AL：转移矩阵

{ ordering parameter
{ sym breaking.

3d

c_i → 1d   1 site → 三对角阵

→ 3d   一堆.

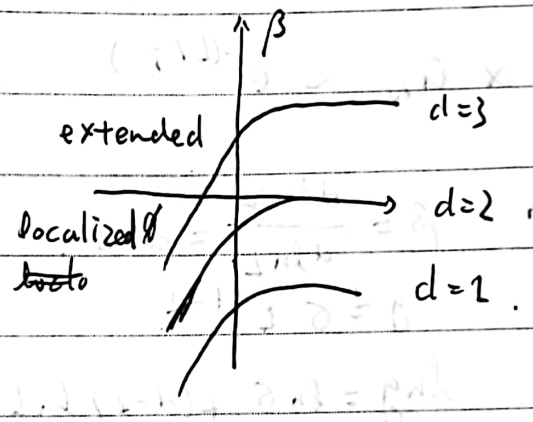
~~////~~   块三对角阵.

{ $-t\, c_i^+ c_{i+1} \Rightarrow -c_i^+[t]\,c_{i+1}$

{ $-V_i\, c_i^+ c_i \to c_i^+[t]\,c_i$

Thouless.

标度率: $\beta = \frac{d\ln g}{d\ln L}$.



$$\beta=\frac{d\ln g}{d\ln L} \Rightarrow \ln g = \beta \ln L + \ln g_0$$

$$g = g_0 L^{\beta} \propto \frac{1}{R}.$$

超导.

二次型 Hamiltonian. ⇒ 线性代数. $y = X^T A X$
$= \sum A_{ij} x_i x_j$.

Boson ⇒ Bogoliubov 变换.

Fermion. ⇒ Bardeen, Cooper Schrietter

本质 $\rho=0$ (表象) { Meissner effect. Landau eq
{ cooper pair.

Ginzburg - Landau theory.

~~SC => (Δ~~

$SC \Rightarrow (\Delta c_{i\uparrow}^{+} c_{i\downarrow}^{+} + h.c.)$ } 超导中关键的一项.

$\quad \text{or } (\Delta c_i^{+} c_{i+1}^{+} + h.c)$

eg: o—o

$-t(c_1^+ c_2 + h.c) + \varepsilon_1 c_1^+ c_1 + \varepsilon_2 c_2^+ c_2$

$$= (c_1^+, c_2^+) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -t_0 \\ -t_0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

o—o—o

$$H = (c_1^+ \ c_2^+ \ c_3^+) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -t & 0 \\ -t & \varepsilon_2 & -t \\ 0 & -t & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

$$H = -t c_1^+ c_2 - t c_2^+ c_1 + \varepsilon_1 c_1^+ c_1 + \varepsilon_2 c_2^+ c_2 + \Delta c_1^+ c_2^+ + \Delta^* c_2 c_1.$$

$c_1 \to x_1 + i x_2$, $\quad c_1^+ \to x_1 - i x_2$

$c_2 \to x_3 + i x_4$, $\quad c_2^+ \to x_3 - i x_4$.

$H(x_1, x_2, x_3, x_4)$ = 二次型.

$K\, c_1^+ c_1 (c_2 + c_2^+)$. 多体相互作用，无法用这种办法.

一半一半原则.

off-diag Block -pairing

$$H = (c_1^+ \;\; c_2^+ \;\; c_1 \;\; c_2) \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^+ \\ c_2^+ \end{pmatrix}$$

$$= -t c_1^+ c_2 - t c_2^+ c_1 + \varepsilon_1 c_1^+ c_1 + \varepsilon_2 c_2^+ c_2 + \Delta c_1^+ c_2^+ + \Delta^* c_2 c_1 .$$

基本要求: ① Hermite.

② 等式成立.

③ particle-hole duality.

$\Delta = 0$.

$$H = (c_1^+ \;\; c_2^+ \;\; c_1 \;\; c_2) \left(\begin{array}{cc|cc} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & y_2 & y_3 \end{array}\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^+ \\ c_2^+ \end{pmatrix} + \text{const}.$$

$$= x_1 c_1^+ c_1 + x_3 c_2^+ c_2 + y_1 c_1 c_1^+ + y_3 c_2 c_2^+$$
$$+ x_2 c_1^+ c_2 + x_2 c_2^+ c_1 + y_2 c_1 c_2^+ + y_2 c_2 c_1^+ + \text{const}.$$

$$= (x_1 + y_1) c_1^+ c_1 + (x_3 + y_3) c_2^+ c_2$$
$$+ (x_2 - y_2) c_1^+ c_2 + (x_2 - y_2) c_2^+ c_1 + \text{const}.$$
$$+ (y_1 + y_3)$$

$$= -t (c_1^+ c_2 + h.c.) + \varepsilon_1 c_1^+ c_1 + \varepsilon_2 c_2^+ c_2 .$$

有无穷多组解. 空间被扩大了, 有更多的待定参数.

⇒ 有无穷多能谱.

particle.
↑

解决方法. 加一些常数.

问 (x $t=0$. $\Rightarrow (c_1^+ \; c_2^+ \; c_1 \; c_2)\begin{pmatrix} x_1 & 0 & & 0 \\ 0 & x_3 & & \\ & & y_1 & 0 \\ 0 & & 0 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^+ \\ c_2^+ \end{pmatrix}$

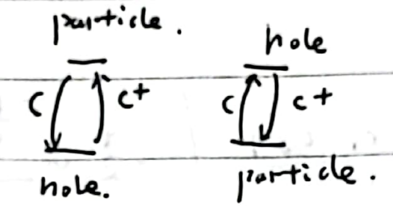
↓ hole.

本征值 $x_1 \quad x_3 \quad y_1 \quad y_3$ + const.

原来的本征值 $\frac{1}{2}\varepsilon_1$, $\frac{1}{2}\varepsilon_2$, $-\frac{1}{2}\varepsilon_1$, $-\frac{1}{2}\varepsilon_2$.

Fermion $\{c, c^+\} = 1$. $\Rightarrow cc^+ + c^+c = 1$.

$c \to c^+$, $c^+ \to c$ 对易关系.



$$H = \Sigma c^+ c = \Sigma(1 - cc^+) = \Sigma - \Sigma cc^+$$

~~$\Rightarrow (x_1, x_3, y_1, y_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, -\varepsilon_1, -\varepsilon_1)$.~~

本征值 $(0, \varepsilon)$:

$\Rightarrow \pm\frac{\varepsilon}{2}$

$$x_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 \quad x_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_2 \quad y_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \quad y_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_2.$$

$$\Rightarrow H = \frac{\varepsilon_1}{2} c_1^+ c_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} c_2^+ c_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 c_1 c_1^+ - \frac{\varepsilon_2}{2} c_2 c_2^+ + \text{const}.$$

$$= \frac{\varepsilon_1}{2} c_1^+ c_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} c_2^+ c_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{2} c_1^+ c_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} c_2^+ c_2 + \text{const}.$$

$$= \varepsilon_1 c_1^+ c_1 + \varepsilon_2 c_2^+ c_2.$$

$$\Rightarrow \text{const} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

另一个情况 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \Delta = 0$.

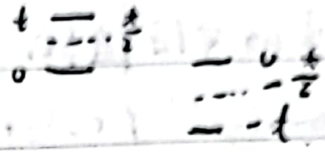
$$H = (c_1^+ \; c_2^+ \; c_1 \; c_2)\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & x_2 & & 0 \\ x_2 & 0 & & \\ \hline & & 0 & y_2 \\ 0 & & y_2 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^+ \\ c_2^+ \end{pmatrix}$$

求本征值 $\Leftarrow$ $\pm x_2$ $\pm y_2$

$$= -t(c_1^+ c_2 + c_2^+ c_1)$$

$$= (c_1^+ \; c_2^+)\begin{pmatrix} 0 & -t \\ -t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = t\, d_1^+ d_1 - t\, d_2^+ d_2 .$$

本征值±t.



同时需求 $x_2 + y_2 = -t$.

解: ~~$x_2 = y_2 = -\frac{t}{2}$~~.

$$\Rightarrow H = (c_1^+ \; c_2^+ \; c_1 \; c_2)\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\frac{t}{2} & & \\ -\frac{t}{2} & 0 & & 0 \\ \hline & & 0 & \frac{t}{2} \\ 0 & & \frac{t}{2} & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^+ \\ c_2^+ \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow H = (c_1^+ c_2^+ \; c_1 c_2)\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\varepsilon_1}{2} & -\frac{t}{2} & & \\ -\frac{t}{2} & \frac{\varepsilon_2}{2} & & 0 \\ \hline & & -\frac{\varepsilon_1}{2} & \frac{t}{2} \\ 0 & & \frac{t}{2} & -\frac{\varepsilon_2}{2} \end{array}\right)\begin{pmatrix} c_1^+ \\ c_2^+ \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

单粒子

$$= \frac{1}{2}(c_1^+ \; c_2^+ \; c_1 \; c_2)\begin{pmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & -H_0^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^+ \\ c_2^+ \end{pmatrix}.$$

配对: $\varepsilon = 0 \quad t = 0$

$$H = (c_1^+ \; c_2^+ \; c_1 \; c_2)\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{array}{c|c} 0 & z_1 \\ \hline z_2 & 0 \end{array} \\ \hline * & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^+ \\ c_2^+ \end{pmatrix},$$

$$= z_1 c_1^+ c_2^+ + z_2 c_2^+ c_1^+ = (z_1 - z_2)\, c_1^+ c_2^+$$

$$= \Delta\, c_1^+ c_2^+$$

$z_1 - z_2 = \Delta$. $z_1 = \frac{\Delta}{2}$ $z_2 = -\frac{\Delta}{2}$.

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_1^+ & c_2^+ & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -t & 0 & \Delta \\ -t & \varepsilon_2 & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & -\varepsilon_1 & t \\ \Delta^* & 0 & t & -\varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^+ \\ c_2^+ \end{pmatrix}$$

例如5个格子: 10×10 n个site $2n \times 2n$.

$\Delta^T = -\Delta$.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^+ & -H_0^* \end{pmatrix}$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -t & & \\ -t & \varepsilon_2 & \ddots & \\ & -t & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \Delta & \Delta & \\ -\Delta & 0 & \Delta & \ddots \\ & -\Delta & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

$\Delta_{ij} c_i^+ c_j^+, i<j$

$H(i, j+L) = \Delta_{ij}$

$H(j, i+L) = -\Delta_{ij}$.

显然 $H(i, i+L) = 0$.

考试: 16号, 11-15号. 作业下了期交.