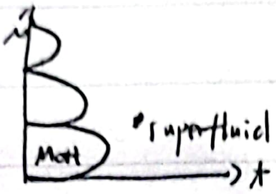
严格对角化

① Bose-Hubbard

$$H=-t\sum_{\langle ij\rangle}a_i^+a_j-\mu\sum_i n_i+Un_i(n_i-1)$$



② Fermi Hubbard

$$H=-t\sum_{\langle ij\rangle}f_i^+f_j-\mu\sum_i n_i+\sum_{\langle ij\rangle}V n_i n_j \quad . \; n_i=f_i^+f_i$$

③ spin model

$$H=J\sum_{\langle ij\rangle}\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j+H\sum_i S_i^z$$ $\vec{S}$: ~~spin~~ pauli operator

1) 平均场 => 多→单, 自洽 Bose, 太慢

Fermi $Vn_in_{i+1}=Vn(n_i+n_{i+1})-Vn^2 \quad n=\langle n_i\rangle$

2) 精确对角化

$$|\psi\rangle=\sum_i c_i|\varphi_i\rangle$$

三个model的精确对角化.

$n\to(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_L)$ 一一索引.

0—0

$$H=-t(a_1^+a_2+h.c)-\mu(n_1+n_2)+Un_1(n_1-1)+Un_2(n_2-1)$$

$\begin{cases} L=2 \\ N=3 \end{cases}$ $k = \{ |0,3\rangle, |1,2\rangle, |2,1\rangle, |3,0\rangle \}$.

$|i,j\rangle$

$\begin{cases} L=2 \\ N=5 \end{cases}$ $k = \{ |0,5\rangle, |1,4\rangle, |2,3\rangle, |3,2\rangle, |4,1\rangle, |5,0\rangle \}$

$\langle ij|H|i'j'\rangle$ 对角/~~非对角~~ $i=i'$ $j=j'$ 引入 $\delta(i,j)$

非：~ $\langle ij|a_1^+a_2 + h.c.|i'j'\rangle$

$= \sqrt{j'}\sqrt{i'+1}\ \langle ij|i'+1, j'-1\rangle + h.c$

$= \sqrt{j'}\sqrt{i'+1}\ \delta_{i,i'+1}\ \delta_{j,j'+1}$

$N=3$ o—o—o .

$\begin{cases} N=3 \\ L=3 \end{cases}$ $\{ |300\rangle, |030\rangle, |003\rangle, |210\rangle, |201\rangle \ldots$

$|111\rangle \}$.

~~∀N个格点~~ ∀L个格点 N个粒子 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{L} i_k = N \ (i_k \geq 0)$.

$|i_1, i_2, \cdots, i_L\rangle \leftrightarrow i$ table 对应.

对角

do $i=1,\cdots,|k|$

H_{ii}

End do.

非对角

do $i=1,\cdots,|k|-1$

do $j=i+1,\cdots,|k|$

$\hat{T} = \sum_i a_i^+ a_{i+1} + h.c.$ ✓

H_{ij} 只与 t. $H_{ij} = -t\langle i|\hat{T}|j\rangle$

$= -t\langle i_1\cdots i_L|\hat{T}|j_1\cdots j_L\rangle$

$= -t\sum_k \langle i_1\cdots i_L|(a_k^+a_{k+1}+h.c.)|j_1\cdots j_L\rangle$

$\Rightarrow \left[\prod_{q\neq k,k+1} \delta(i_q, j_q)\right] \langle i_k, i_{k+1} | a_k^{+} a_{k+1} + h.c | j_k j_{k+1} \rangle$

技巧：1) 索引表

2) 分类，比如对角非对角。

3) 定义δ函数.

产生索引表：代码 or 直接产生.

玻色子:

1) $|n\rangle$ 是什么?

(a) 谐振子  $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$ 第n能级.

(b) Bose Hubbard Model中: $\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$

⇒ n个粒子占据基态.

Fermion/spin ⇒ 2进制 0,1.

简到多

eg o—o

$-t(f_1^+ f_2 + h.c) + V n_1 n_2$

$N=1$ $L=2$ $k=\{|10\rangle, |01\rangle\}$. $N=2$ $L=2$ $k=\{|11\rangle\}$. $N=3$ $L=2$ $k=\{\emptyset\}$.

0—0—0

$N=1$ $L=3$ $K=\{ |100\rangle, |010\rangle, |001\rangle \}$.

$\downarrow$ $|0\rangle$ $\downarrow$ $|1\rangle$ $\downarrow$ $|2\rangle$ ← 1d 标记.

$N=2$, $L=3$ $K=\{ |110\rangle$ $|011\rangle$ $|101\rangle \}$

$\downarrow$ $|0\rangle$ $\downarrow$ $|1\rangle$ $\downarrow$ $|2\rangle$ ← 1d 标记

$|i\rangle = |i_1, i_2, 0 \cdots i_L\rangle$.

→ 二进制.

$N=3$, $L=3$ $K=\{|111\rangle\}$.

$N=4$, $L=3$ $K=\{\phi\}$.

N个粒子, L个格子 $N \le L$.

$|i\rangle = |i_1\, i_2 \cdots i_L\rangle$

$\sum_{i_k \in \{0,1\}} i_k = N$. = 二进制.

do $i=0$, 2^{20}

$i \to |i_1, i_2, \cdots, i_L\rangle$.

求和 $\sum_k i_k = N$

$\boxed{Y}$ → 存储 $\boxed{N}$ → 舍弃.

do $i=1 \cdots |K|$

$\mu \sum n_i$ $v\, n_i n_{i+1}$

$H_{ij}(\mu, v) = \langle i_1, \cdots, i_L | \hat{\mu} + \hat{v} | i_1 \cdots i_L\rangle$

end do

DATE

$\langle i_1 i_2, \cdots, i_L | \hat{T} | j_1 \cdots j_L \rangle$

$= -t \sum_k \langle i_1 \cdots i_L | f_k^+ f_{k+1} | j_1 \cdots j_L \rangle.$

$f_k | i_1, \cdots, i_L \rangle = i_k | i_1 \cdots i_{k-1} \cdots i_L \rangle (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1} i_j}$

$f_{k+1}^+ f_k | i_1, \cdots, i_L \rangle$

$= i_k (1 - i_{k+1}) | i_1 i_2 \cdots i_{k-1} i_{k+1}+1 \cdots i_L \rangle$ $(-1)^{i_{k+1}}$

$= i_k (i_{k+1} - 1)(-1)^{i_k - 1} | i_1, i_2, \cdots, i_k - 1, i_{k+1}+1, \cdots, i_L \rangle$

$f^+ | k \rangle = (1-k) | k+1 \rangle$

$\langle j_1, j_2 \cdots j_k \; j_{k+1} \cdots j_L |$

$\downarrow$

积 L个 δ函数

长程作用

$\langle i_1 i_2 \cdots i_L | f_{k+4}^+ f_k | j_1 j_2 \cdots j_L \rangle$

$\propto \underbrace{(-1)^{i_k - 1 + i_{k+1} + i_{k+2} + i_{k+3}}}_{\text{长程作用}}$

Boson { d进制, 玻色子 }

Fermi { 2进制, 费米子 }

$\rangle$ Spin.

$H = \sum_{\langle ij \rangle} J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + H \sum_i S_i^z$

守恒量 $N = \sum_i \sigma_i$

$| \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_L \rangle = | \sigma \rangle$ ← 1d+自旋

$\sigma_i = \uparrow \to |1\rangle$

$\downarrow \to |0\rangle$

$$H = H\sum_i s_i^z + J\sum_{\langle ij\rangle} s_i^z s_j^z + J\sum_{\langle ij\rangle}(s_i^y s_j^y + s_i^x s_j^x)$$

① $|\sigma\rangle = |\sigma_1, \cdots, \sigma_L\rangle$ 索引表.

② 对角 do $\sigma = 1, \cdots, |k|$.

$H_{\sigma\sigma} = \langle\sigma|H|\sigma\rangle$.

end do. $= h\sum_{i=1}^{L}\sigma_i(-) + J\sum_{\langle ij\rangle}(2\sigma_i - 1)(2\sigma_j - 1)$

③ 非对角:

do $\sigma = 1, \cdots, |k| - 1$

do $s = \sigma + 1 \cdot |k|$

~~H~~ $H_{\sigma s} = \langle\sigma|H|s\rangle$

$\cancel{= J\sum_k \langle\sigma|s_k}$

$$= \sum_{ij} J\langle\sigma_1\cdots\sigma_L|s_i^x s_j^x + s_i^y s_j^y|s_1\cdots s_L\rangle$$

$$= \sum_{ij} J\prod_{l\neq i,j}\delta(\sigma_l s_l)\langle\sigma_i\sigma_j|s_i^x s_j^x + s_i^y s_j^y|s_i s_j\rangle.$$

多体局域化.

L个随机数.

$$H = \sum_i J\vec{s}_i\cdot\vec{s}_{i+1} + h_i s_i^z$$

1d Heisenberg Model. h_i: 随机数.

$J=1$. $h_i \in U[-w, w]$.

一般取 $M=0$ 的子空间.

随机性，能级分布．

① $e_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \to P(e_n)$．

② 相邻能级比 $r_n = \dfrac{\min\{e_n, e_{n+1}\}}{\max\{e_n, e_{n+1}\}}$．　$0 \le r \le 1$

N个 $\varepsilon_n \to N-1$个 $e_n \to N-2$个 r_n

随机矩阵 $H = (h_{ij})_{N\times N}$　$h_{ij} \in$ iid.

↳ 独立同分布．

$$\boxed{\text{作业：求 } P(e_n) \text{ 与 } P(r_n) \text{ 的分布． } L=12\text{-}14.}$$