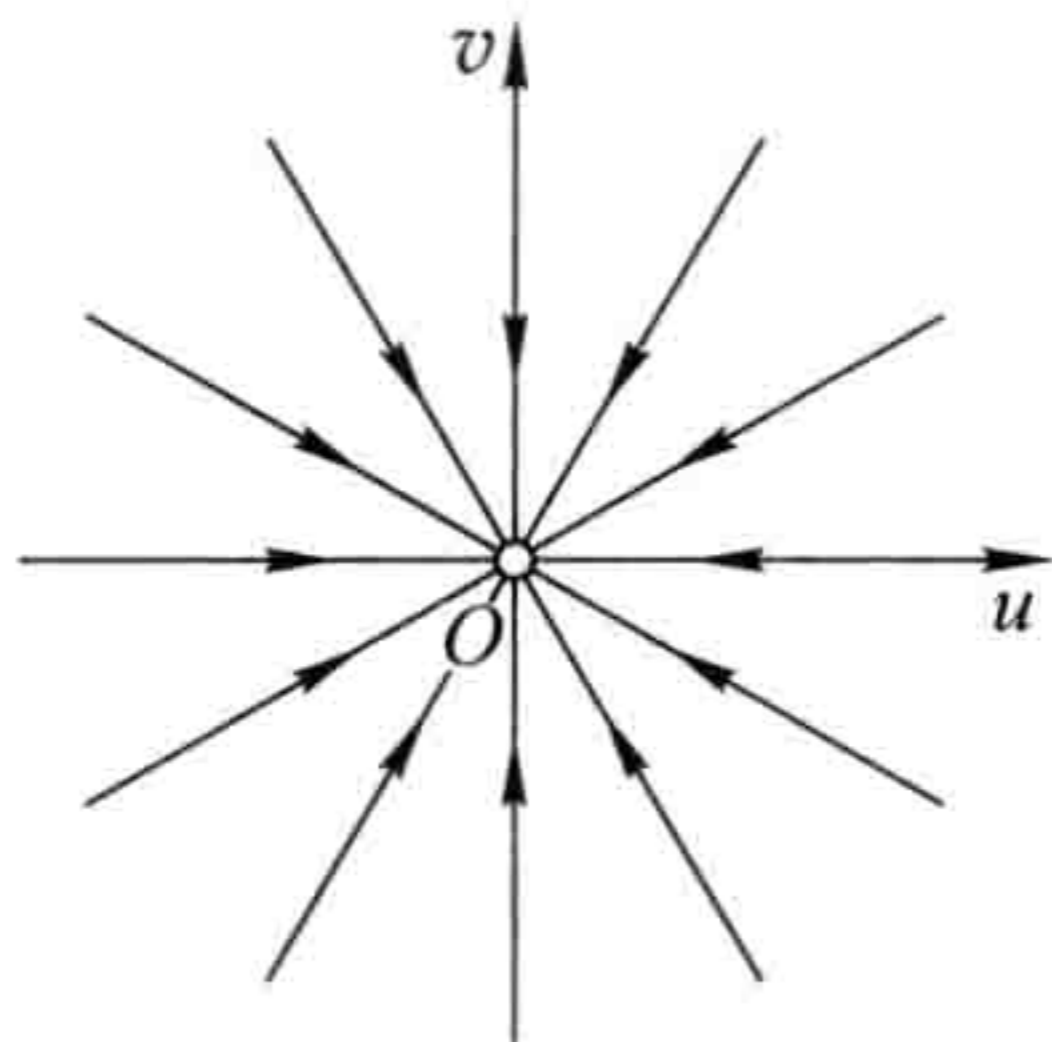


图 6.10 稳定的星形结点( $\lambda < 0$ )

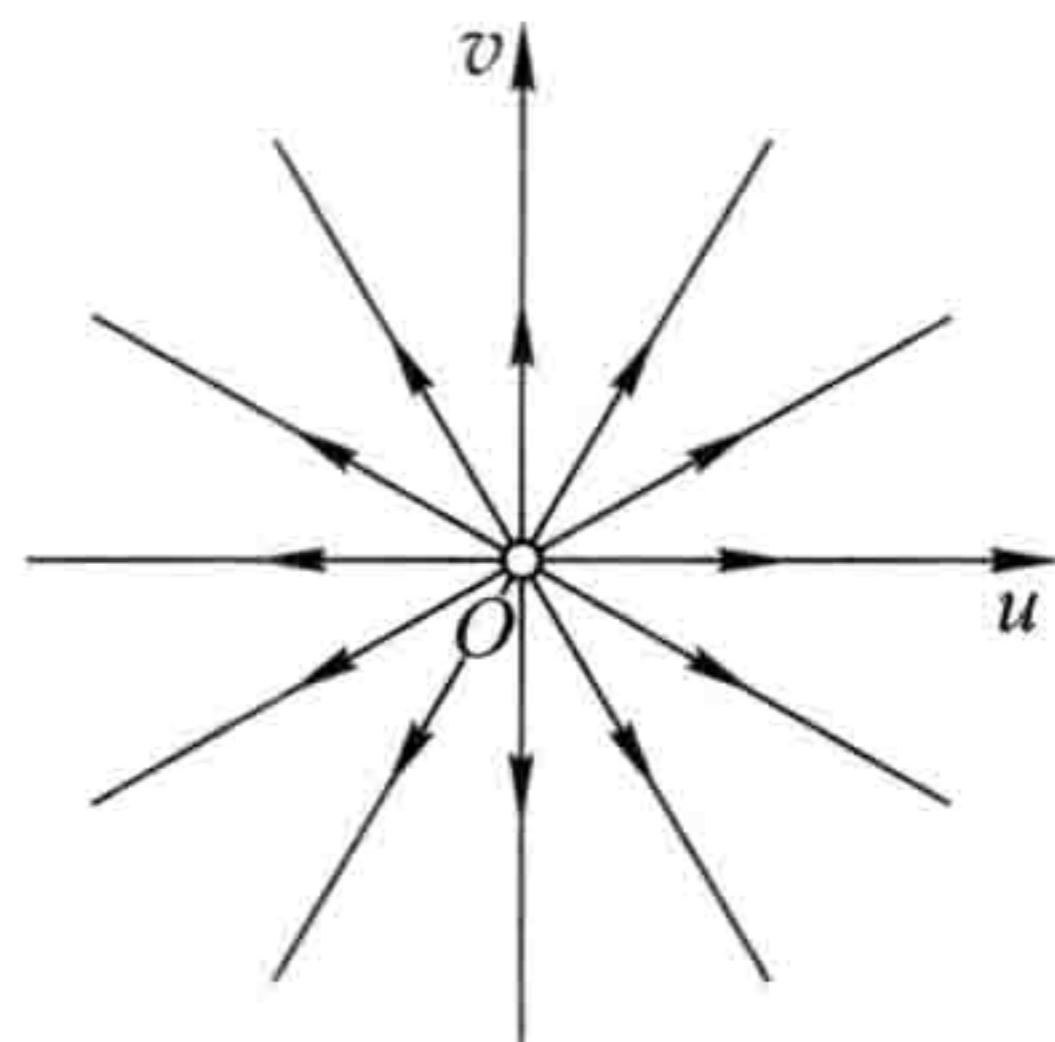


图 6.11 不稳定的星形结点( $\lambda > 0$ )

在情况(I.2), 方程组(6.36)可化成

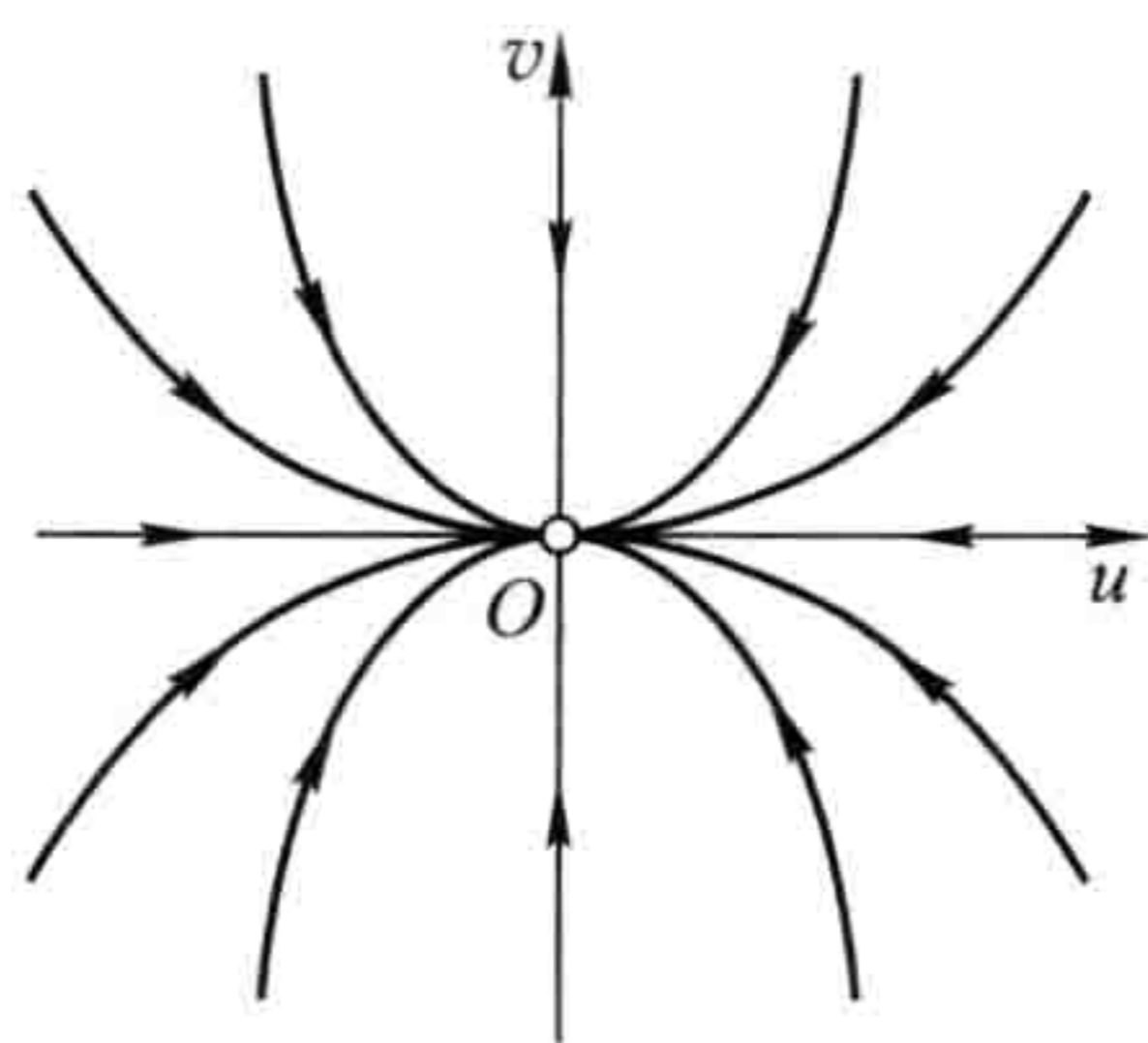
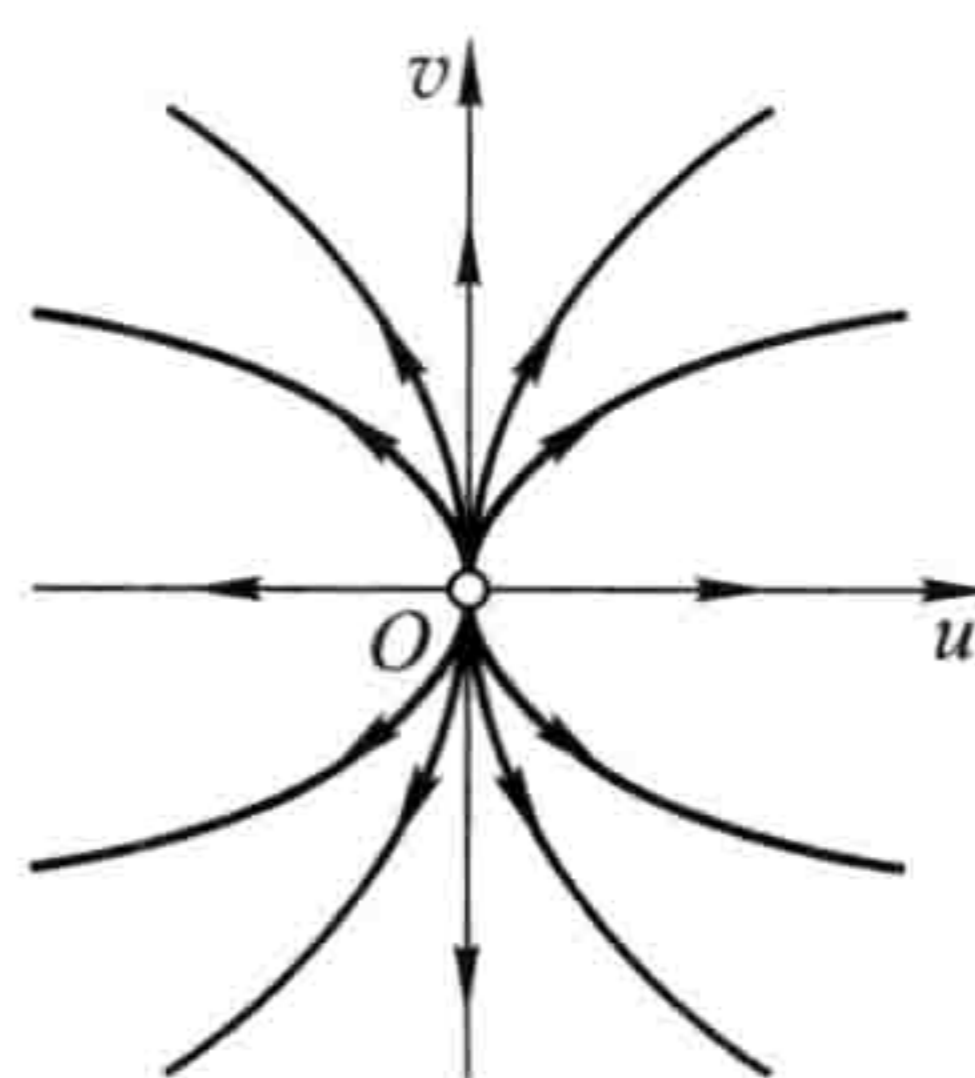
$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \frac{dv}{dt} = \mu v. \quad (6.38)$$

同理可以得到通解  $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ ,  $v(t) = v_0 e^{\mu t}$ , 同样知道原点  $O$  的稳定性: 当  $\lambda < 0$ ,  $\mu < 0$  时渐近稳定, 当  $\lambda > 0, \mu > 0$  时不稳定. 与情况(I.1)类似, 可以知道  $|u|^\mu / |v|^\lambda$

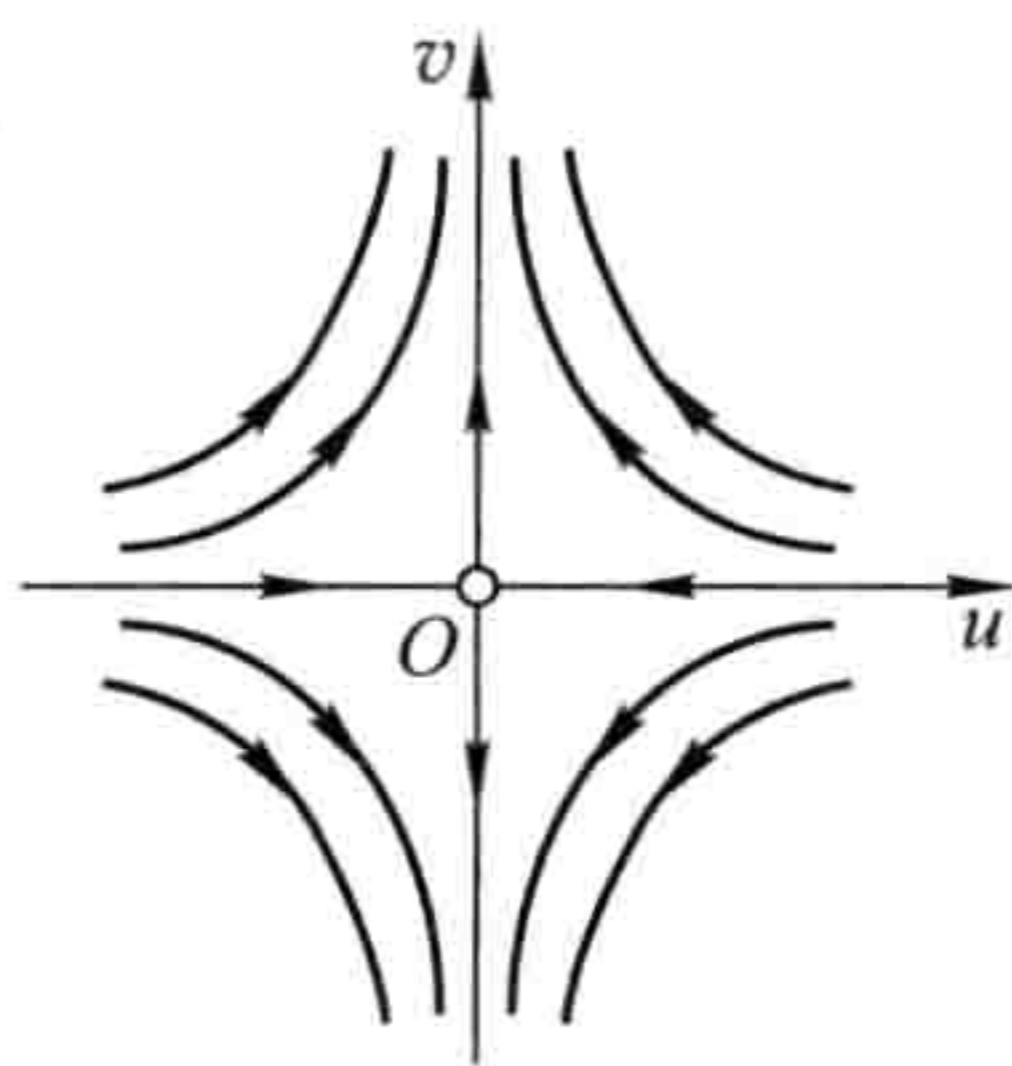
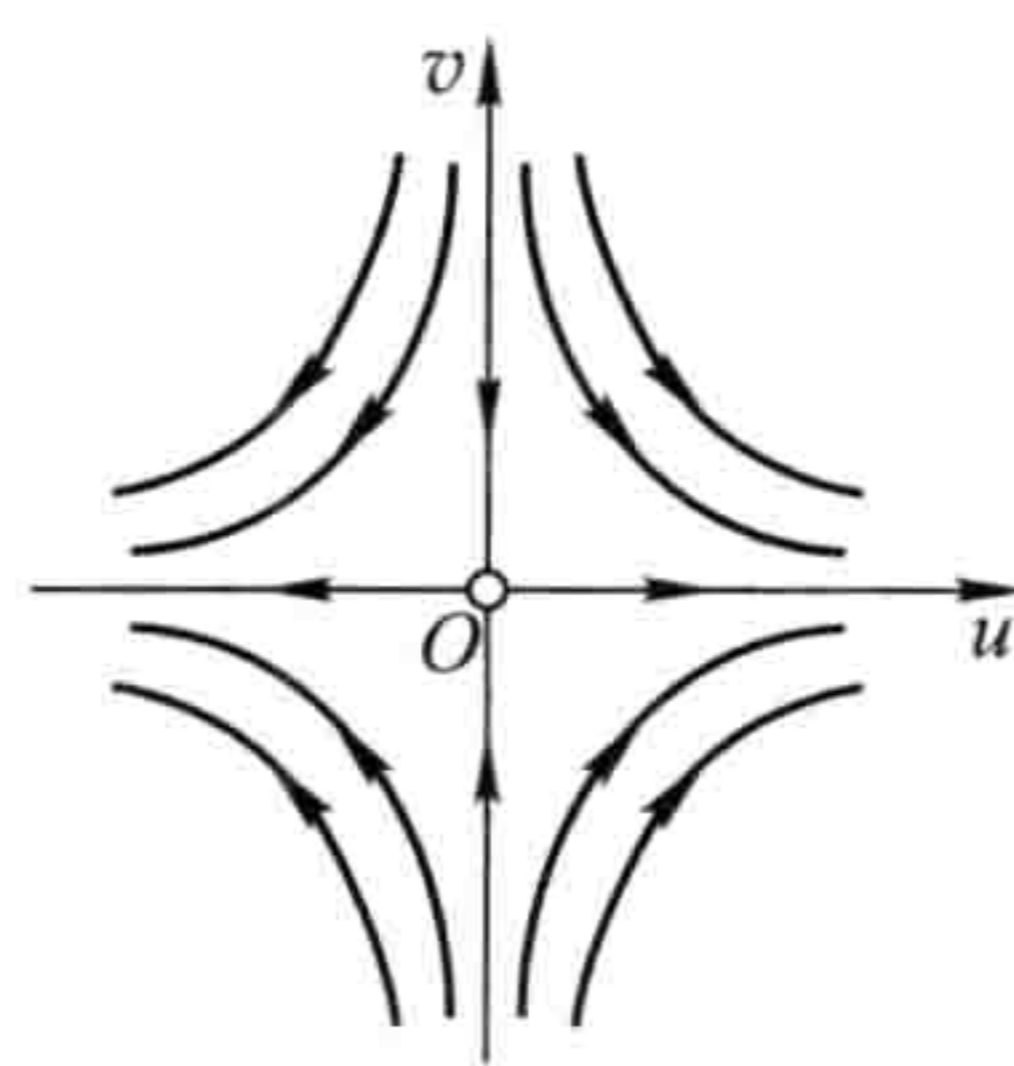
等于某个常数. 这也可以直接从上述方程组相应的轨道的微分方程看出. 当  $u \neq 0$  时, 该方程组的轨道满足微分方程

$$\frac{dv}{du} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{v}{u}, \quad (6.39)$$

从(6.39)中解得  $v = C|u|^{\mu/\lambda}$ , 其中  $C$  是任意常数. 因此在  $Ouv$  平面上(除坐标轴外)轨道作为幂函数曲线形成了一族以原点  $O$  为顶点的“抛物线”. 尤其是, 当  $|\lambda| < |\mu|$  时这个“抛物线”族与  $u$  轴相切于  $O$  点; 当  $|\mu| < |\lambda|$  时这个“抛物线”族与  $v$  轴相切于  $O$  点. 易见  $v$  轴(即  $u=0$ )的正半轴和负半轴也分别是方程组的轨道. 这样的平衡点称为**两向结点**(或**正常结点**), 见图 6.12 及图 6.13.

图 6.12 稳定的两向结点( $\mu < \lambda < 0$ )图 6.13 不稳定的两向结点( $\lambda > \mu > 0$ )

在情况(I.3), 同样根据(6.38)或(6.39)的通解可以知道原点  $O$  总是不稳定的, 而且在  $uv$  平面上(除坐标轴外)轨道形成了一族以两个坐标轴为渐近线的“双曲线”. 尤其是, 当  $\lambda < 0, \mu > 0$  时这个“双曲线”族相应于  $t \rightarrow +\infty$  渐近于  $v$  轴; 当  $\lambda > 0, \mu < 0$  时这个“双曲线”族相应于  $t \rightarrow +\infty$  渐近于  $u$  轴. 这样的平衡点称为**鞍点**, 见图 6.14 及图 6.15.

图 6.14 鞍点( $\lambda < 0, \mu > 0$ )图 6.15 鞍点( $\lambda > 0, \mu < 0$ )

第二种形式的矩阵  $A$  具有一个二重实根且 Jordan 块是二阶的. 为方便起见, 我们把这一情形称为情形(II). 从方程的通解容易看出: 平衡点  $O$  当  $\lambda < 0$  时渐近稳定, 当  $\lambda > 0$  时不稳定. 当  $u \neq 0$  时, 考虑轨道相应的微分方程

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{u}v. \quad (6.40)$$

用常数变易公式得到通解为

$$v = Cu + \frac{u}{\lambda} \ln |u|,$$

其中  $C$  是任意常数. 因此,  $\lim_{u \rightarrow 0} v = 0$ , 即平衡点附近的轨道当  $\lambda < 0$  时逼近原点而当  $\lambda > 0$  时离  $O$  而去. 另一方面,  $v$  轴 (即  $u = 0$ ) 的正半轴和负半轴本身也分别是轨道. 将这个通解代入 (6.40) 得到

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{dv}{du} &= \frac{1}{\lambda} + C + \frac{1}{\lambda} \lim_{u \rightarrow 0} \ln |u| \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{当 } \lambda < 0, \\ -\infty, & \text{当 } \lambda > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.41)$$

因此, 平衡点  $O$  附近的轨道与  $v$  轴相切于  $O$  点. 这样的平衡点称为单向结点 (或退化结点), 见图 6.16 及图 6.17.

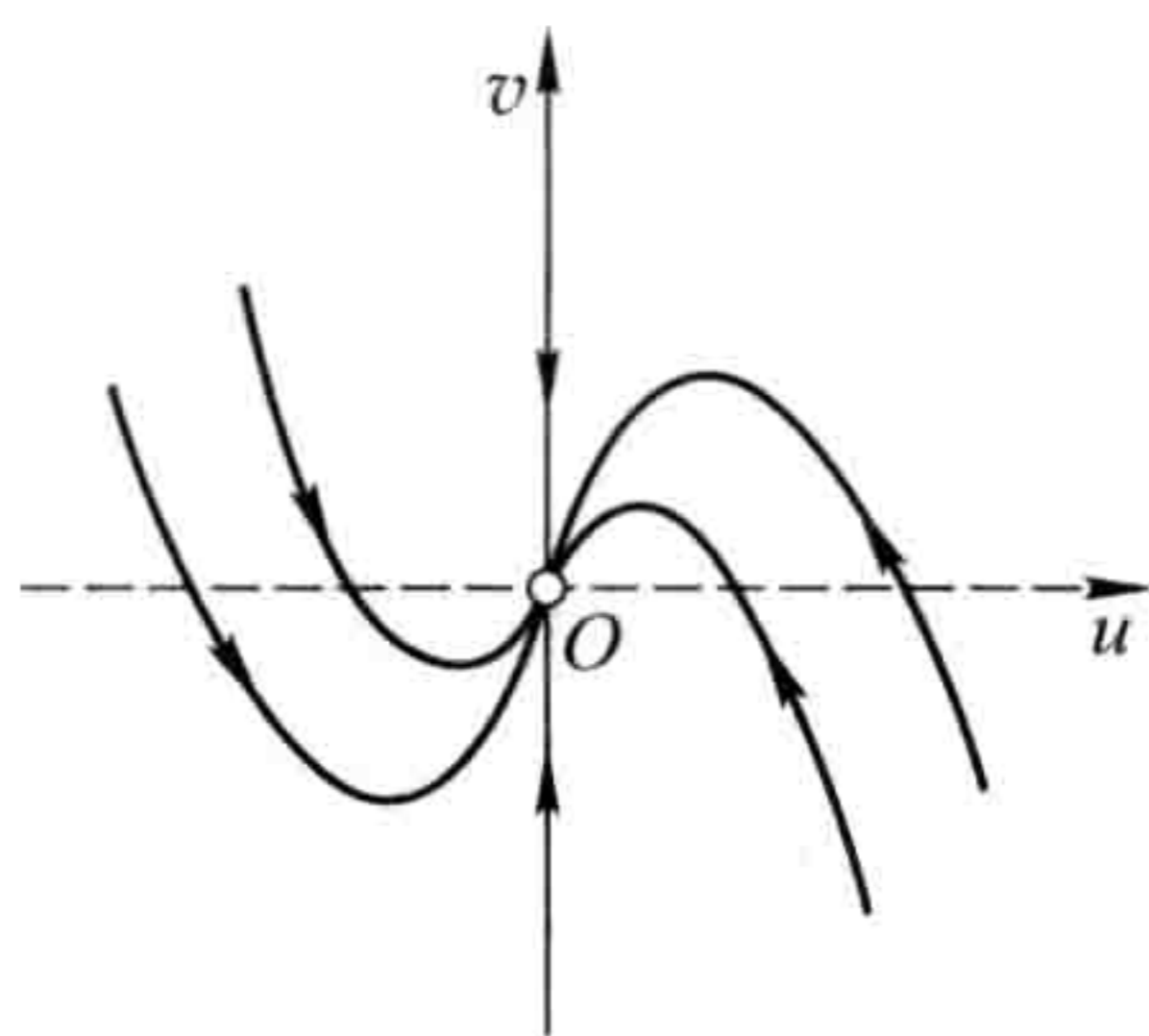


图 6.16 稳定的单向结点 ( $\lambda < 0$ )

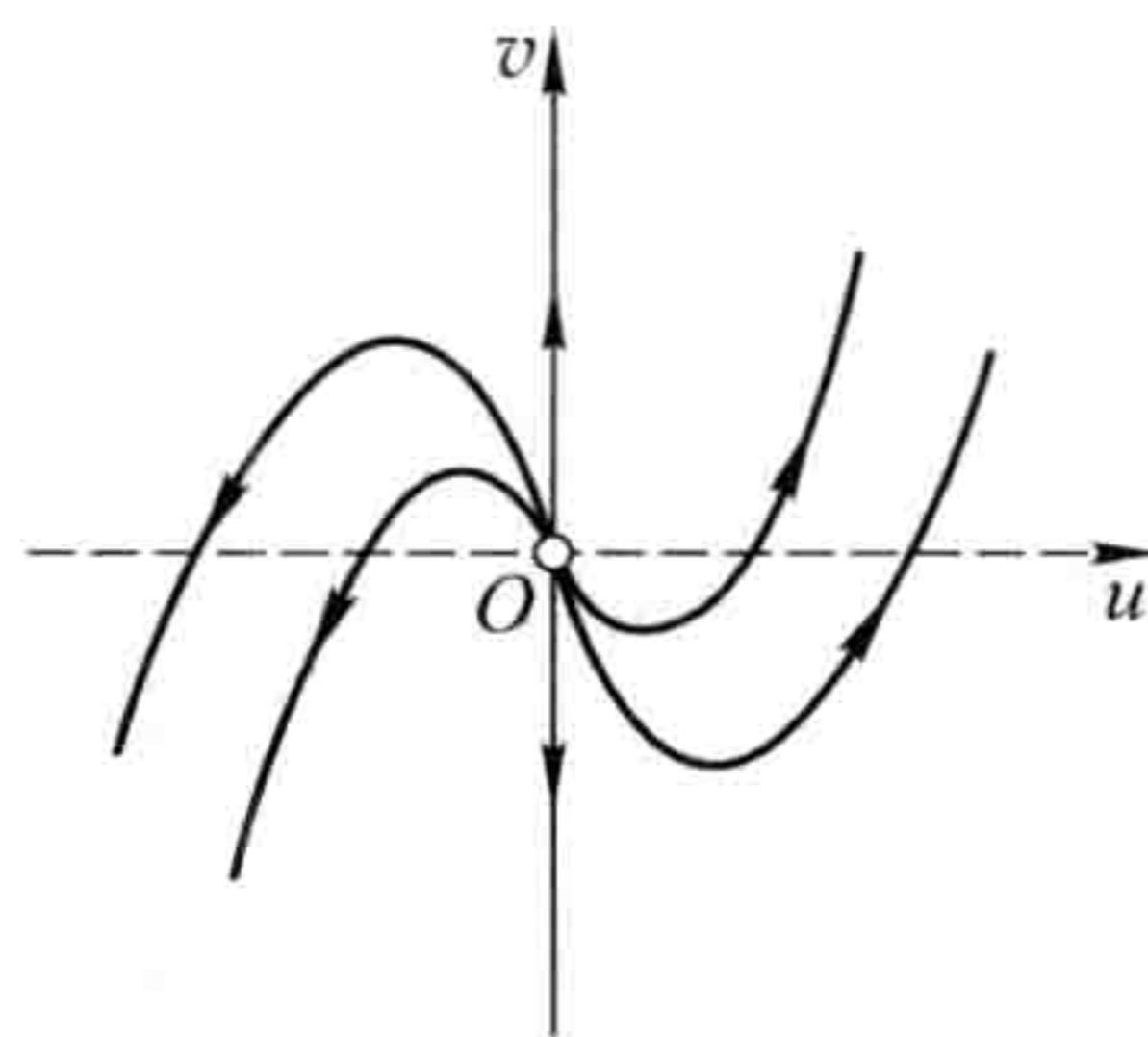


图 6.17 不稳定的单向结点 ( $\lambda > 0$ )

第三种形式的矩阵  $A$  有一对共轭复根  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  且  $\beta \neq 0$ . 取极坐标  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$ , 利用计算导数的公式

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \\ \dot{v} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dot{r} = \dot{u} \cos \theta + \dot{v} \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{-\dot{u} \sin \theta + \dot{v} \cos \theta}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \end{cases}$$

方程组可以化为

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\beta. \quad (6.42)$$

从中解得

$$r(t) = \rho_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = -\beta t + \delta, \quad (6.43)$$

其中  $\rho_0, \delta$  为任意常数. 因此平衡点  $O$  附近的轨道是

$$r(\theta) = [\rho_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}\delta}] e^{-\frac{\alpha}{\beta}\theta}. \quad (6.44)$$

这时分为两种情形: (III.1)  $\alpha \neq 0$  和 (III.2)  $\alpha = 0$ .

在情形 (III.1), 由 (6.44) 知平衡点  $O$  附近的轨道是一族螺线. 由 (6.43) 知, 当  $\alpha < 0$  时平衡点  $O$  渐近稳定, 当  $\alpha > 0$  时平衡点  $O$  不稳定. 当  $\beta > 0$  时螺线顺时针盘旋, 当  $\beta < 0$  时螺线逆时针盘旋. 这样的平衡点称为焦点, 见图 6.18 及图 6.19.

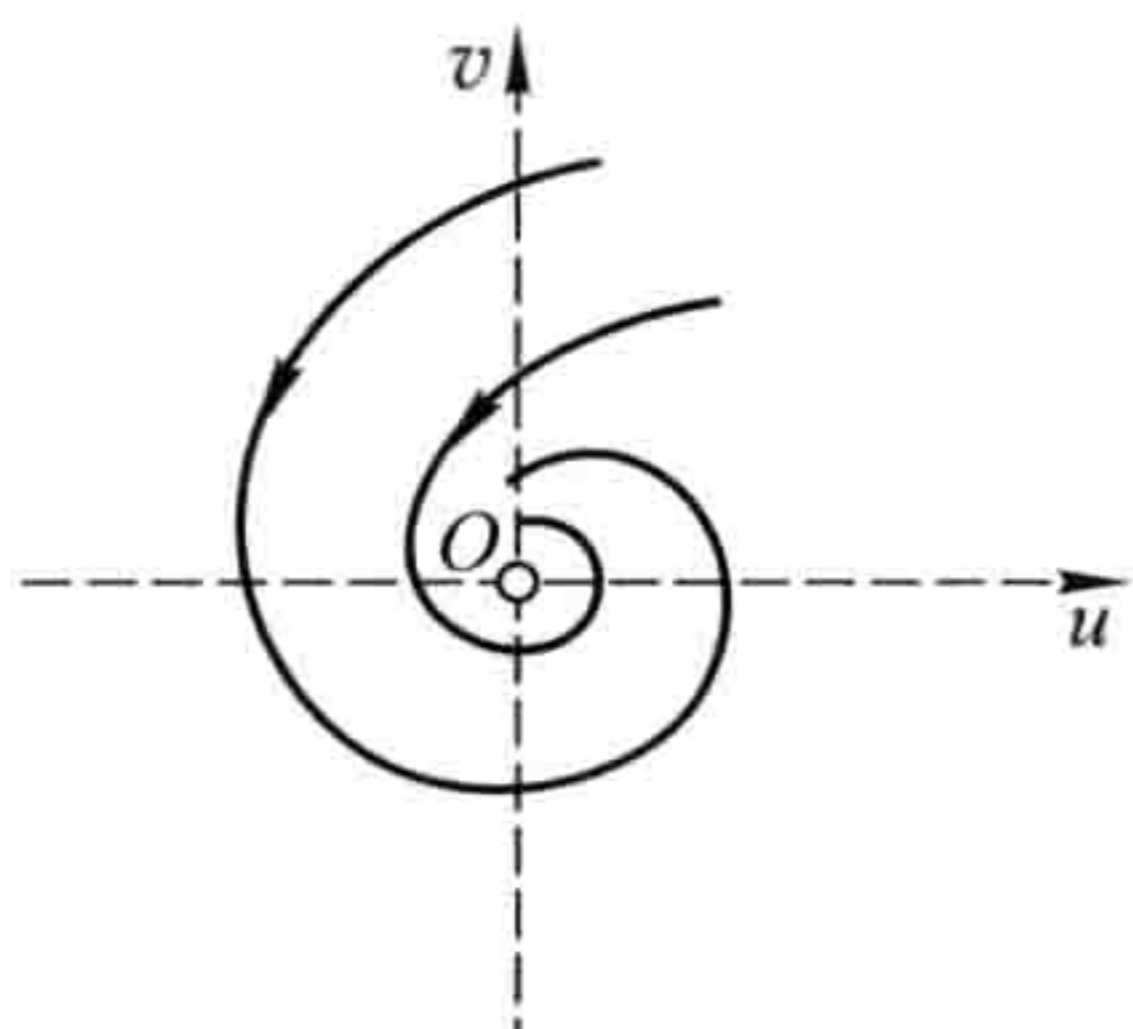


图 6.18 稳定的焦点 ( $\alpha < 0, \beta < 0$ )

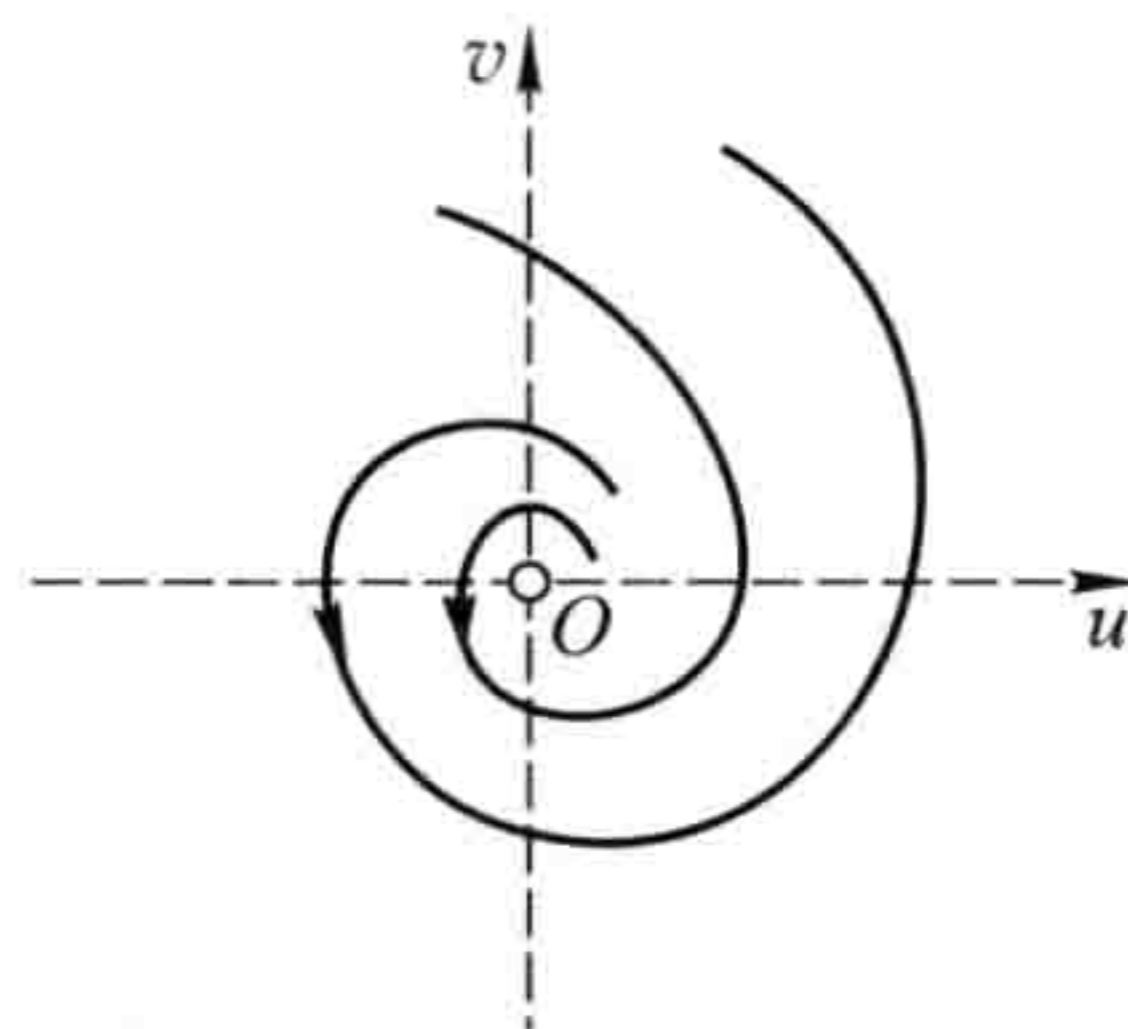


图 6.19 不稳定的焦点 ( $\alpha > 0, \beta < 0$ )

在情形 (III.2), 由 (6.44) 知  $r(t) \equiv \rho_0$ , 因此平衡点  $O$  附近的轨道是一族同心圆. 这时平衡点  $O$  是稳定的但不渐近稳定. 这样的平衡点称为中心, 见图 6.20 及图 6.21.

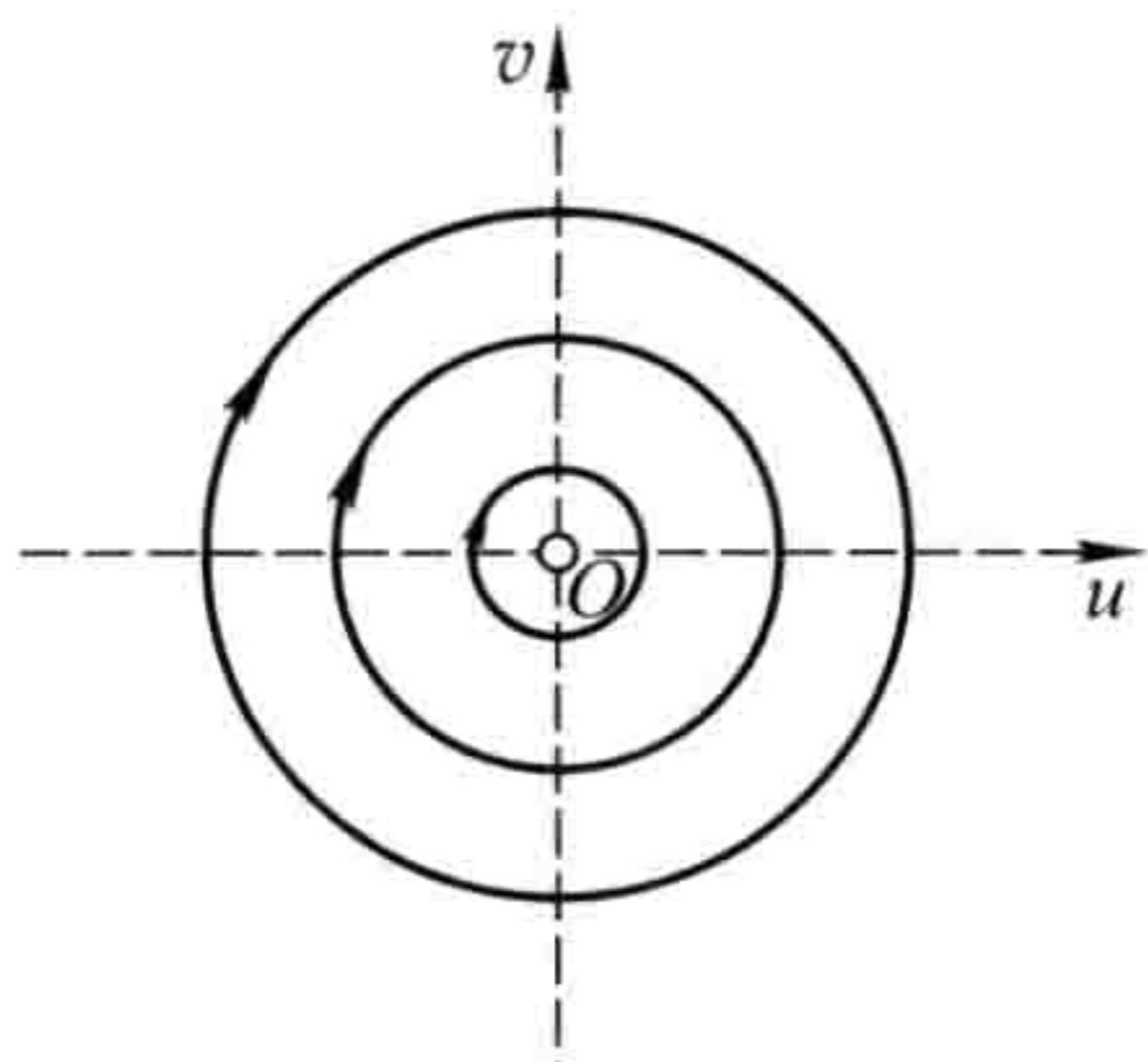


图 6.20 中心 ( $\alpha = 0, \beta > 0$ )

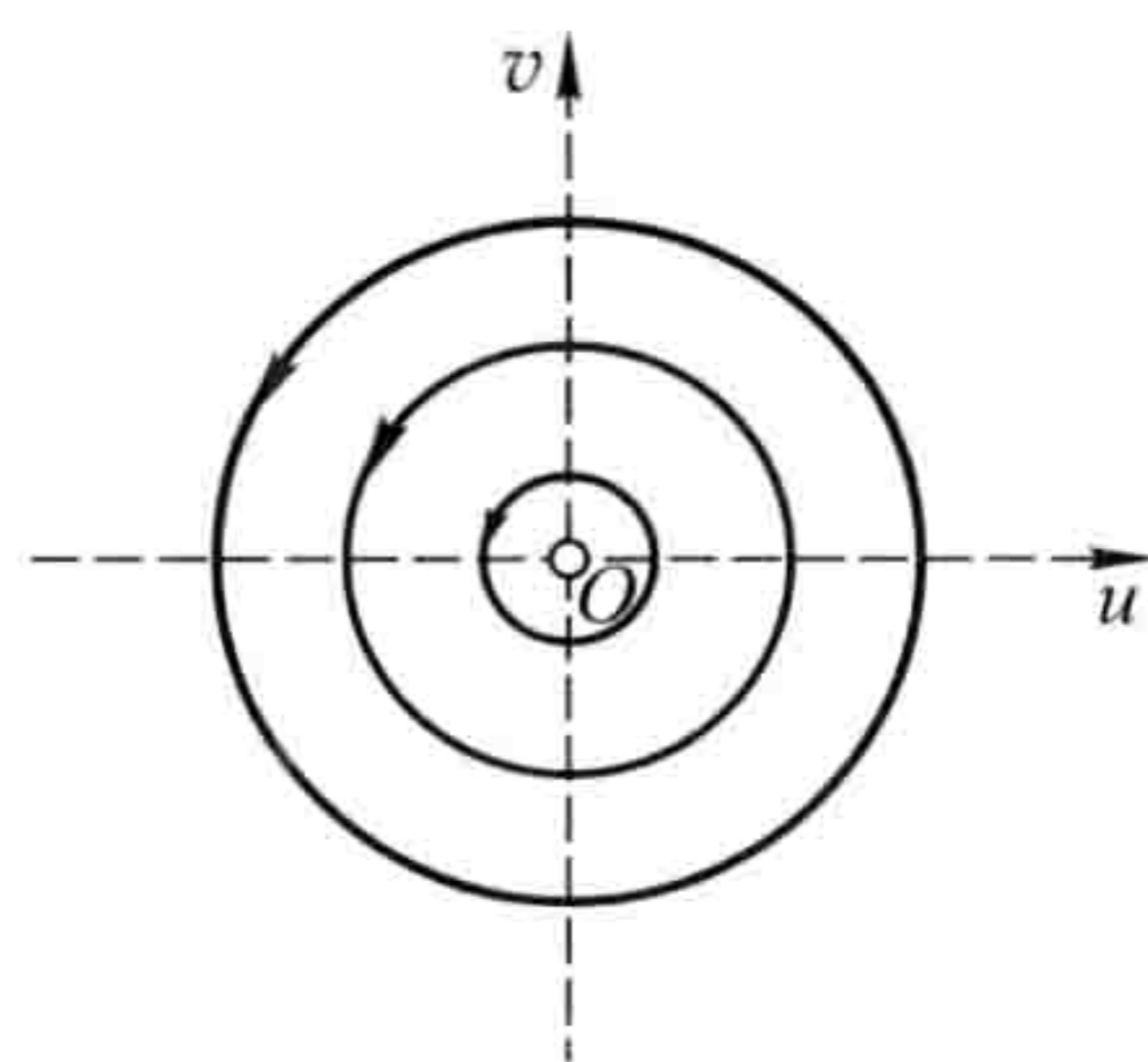


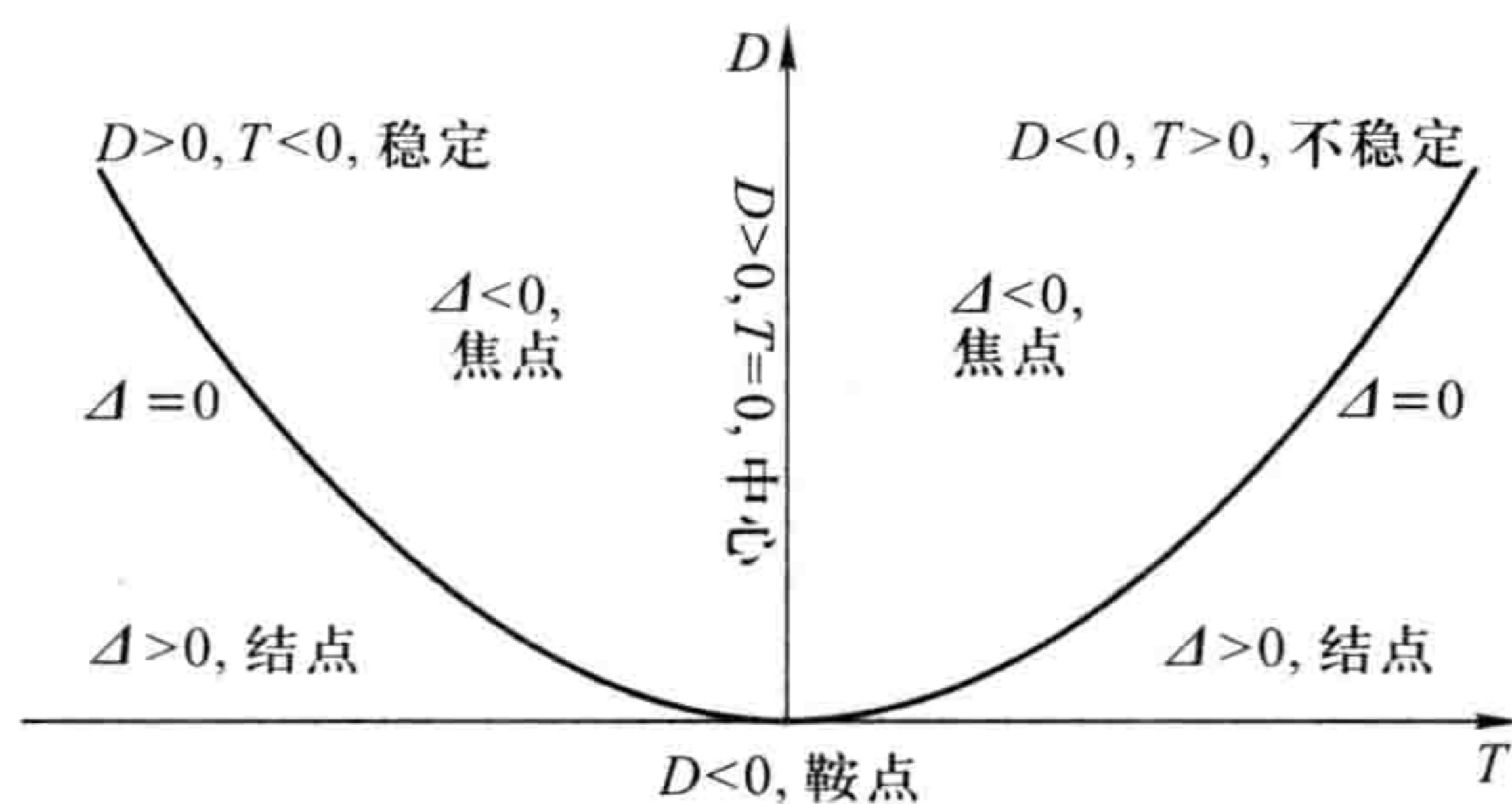
图 6.21 中心 ( $\alpha = 0, \beta < 0$ )

上面的分析结果也可以通过

$$T := \text{tr}(\mathbf{A}), \quad D := \det(\mathbf{A}), \quad \Delta := T^2 - 4D$$

三个量之间的相互关系来判定, 这些关系是根据二次多项式方程根与系数的关系得到的. 在图 6.22 中我们在  $TD$  坐标系中描述了这些关系, 其中抛物线  $\Delta = 0$  对应着星形结点或单向结点,  $T$  轴对应着下面我们将要讨论的退化平衡点, 正半  $D$  轴对应着中心.

对于一般形式的线性方程组 (6.36), 可用前述线性变换将其化为标准形,

图 6.22 平面线性系统平衡点的分类与  $T, D, \Delta$  的关系

并由标准形的相图不难通过逆变换画出原系统的相图. 但是这种方法计算量较大, 下面我们介绍一个简单实用的方法.

我们可先由系数矩阵  $A$  的特征根迅速判断出平衡点的类型和稳定性, 然后利用平面线性系统平衡点的下面两个性质作出相图: 首先, 注意到当  $t \rightarrow +\infty$  或  $t \rightarrow -\infty$  时, 某些轨道将沿某一确定的方向 (称为平衡点的特殊方向) 趋于平衡点, 特别地, 两向结点和鞍点有两个特殊方向, 单向结点有一个特殊方向, 星形结点有无穷个特殊方向, 焦点和中心没有特殊方向; 并且当某条直线给出平衡点的特殊方向时, 它被平衡点分割的两条射线都是系统的轨道, 这些性质在仿射变换下保持不变. 其次, 平面线性系统 (6.36) 在相平面上给出的方向场关于平衡点  $(0,0)$  对称, 即若  $(P(x,y), Q(x,y))$  为系统在点  $(x,y)$  给出的方向, 则  $(-P(x,y), -Q(x,y))$  为系统在点  $(-x,-y)$  给出的方向.

下面我们通过具体的例子来说明如何利用这种方法.

**例 6.3** 考虑如下的平面线性系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases} \quad (6.45)$$

首先计算系数矩阵  $A$  的特征根.  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$ . 从而, 特征根为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ , 是一对相异正实根, 属于情形 (I.2). 因此原点  $O: (0,0)$  作为系统 (6.45) 的平衡点是一个不稳定的两向结点.

为了画出相图, 我们需要找出平衡点  $(0,0)$  的两个特殊方向, 为此先求出  $A$  的特征向量. 对应于  $\lambda_1, \lambda_2$ , 容易得到关于  $\xi_j = (u_j, v_j)^T$  的齐次线性方程组

$$(A - \lambda_j I) \xi_j = \begin{pmatrix} 3 - \lambda_j & 0 \\ 2 & 1 - \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2$$



的基础解系,即对应于  $\lambda_1 = 1$  有特征向量  $\xi_1 = (0, 1)^T$ , 对应于  $\lambda_2 = 3$  有特征向量  $\xi_2 = (1, 1)^T$ . 这样,我们相应绘出两条直线  $\ell_1$  和  $\ell_2$ , 它们上面的轨道都是继续沿着它们且背离原点  $O$ . 因为  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , 因此除了  $\ell_2$  上的轨道外, 所有轨道的曲线都与  $\ell_1$  相切于  $O$  点, 从而直线  $\ell_1$  和  $\ell_2$  分别给出了平衡点  $(0, 0)$  的两个特殊方向. 由此不难画出系统 (6.45) 的相图, 见图 6.23.

**例 6.4** 考虑如下的平面线性系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases} \quad (6.46)$$

系数矩阵  $A$  的特征根是重根  $\lambda_{1,2} = -2$ , 因此平衡点  $O$  或者是稳定的星形结点或者是稳定的单向结点. 它们之间的区别在于平衡点  $(0, 0)$  有多少个特殊方向, 无穷个对应于前者, 唯一一个对应于后者. 为进一步判断, 我们同样先求出  $A$  的特征向量, 为此求解齐次线性方程组

$$(A - \lambda_1 I)\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

即  $u_1 - v_1 = 0$ , 从而得到一个特征向量  $\xi_1 = (1, 1)^T$ . 显然, 总共能解出的线性无关的特征向量组有且只有一个向量组成. 因此  $O$  是稳定的单向结点. 沿特征向量  $\xi_1 = (1, 1)^T$  绘出一条直线  $\ell_1$ , 它上面的轨道继续沿着它指向原点  $O$ . 其余所有轨道的曲线都与  $\ell_1$  相切于  $O$  点, 见图 6.24.

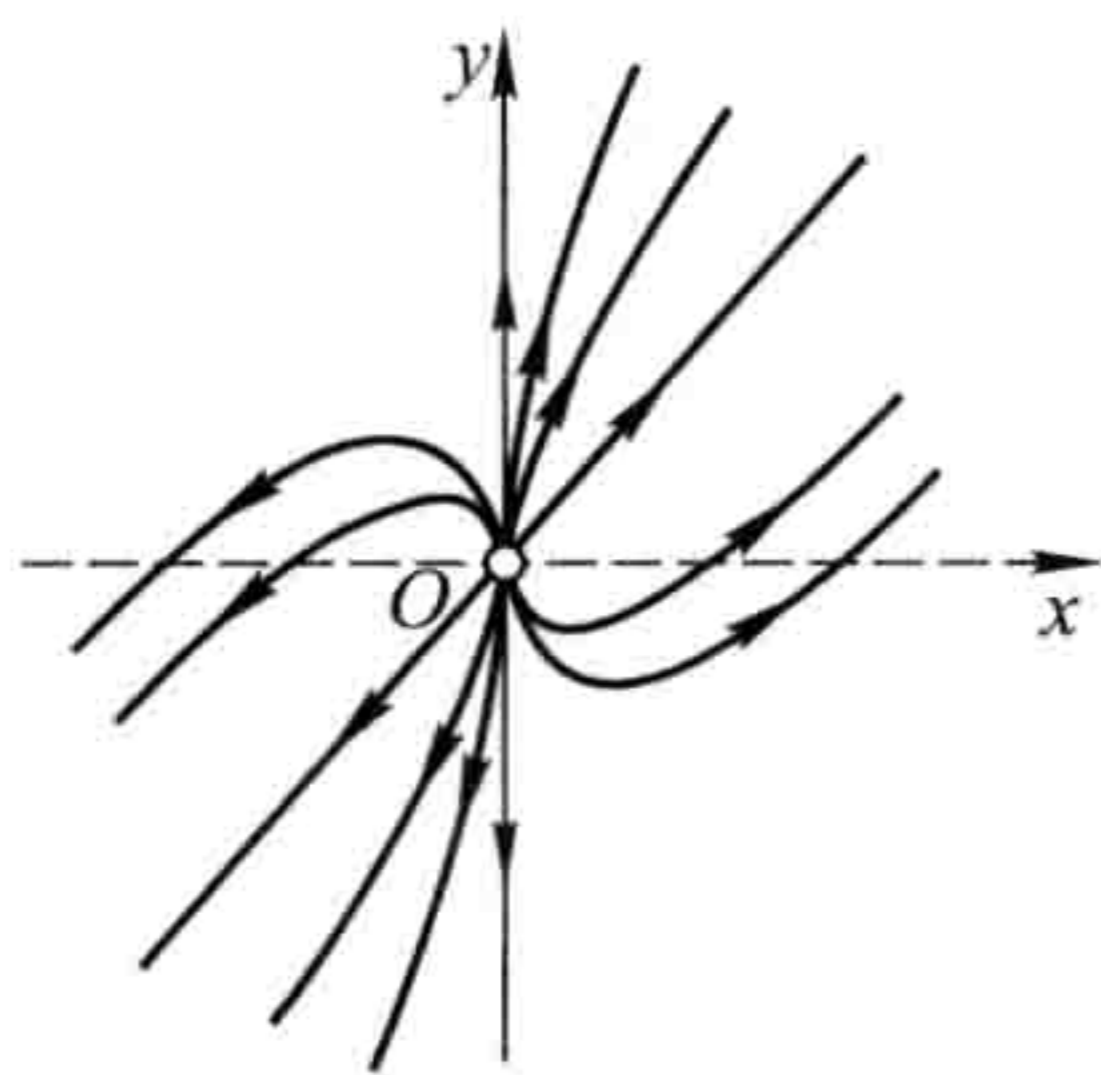


图 6.23 例 6.3

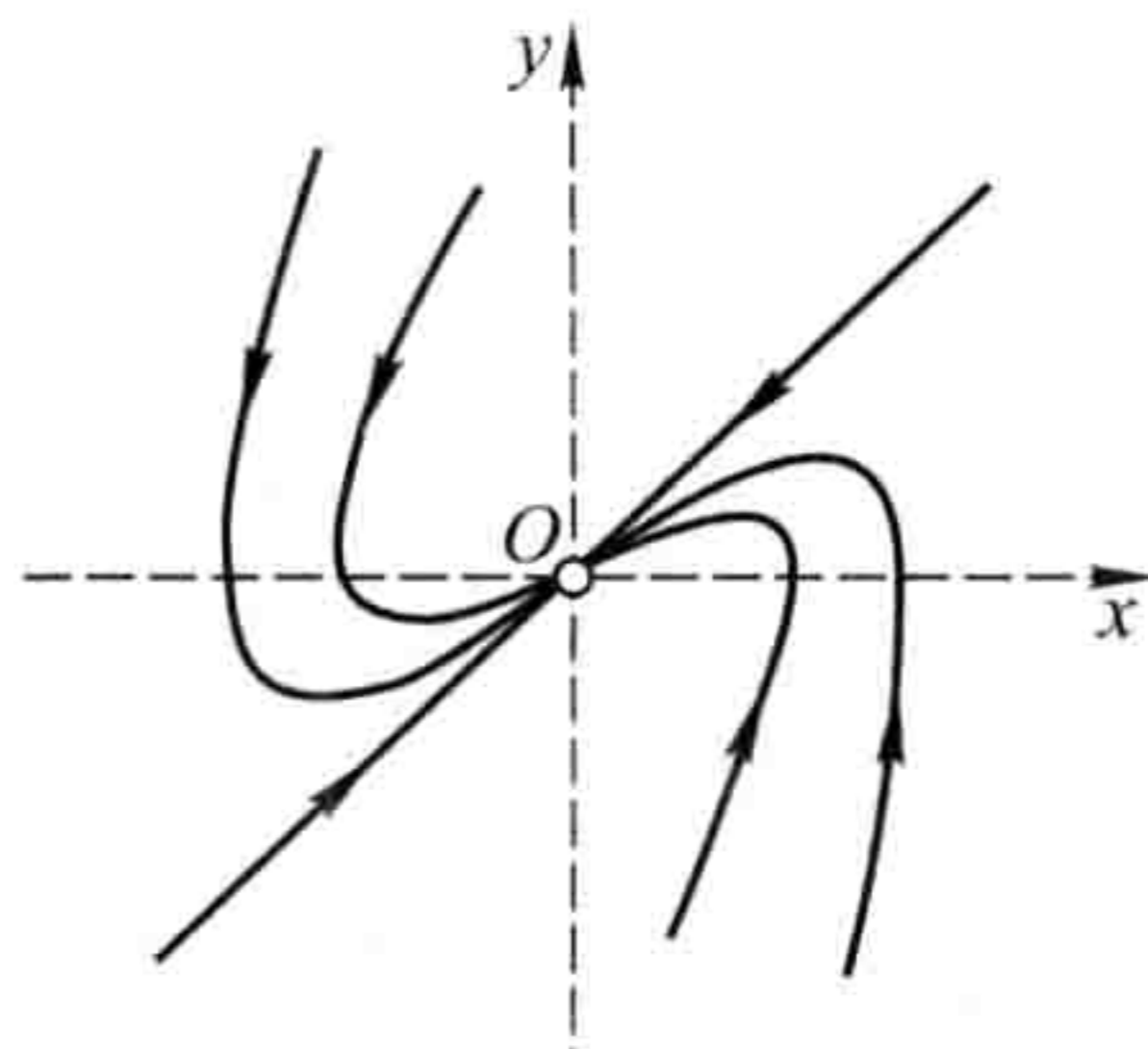


图 6.24 例 6.4

从上面两个例子可看出平衡点  $(0, 0)$  的特殊方向由矩阵  $A$  的实特征向量给出. 对星形结点, 这时矩阵  $A$  可对角化, 容易看出每个向量都是特征向量, 从而都是特殊方向, 因此星形结点有无穷个特殊方向, 而对焦点和中心, 矩阵  $A$  没有实特征向量, 因此没有特殊方向.

**例 6.5** 考虑如下的平面线性系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (6.47)$$

系数矩阵  $A$  的特征根是一对共轭复根  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . 由于实部为零, 平衡点  $O$  是一个中心. 它当然是稳定的. 由于轨道是盘旋的, 我们只需要判断盘旋的方向. 为此, 考虑  $x$  轴 (相应于极坐标下的极轴) 上的任意一点  $Q$ , 不妨取  $Q: (1, 0)$ . 易见在  $Q$  点处  $\dot{x} = y = 0, \dot{y} = -x = -1$ , 亦即在  $Q$  点向量场方向为  $(0, -1)$ , 因此盘旋方向是顺时针的, 见图 6.25.

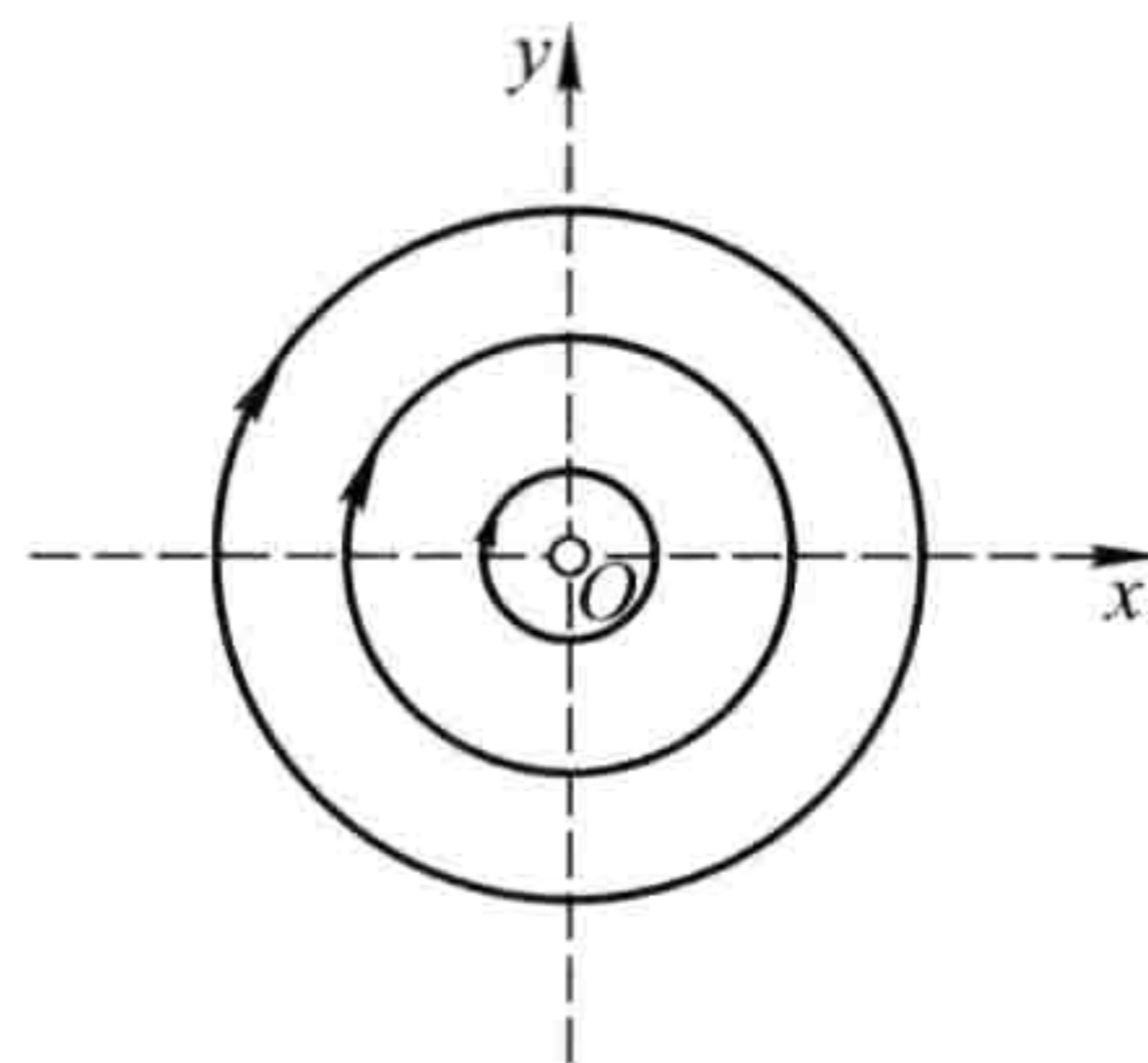


图 6.25 例 6.5

以上我们讨论了系数矩阵  $A$  没有零特征根的各种情形. 所有上述类型的平衡点都称为**初等平衡点**, 否则就称为**退化平衡点** (或**高阶平衡点**). 我们也将除去中心以外的上述初等平衡点称为是**粗的**, 其余的平衡点称为是**细的**. 我们可以进一步证明 (参见文献 [29] 的第二章):

如果系统 (6.35) 的线性部分 (6.36) 具有粗的平衡点  $O$ , 那么系统 (6.35) 在  $O$  的小邻域内与线性化系统 (6.36) 具有相同的定性性质. 事实上, 在动力系统理论中, 上述粗的平衡点都是双曲平衡点, 即线性化系统 (6.36) 的特征根实部都不为零. 这样的系统 (6.35) 即使形式上发生“微小改变”, 其在该平衡点附近轨道状况与原来系统轨道的状况一定是具有相同的拓扑结构的. 在该平衡点附近系统 (6.35) 轨道的拓扑结构与线性化系统 (6.36) 轨道的拓扑结构是一样的.

关于细的平衡点, 我们未必有非线性系统和它的线性化系统之间的这种一致性. 我们首先要考虑中心. 容易从一些例子中看到, 即使线性部分 (6.36) 具有中心  $O$ , 系统 (6.35) 的平衡点  $O$  也可以是一个焦点. 我们称这样的平衡点为非线性系统 (6.35) 的**细焦点**或**中心型焦点**. 这需要进一步的中心焦点判定 (参见文献 [29] 的第二章).

另一类细的平衡点就是退化平衡点, 即系数矩阵  $A$  有零特征根, 亦即  $\det(A) = 0$ . 对线性系统 (6.36) 来说,  $A$  的特征方程为  $\lambda^2 - (a+d)\lambda = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = a+d$ . 尤其当  $a \neq 0$  或  $b \neq 0$  时, 方程组 (6.36) 可写成

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = k(ax + by), \quad (6.48)$$

其中  $k$  为常数. 显然直线  $ax + by = 0$  上的所有点均为方程组 (6.48) 的平衡点. 这样的直线称为**奇线**. 从 (6.48) 可以得到相空间上轨道满足的微分方程  $\frac{dy}{dx} = k$ , 因

此轨道为一族平行直线  $y=kx+C_0$ , 其中  $C_0$  为任意常数. 另一方面, 由(6.48)得

$$\frac{d}{dt}(ax + by) = \lambda_2(ax + by).$$

因此,  $ax+by=C_1e^{\lambda_2 t}$ . 其中  $C_1$  为任意常数. 所以当  $\lambda_2 < 0$  时, 轨道趋近于奇线上的点, 当  $\lambda_2 > 0$  时, 轨道远离奇线上的点, 见图 6.26 及图 6.27.

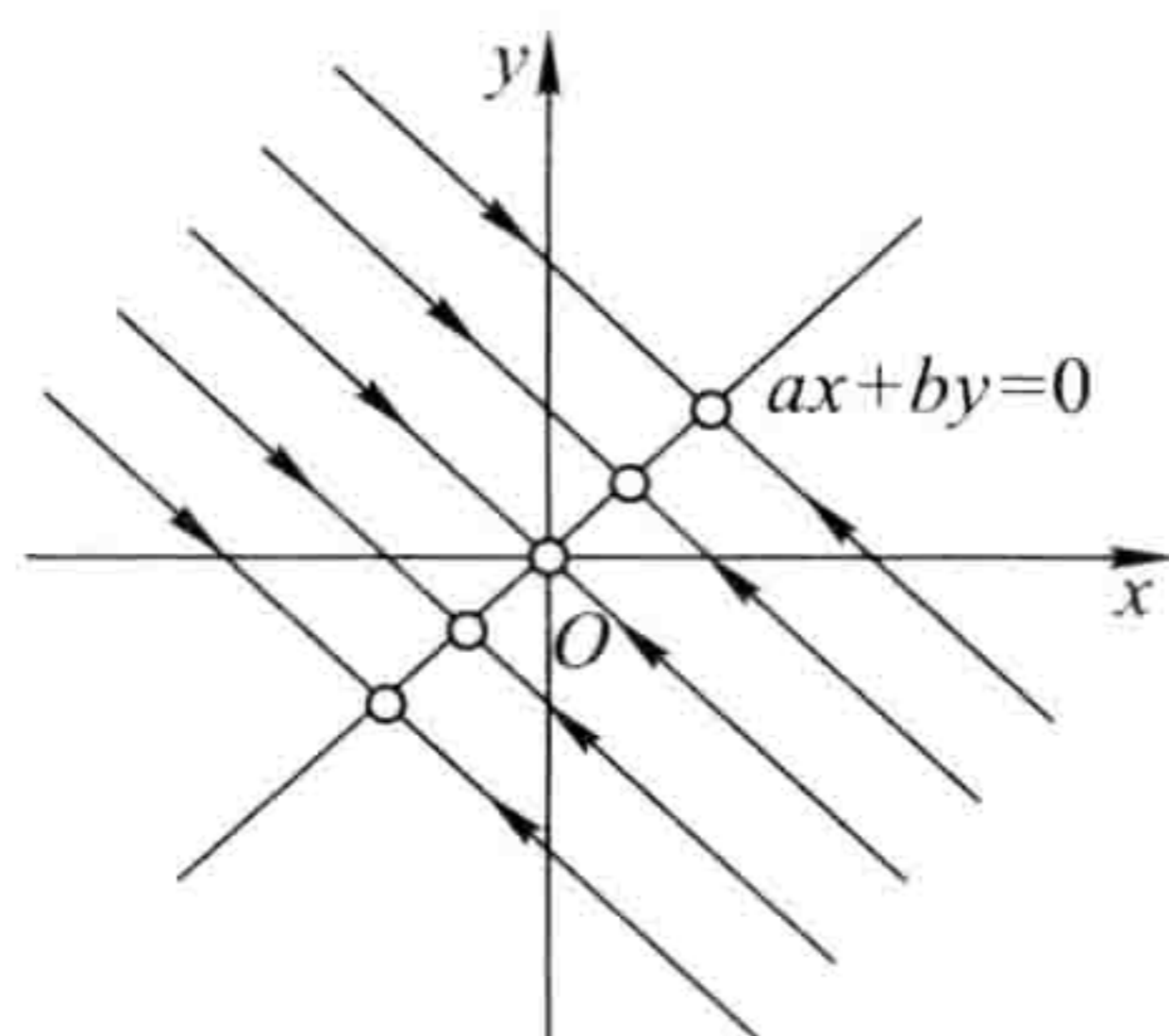


图 6.26  $a^2+b^2 \neq 0$  且  $a+d < 0$

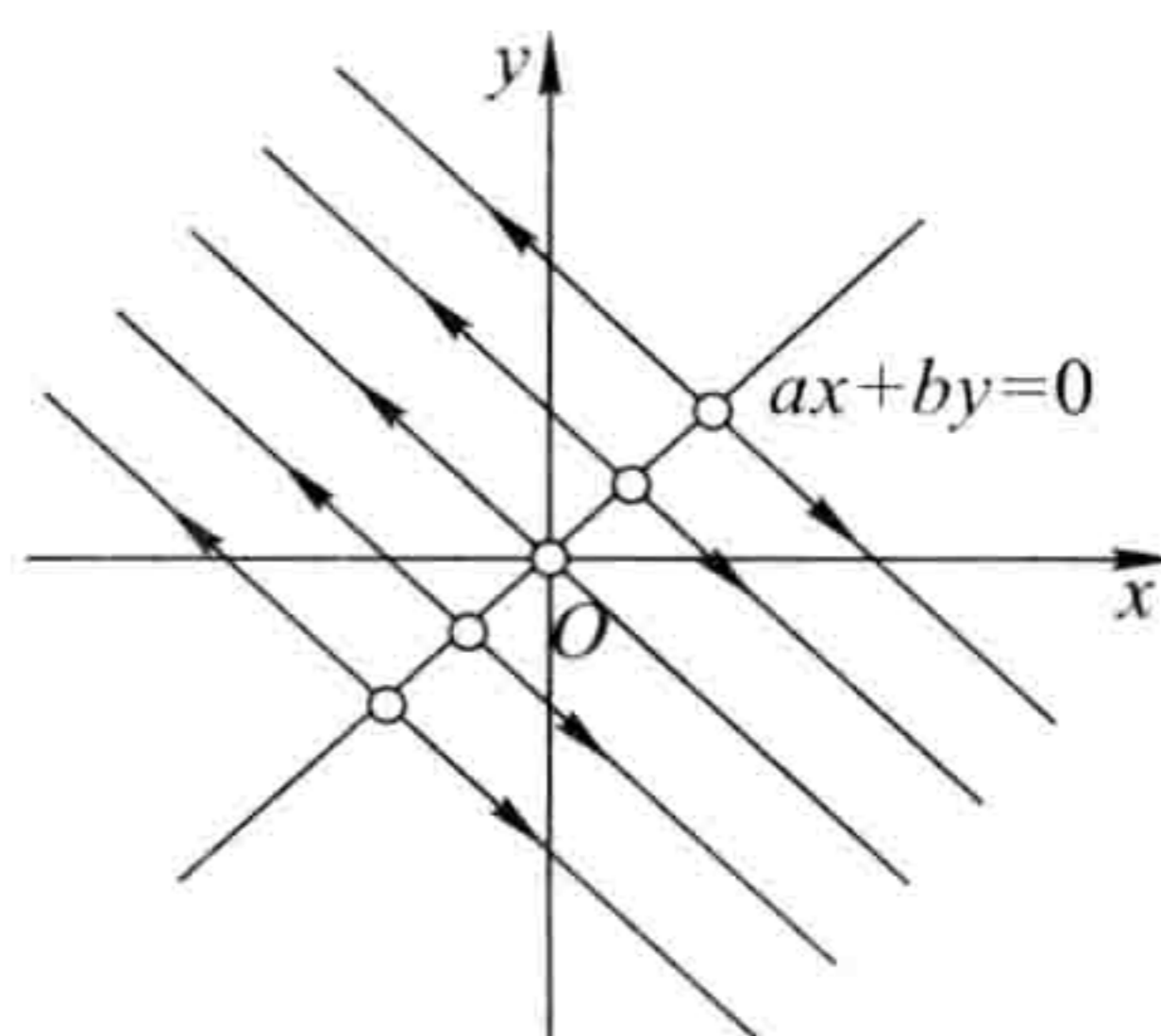


图 6.27  $a^2+b^2 \neq 0$  且  $a+d > 0$

若  $\lambda_2 = 0$ , 即  $A$  的特征根都为零, 则由方程组(6.48)系数矩阵的迹为零得知  $a+kb=0$ . 易知(6.48)的轨道与奇线  $ax+by=0$  平行.

(6.48)的通解为

$$x(t) = bC_0t + C_2, \quad y(t) = dC_0t + (kC_2 + C_0),$$

其中  $C_2$  为任意常数. 这时轨道的走向由  $b, d, C_0$  的符号确定, 奇线  $ax+by=0$  将相平面划分为两部分, 不同部分的轨道的走向正好相反, 在图 6.28 中我们画出了当  $b < 0, d < 0$  时系统的相图, 读者可类似地画出其他情况下系统的相图.

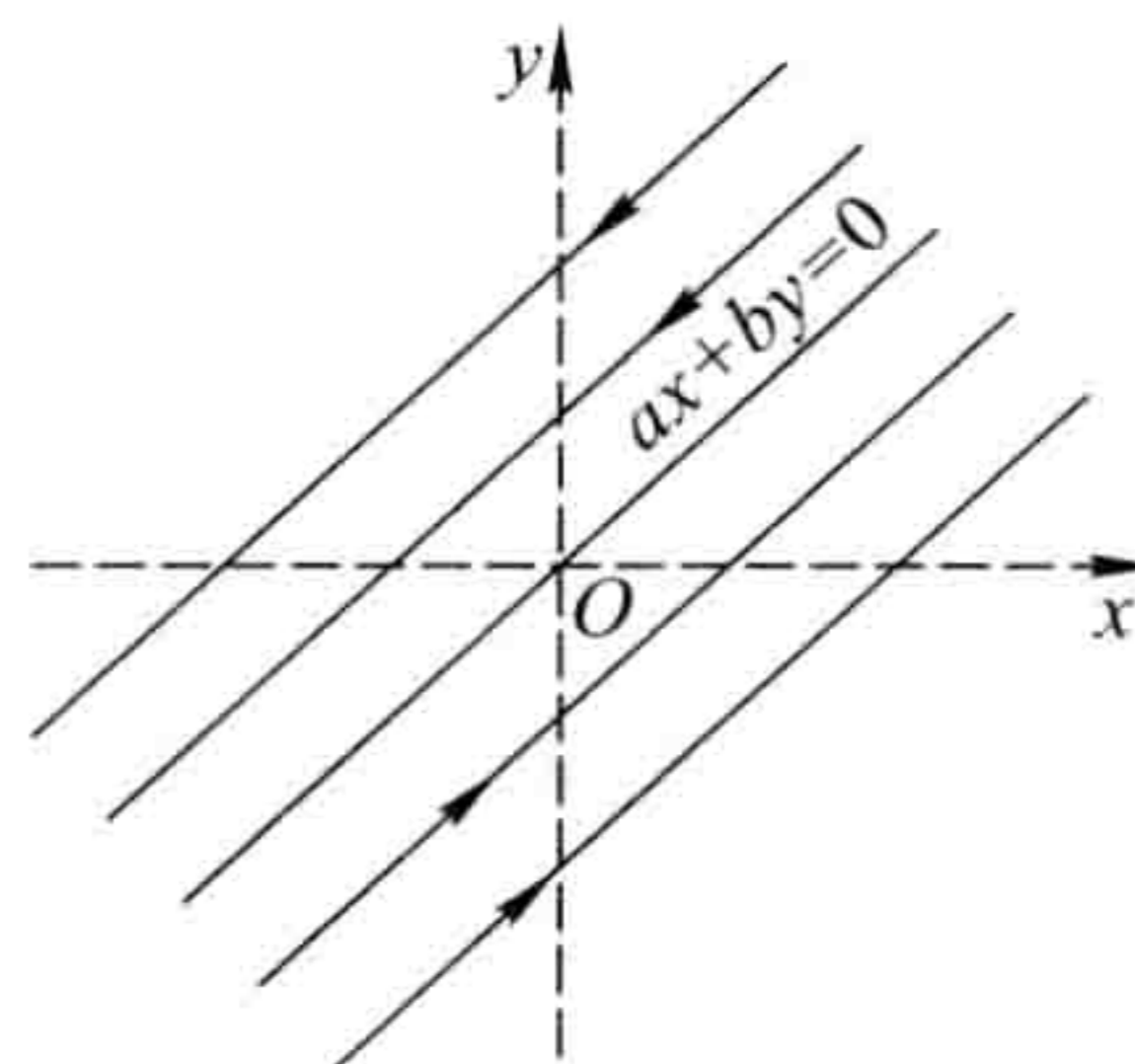


图 6.28  $b < 0, d < 0$   
且  $a+d=0$

如果  $a=b=0$  但  $c, d$  不全为零, 则  $cx+dy=0$  为奇线, 轨道为一族平行于  $y$  轴的直线, 见图 6.29 及图 6.30. 如果  $a=b=c=d=0$ , 则平衡点充满了整个相平面.

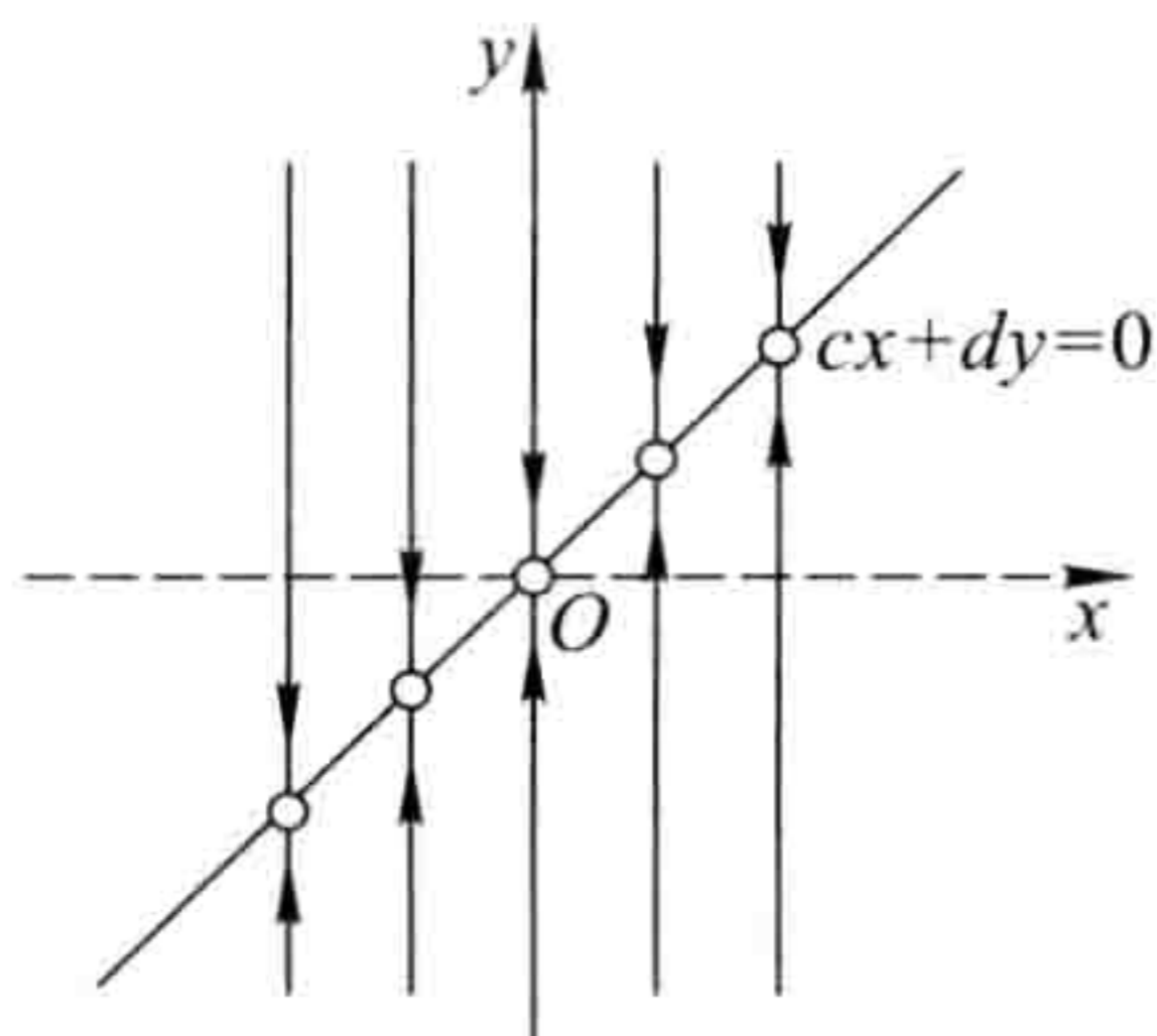


图 6.29  $a=b=0$  且  $d < 0$

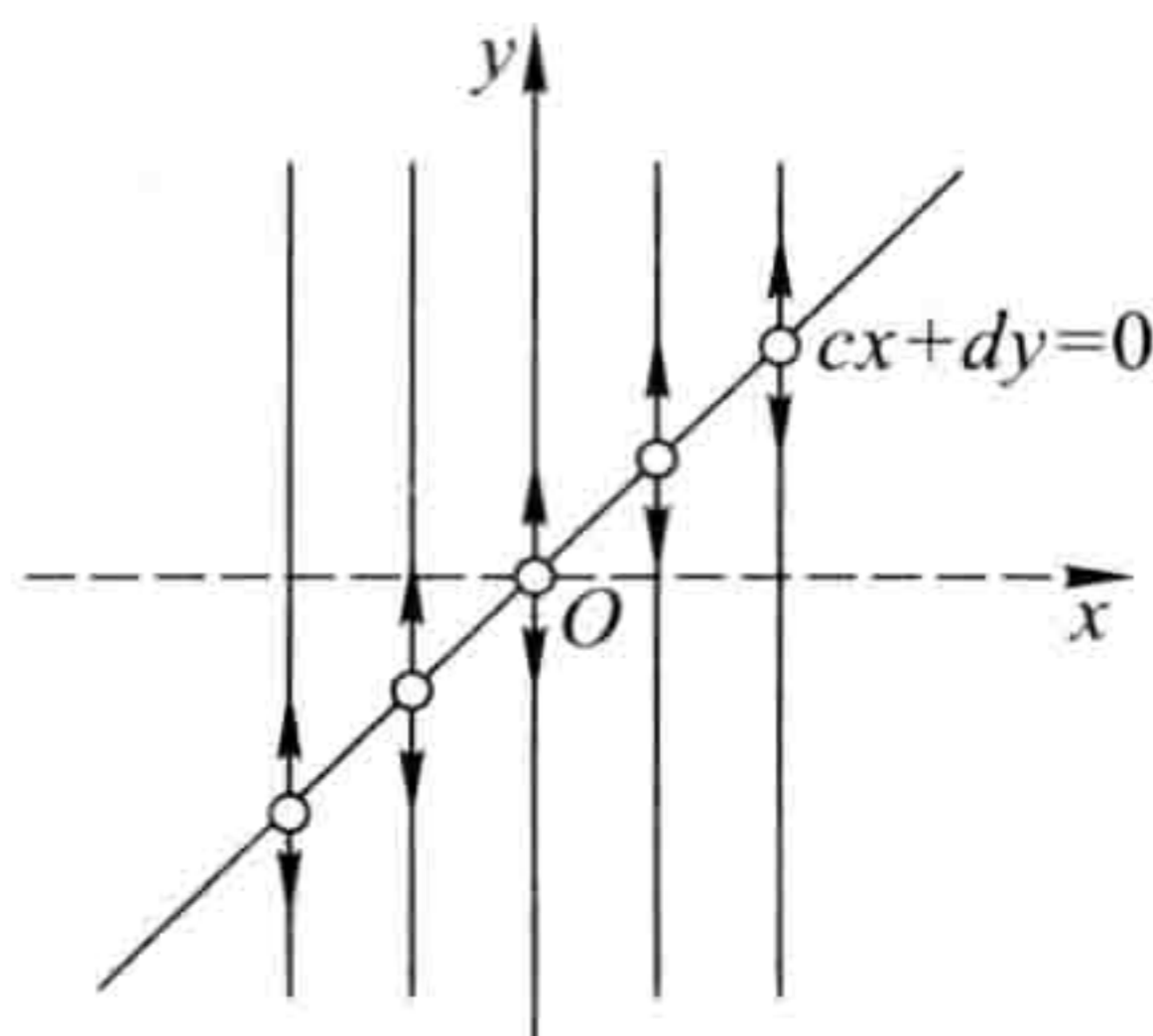


图 6.30  $a=b=0$  且  $d > 0$