

中国科学技术大学

硕士学位论文



代数簇上有理点的障碍理论

作者姓名： 方日鑫

学科专业： 基础数学

导师姓名： 梁永祺 教授

完成时间： 二〇二一年五月二十一日

University of Science and Technology of China
A dissertation for master's degree



Obstruction Theory of Rational Points on varieties

Author: Fang Rixin

Speciality: Pure Mathematics

Supervisor: Prof. Liang Yongqi

Finished time: May 21, 2021

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____

签字日期：_____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☒ 公开 ☐ 保密（____年）

作者签名：_____

导师签名：_____

签字日期：_____

签字日期：_____

摘 要

在 1970 年, Manin 利用 Brauer 群在 $X(k)$ 与 $X(\mathbb{A}_k)$ 之间构造了一个中间集合, 现在一般称为 Brauer–Manin 障碍, 通常这个集合比有理点集合更好判断是否非空。利用代数群上主齐性空间的理论, 可以构造另外一种障碍, 称之为下降障碍。在 1999 年, Skorobogatov 构造了一个好的代数簇, 其 Manin 障碍集是非空集但有理点是空集的例子。事实上, 在那个例子中, 下降障碍是空集, 从而一般来说障碍是不唯一的。但更糟糕的是, 在 2010 年, Poonen 构造了一个下降障碍也是非空集但无有理点的代数簇的例子。

本文是一个综述报告, 将主要介绍 Manin 障碍和下降障碍的基本理论, 并详细解释 Skorobogatov 构造的例子。

关键词: 有理点; Brauer–Manin 障碍; 下降障碍

ABSTRACT

In 1970, Manin constructed an intermediate set between $X(k)$ and $X(\mathbb{A}_k)$ via the theory of Brauer group. Now, it's called Brauer–Manin obstruction. Usually, this set is better than the set of rational points to judge whether it is non-empty. Using the theory of principle homogeneous spaces on algebraic groups, another kind of obstruction can be constructed, which is called descent obstruction. In 1999, Skorobogatov constructed a nice algebraic varieties, whose Manin obstruction set is a non-empty set but the set of rational points is empty set. In fact, in that example, the descent obstruction is empty set, so in general, obstruction is not unique. But to make matter worse, in 2010, Poonen constructed an example of algebraic varieties where descent obstruction is also non-empty set, but its rational points set is empty.

This article is a summary report. We will mainly introduce the basic theory of Manin obstruction and descent obstruction, and explain in detail about the example of Skorobogatov.

Key Words: Rational points; Brauer–Manin obstruction; Descent obstruction

目 录

第 1 章 引言	1
第 2 章 预备知识	2
2.1 障碍理论的一般讨论	2
2.2 代数和代数几何预备知识	3
2.3 Manin 障碍和下降障碍	8
第 3 章 下降障碍比 Manin 障碍更精细的例子	12
3.1 准备和辅助定理	12
3.2 构造	17
参考文献	21
致谢	23

符号说明

$\mathfrak{Ab}$	阿贝尔群范畴
$\mathbb{A}_k$	k 的阿代尔环
k_s	k 的可分闭包
$\bar{k}$	k 的代数闭包
Ω_k	k 的所有素位的集合
$E[m]$	$E(\bar{k})$ 的 m 阶挠元的集合
$\text{III}(E)$	E 的 <i>Tate – Shafarevich</i> 群
$L_i F$	F 的第 i 阶左导出函子
$R^i F$	F 的第 i 阶右导出函子
val_p	p 进赋值
$\bar{X}$	$X \times_k \bar{k}$

第 1 章 引 言

研究代数簇的有理点是数论中一个非常基本但是又很困难的问题，也就是，求多项式方程的有理解问题。一般我们希望研究代数簇是否有有理点，如果有，它是否满足弱逼近条件 ($X(k)$ 在 $X(\mathbb{A}_k)$ 中是否稠密)。早在上世纪，哈塞和闵可夫斯基就证明了，数域上的二次型定义的方程有解当且仅当在每个 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{R}$ 上有解，这被称为局部整体原则。于是人们就开始研究对于一般的方程，甚至是在一般的整体域 (比方说 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张)，研究局部整体原则和其失效的原因。

在 1970 年，Manin 利用 Brauer 群 ($H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m)$)，在 $X(k)$ 与 $X(\mathbb{A}_k)$ 之间构造了一个中间集合 $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ ，现在一般称为 Brauer–Manin 集，见定义 2.19。通常这个集合比有理点集合更好判断是否非空，并且能解释很多局部整体原则失效的原因，即 Manin 障碍非空。在 1999 年之前，人们不知道 Manin 障碍是否能解释所有好的代数簇局部整体原则失效的原因，1999 年 [19]Skorobogatov 构造了一个 Manin 障碍集是非空集但有理点是空集的好的代数簇的例子。1930 年 Chevalley 和 Weil 以及之后 (直到 2002 年) 的一些数学家的工作，利用主齐性空间的理论可以构造另外一种障碍， $X(\mathbb{A}_k)^{\text{descent}}$ ，称之为下降障碍，见 (2.2)。一般来说，下降障碍比 Manin 精细，见命题 2.15。事实上，在 Skorobogatov 的例子中，下降障碍是空集，从而下降障碍能解释局部整体原则失效的原因。但更糟糕的是，在 2010 年，Poonen 构造了一个下降障碍也是非空集并且无有理点的好的代数簇的例子，现在已知的所有障碍都无法解释。

本文是一篇综述报告，主要目的是介绍 Manin 障碍和下降障碍的基本理论，并且详细的解释 Skorobogatov 在 [19] 给出的例子。文章介绍的主要结果是：

定理 1.1 (定理 3.6 和定理 3.7) 在 $\mathbb{Q}$ 上存在好的代数簇，即 X 是光滑射影的，并且 $\overline{X}$ 是整的。其有理点 $X(\mathbb{Q}) = \phi$ ， $X(\mathbb{Q})^{\text{Br}} \neq \phi$ ，并且 $X(\mathbb{Q})^{\text{descent}} = \phi$ 。

第2章 预备知识

2.1 障碍理论的一般讨论

我们的问题是要研究方程的有理解，在代数几何中这相当于研究代数簇 X/k (分离的有限型的 k -概形) 的 k 点，也就是 $X(k) = \text{Hom}_{\text{spec}k}(k, X)$ 。如不作特别说明，本文考虑的基域都是代数数域。

一个很基本的问题是决定 $X(k)$ 是否为空集，我们知道，在局部域 (比如 $\mathbb{Q}_p, \mathbb{R}$) 解方程会容易的多，所以我们想考虑 $X(\mathbb{A}_k)$ 和 $X(k)$ 的关系。

定义 2.1 $\mathbb{A}_k = \prod'_{v \in \Omega_k} (k_v, \mathcal{O}_v) = \{(x_v) | \text{仅有限个 } v, x_v \notin \mathcal{O}_v\}$

$\mathbf{A}_{k,S} = \prod_{v \in S} k_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v$

$\mathcal{O}_{k,S} := \{a \in k : v(a) \geq 0, \text{ 对于任意 } v \notin S\}$

其中 S 是 Ω_k 的有限集。

注 因为 X/k 是分离的，所以 $X(k) \subseteq X(\mathbb{A}_k)$ 。参见 [9] 或 [14]。

我们想在 $X(\mathbb{A}_k)$ 和 $X(k)$ 之间构造一个中间集合，从现在的观点来看大多都是通过以下的方式进行构造的。

考虑一个函子 $F : \text{Schemes}^{opp} \rightarrow \text{Sets}$ 。对于任意的 k 代数 L ，将 $F(\text{spec}L)$ 记为 $F(L)$ 。

假设 $A \in F(X)$ 。对于任意的 k 代数 L ，定义 $ev_A : X(L) \rightarrow F(L)$ ， $x : \text{spec}L \rightarrow X$ ， $ev_A(x) = x^*(A) \in F(L)$ 。我们有以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \hookrightarrow & X(\mathbb{A}_k) \\ \downarrow ev_A & & \downarrow ev_A \\ F(k) & \longrightarrow & F(\mathbb{A}_k) \end{array} \quad (2.1)$$

令 $X(\mathbb{A}_k)^A = \{y \in X(\mathbb{A}_k) | ev_A(y) \in \text{im}(F(k) \rightarrow F(\mathbb{A}_k))\}$ ，由 (1.1) 知道， $X(k) \subseteq X(\mathbb{A}_k)^A$ 。

因此，我们定义

$$X(\mathbb{A}_k)^F := \bigcap_A X(\mathbb{A}_k)^A \supseteq X(k).$$

定义 2.2 如果 $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ ，但是 $X(\mathbb{A}_k)^F = \emptyset$ ，那我们说存在局部整体原则的 F 障碍。

注 事实上，通常这样的函子 F 是某种上同调理论，比如 $H^2(X, \mathbb{G}_m)$ ， $H^1(X, G)$ 等等。因此接下来主要围绕着上同调理论展开介绍。

2.2 代数和代数几何预备知识

令 G 是一个有限群, 称 M 是一个 G 模, 如果 M 有 $\mathbb{Z}[G]$ 模结构。两个 G 模之间的态射就是它们作为 $\mathbb{Z}[G]$ 模的态射。将 Mod_G 记为 G 模范畴。考虑函子 $Hom_G(\mathbb{Z}, -) : Mod_G \rightarrow \mathfrak{Ab}$, $\mathbb{Z}$ 是平凡 G 模, 即 G 作用平凡。所以 $Hom_G(\mathbb{Z}, A) = A^G$, 而且此函子左正合。

定义 2.3 $H^i(G, A) := R^i(Hom_G(\mathbb{Z}, A))$, 称为 G 的 A 系数的上同调群。

同样地, 考虑函子 $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} - : Mod_G \rightarrow \mathfrak{Ab}$ 。其右正合。

定义 2.4 $H_i(G, A) := L_i(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A)$, 称为 G 的 A 系数的同调群。

我们知道对于一个短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 导出函子可以诱导出长正合列。而且事实上, 群的上同调群和同调群分别诱导的长正合列可以用某种方式连接起来。

对于有限群 G 和 G 模 A , 定义范数映射, $N : A \rightarrow A, a \mapsto \sum_{g \in G} g.a$ 。设 I_G 是映射 $\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}, \sum_{g \in G} n_g g \mapsto \sum_{g \in G} n_g$ 的核。于是我们定义 Tate 上同调为:

$$\begin{cases} \hat{H}^q(G, A) = H^q(G, A), & q \geq 1. \\ \hat{H}^0(G, A) = A^G / NA, & q = 0. \\ \hat{H}^{-1}(G, A) = Ker N / I_G A, & q = -1. \\ \hat{H}^q(G, A) = H_{q-1}(G, A), & q \leq -2. \end{cases}$$

命题 2.1 若 G 是有限群, 而且有 G 模短正合序列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 则有以下长正合序列。

$$\cdots \rightarrow \hat{H}^{q-1}(G, C) \rightarrow \hat{H}^q(G, A) \rightarrow \hat{H}^q(G, B) \rightarrow \hat{H}^q(G, C) \rightarrow \hat{H}^{q+1}(G, A) \rightarrow \cdots$$

证明 参见 [15] 的定理 9.101。 ■

下面我们考虑 G 是循环群的时候, 假设 $G = \langle g \rangle$, 而且 $|G| = n$ 。考虑 $\mathbb{Z}[G]$ 中的两个元素。 $N = 1 + g + g^2 + \cdots + g^{n-1}, D = g - 1$ 。同时我们不改变符号的定义

$$N : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G], a \mapsto Na.$$

以及

$$D : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G], a \mapsto Da.$$

令

$$\epsilon : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}, \sum a_i g^i \mapsto \sum a_i.$$

注意到 $D(\sum a_i g^i) = (a_{n-1} - a_0) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{n-1} - a_i) g^i$, 于是 $im D \subset Ker \epsilon$ 。同样的, 对于 $\sum a_i g^i \in Ker \epsilon$, 即 $\sum a_i = 0$, 设 $N(\sum b_i g^i) = \sum a_i g^i$, 取 $b_0 = 0$, 可得 $b_m = -(\sum_{i=1}^m a_i)$, 于是 $Ker \epsilon = im D$ 。

命题 2.2 有限循环群的上同调群具有周期性，周期为 2。即有以下。

$$\hat{H}^q(G, A) = \text{Ker}(D)/\text{im}(N) = A^G/NA, \quad q \equiv 0(\text{mod}2),$$

$$\hat{H}^q(G, A) = \text{Ker}(N)/\text{im}(D) = \text{Ker}N/DA, \quad q \equiv 1(\text{mod}2).$$

证明 注意到有以下 $\mathbb{Z}$ 的预解式：

$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{D} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{D} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

现在将函子 $-\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ 和 $\text{Hom}_G(-, A)$ 作用在上面的长正合列上取同调群，由 Tate 上同调群的定义即证。 ■

下面介绍投射有限群的上同调。

定义 2.5 G 是投射有限群，如果它是有限离散群的逆向极限，拓扑取逆向极限诱导的拓扑，称为投射有限拓扑。

例 2.1 1. 所有有限群是投射有限的。

2. 根据无限伽罗瓦理论， $\text{Gal}(K_s/K) = \varprojlim_{L_i/K \text{ 有限}} \text{Gal}(L_i/K)$ 是投射有限群。

事实上，如果 G 是有限群，那么假设 $\mathcal{U}$ 是所有正规的开子群 $U \subseteq G$ 的族。则 $\mathcal{U}$ 构成 1 的基本邻域系，并且 G/U 是有限群， $G \simeq \varprojlim G/U$ 。见 [22] 引理 6.11.7。

定义 2.6 令 G 是一个投射有限群。一个离散 G 模是一个 G 模 A ， A 赋予离散拓扑，而且作用 $G \times A \rightarrow A$ 是连续的。

事实上 A 是任意 G 模，则 A 是离散 G 模当且仅当 $A = \bigcup A^U$ ， U 跑遍 G 的开子群。例如， K_s 便是一个离散 $\text{Gal}(K_s/K)$ 模。而且离散 G 模范畴构成阿贝尔范畴，记为 $\mathbf{C}_G$ ，并且有足够多的内射对象，因此我们可以以同样的手法定义其上同调群。

定义 2.7 考虑函子 $\mathbf{C}_G \rightarrow \mathbf{Ab}, A \rightarrow A^G$ ，定义 $H^i(G, A)$ 为其第 i 阶右导出函子。

事实上 $H^*(G, A) \simeq \varprojlim H^*(G/U, A^U)$ 。参见 [22] 定理 6.11.13。

下面我们做一个约定，对于扩张 $K \subseteq L$ ，将 $H^i(\text{Gal}(L/K), L^*)$ 简记为 $H^i(L/K, L^*)$ 。并且我们定义 K 的 Brauer 群 $Br(K)$ 为 $H^2(K_s/K, K_s^*)$ ，若 $\text{char} K = 0$ ，则 $Br(K) = H^2(\bar{K}/K, \bar{K}^*)$ 。

事实上，Brauer 可以用 Azumaya 代数来定义。

定义 2.8 设 A 是 k 上的有限维代数，则下列三条等价。见 [11] 命题 4.1.1 和 [14] 命题 1.5.2。

(1) A 是中心的，即 $Z(A) = k$ ，且是单代数。

(2) 存在域扩张 $k \subseteq L$ 和某个 n ，使得 $A \otimes_k L \simeq M_n(L)$ 。

(3) $A \otimes_k A^\circ \rightarrow \text{End}_k(A), a \otimes b \mapsto (x \mapsto axb, x \in A)$ 是同构。其中 A° 是 A 的反代数。

满足上面一条的 k 代数称为 k 上的 Azumaya 代数。

我们现在再次定义 k 的 Brauer 群。两个 k 代数 A, B 称为相似的，如果存在 n, m ，有 $A \otimes M_n(k) \simeq B \otimes M_m(k)$ ，这是一个等价关系，记为 $A \sim B$ 。于是考虑集合

$$\{\text{Azumaya } k\text{代数}\} / \sim,$$

这上面有自然的加法 $[A] + [B] := [A \otimes_k B]$ ，单位元是 $[k]$ ，根据定义 1.8 知道 $[A]^{-1} = [A^\circ]$ ，所以这构成一个阿贝尔群。将它记为 $Br_{Az}(k)$ 。

命题 2.3

$$Br_{Az}(k) \simeq Br(k).$$

证明 参考 [17]158 页。 ■

下面介绍一个类域论中的正合列，这对于我们引入 Brauer-Manin 障碍至关重要。

假设 K 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张或者 $\mathbb{F}_p((t))$ 的有限扩张，并且假定 κ 是其剩余域，那么 K_{nr} (K 的极大非分歧扩张) 的剩余域为 $\bar{\kappa}$ 。从而 $Gal(K_{nr}/K) = Gal(\bar{\kappa}/\kappa) = \hat{\mathbb{Z}}$ 。事实上， $Br(K)$ 与 $H^2(K_{nr}/K, K_{nr}^*)$ 同构。见 [17]181 页定理 1 和推论。

命题 2.4 存在同构 $inv_K : Br(K) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ，由以下映射给出。称为局部不变量。

$$H^2(K_{nr}/K, K_{nr}^*) \xrightarrow{v} H^2(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) \xleftarrow{\delta} Hom(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

每个映射皆为同构。于是 $inv = \gamma \circ \delta^{-1} \circ v$ 。

证明 我们只给出概要，具体见 [17] 的 12、13 章。

第一步，对于 L/K 是有限非分歧扩张，由正合列 $1 \rightarrow U_L \rightarrow L^* \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ ，并证明 $H^q(G, U_L) = 0$ ，可以得到 $H^2(L/K, L^*) \rightarrow H^2(Gal(L/K), \mathbb{Z})$ 是同构，通过取极限可以得到 $H^2(K_{nr}/K, K_{nr}^*) \rightarrow H^2(Gal(K_{nr}/K), \mathbb{Z})$ 是同构。

第二步，将 $H(\hat{\mathbb{Z}}, -)$ 作用在 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ 可以得到， $H^1(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq H^2(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ 。

最后，注意到 $Hom(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 。 ■

命题 2.5 根据整体类域论，有以下正合列。

$$0 \longrightarrow Br(k) \longrightarrow \bigoplus_v Br(k_v) \xrightarrow{inv_k} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

其中 inv_k 是局部不变量 inv_{k_v} 的和。

证明 见 [13] 定理 8.1.17。 ■

下面我们定义一个概形的 **Brauer** 群，因此需要平展上同调的理论。

定义 2.9 令 $f: X \rightarrow Y$ 是概形之间的态射。

(1) 称 f 在 $x \in X$ 处平坦，如果 $f_x^*: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ 使得 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是平坦的 $\mathcal{O}_{Y,y}$ 模。称 f 是平坦的，如果 f 在 X 处处平坦。

(2) f 称为忠实平坦的，如果 f 平坦且是满射。

(3) f 称为在 x 处局部有限展示，如果存在 y 的仿射开邻域 $V = \text{spec} A$ ， x 的仿射开邻域 $U = \text{spec} B$ ，使得 B 在 A 上是有限展示的。其中 $y = f(x)$ 。 f 称为局部有限展示，如果处处局部有限展示。

(4) f 称为 **fppf**，如果 f 局部有限展示并且平坦。

命题 2.6 (1) 开浸入是平坦的。

(2) 平坦性在基变换下不变。

(3) 平坦性在合成下不变。

定义 2.10 令 $f: X \rightarrow Y$ 是概形之间的态射。

(1) f 称为非分歧的，如果对于任意的 $x, y = f(x)$ ，有 $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$ ，并且 $\kappa(x)/\kappa(y)$ 是可分扩张。

(2) 称 f 是平展的 (etale)，如果 f 平坦而且非分歧。

命题 2.7 (1) 开浸入是平展的。

(2) 平展性在基变换下不变。

(3) 平展性在合成下不变。

定义 2.11 令 $\mathcal{C}$ 是一个范畴。一个在 $\mathcal{C}$ 上的 **Grothendieck** 拓扑 (事实上是预拓扑) 是一个集合 $\text{cov}(\mathcal{C})$ (称为覆盖)，其中的元素是一族有共同的目标对象的态射 $\{U_i \rightarrow U\}$ ，满足下列条件：

1. 若 $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{cov}(\mathcal{C})$ ，对于任意的映射 $\{V \rightarrow U\} \in \text{cov}(\mathcal{C})$ ，则 $U_i \times_U V$ 存在，并且 $\{U_i \times_U V \rightarrow V\} \in \text{cov}(\mathcal{C})$ 。

2. $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{cov}(\mathcal{C})$ ， $\{V_{ij} \rightarrow U_i\}$ ，那么 $\{V_{ij} \rightarrow U\} \in \text{cov}(\mathcal{C})$ 。

3. 若 $\Phi: U' \rightarrow U$ 是同构，则 $\{\Phi\} \in \text{cov}(\mathcal{C})$ 。

定义 2.12 令 X 是一个拓扑空间。令 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，其对象是 X 中开集，而且对于任意 $U, V \in \mathcal{C}$ ，

$$\text{Hom}(U, V) = \begin{cases} i, & \text{若 } U \subseteq V, i: U \rightarrow V \text{ 是包含映射。} \\ \phi, & \text{其他。} \end{cases}$$

令 $\text{cov}\mathcal{C}$ 是集族 $\{U_i \rightarrow U\}$ 使得 $\cup_i U_i = U$ 。则 $(\mathcal{C}, \text{cov}(\mathcal{C}))$ 是一个 **Grothendieck** 拓扑，称为经典的 **Grothendieck** 拓扑。

令 X 是一个概形。 X_{zar} 是拓扑空间 $\text{sp}(X)$ 的经典 **Grothendieck** 拓扑。

定义 2.13 给定概形 X , 取 $\mathcal{C} = \mathbf{Et}_X$, 其对象是概形 U 并且配有一个平展态射 $U \rightarrow X$, 其态射是平展态射。称 $\{\phi_i : U_i \rightarrow U\}$ 在 $\mathcal{C}$ 是覆盖, 如果 $\bigcup_i \phi_i(U_i) = U$ 。这定义了 **etale site** X_{et} 。

定义 2.14 固定概形 X , 取 $\mathcal{C} = \mathbf{Schemes}_X$ 。一个覆盖是一族 X 态射 $\{U_i \rightarrow U\}$, 使得 $\coprod U_i \rightarrow U$ 是 **fppf(fpqc)** 的。这定义了 **fppf site** X_{fppf} (**fpqc site** X_{fpqc})。

定义 2.15 一个范畴 $\mathcal{C}$ 上的阿贝尔群预层 $\mathcal{F}$ 是一个反变函子 $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 。

定义 2.16 令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbf{site}(\mathcal{C}, \mathbf{cov}(\mathcal{C}))$ 上的预层, 则 $\mathcal{F}$ 是层当且仅当

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

正合 (即第一个映射是单射, 且是右边两个映射之差的 **Ker**), 对于所有的覆盖 $\{U_i \rightarrow U\} \in \mathbf{cov}(\mathcal{C})$ 。

对于概形 X , 它的 $X_{Zar}, X_{et}, X_{fppf}, X_{fpqc}$ 上的层构成的范畴都是阿贝尔范畴 [11], 并且都有足够多的内射对象。于是我们将 X 的上同调定义为整体截面的导出函子。

例 2.2 (1) $\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a(U) = (\Gamma(\mathcal{O}_U, U), +)$, 对于任意平展态射 $U \rightarrow X$ 。

(2) $\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m(U) = \Gamma(\mathcal{O}_U, U)^*$, 对于任意平展态射 $U \rightarrow X$ 。

(3) 考虑 $(\mathbf{Speck})_{et}$ 上的阿贝尔层, 则定价于给出一个 $\mathbf{Gal}(k_s/k)$ 模, 见 [11]52、53 页或者 [14] 定理 6.4.6。

定义 2.17 $H_*^q(X, \mathcal{F}) := R^q(\Gamma(X_*, \mathcal{F}))$ 。其中 $*$ 可以是 $zar, et, fppf$ 。

注 在此, 我们收集一些结论。1. $H_{et}^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ 。

2. $H_{et}^q(\mathbf{Speck}, \mathcal{F}) \simeq H^q(\mathbf{Gal}(k_s/k), \mathcal{F}(k_s))$, 特别地, $H^q(\mathbf{Speck}, \mathbb{G}_m) \simeq H^q(k_s, k_s^*)$ 。

3. $H_{Zar}^1(X, \mathbb{G}_m) \simeq H_{et}^1(X, \mathbb{G}_m) \simeq H_{fppf}^1(X, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbf{Pic}(X)$

因此, 我们有理由将 **Brauer** 群定义为 $H_{et}^2(X, \mathbb{G}_m)$, 事实上还可以通过 **Azumaya** 代数去定义, 但这时候我们需要考虑的是 $\mathcal{O}_X$ 代数且作为 $\mathcal{O}_X$ 模是凝聚的, 具体见 [14] 定义 6.6.12 或者 [11]140 页。

用同样的办法也可以定义 **Cech** 上同调, 见 [11] 第三章第二节。

令 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴。令 $A \in \mathcal{C}$, A 的下降滤过是集族 $\{F^n(A)\}$, $F^n(A) \subseteq A$, 并且 $F^n(A) \subseteq F^{n'}(A)$, 若 $n \geq n'$ 。 $\mathcal{C}$ 中的滤过对象是 $\mathcal{C}$ 中的对象, 并带有一个滤过。

定义 2.18 [6] $\mathcal{C}$ 中的谱序列是一个序对 $E = (E_r^{p,q}, E^n)$ 满足以下。

(a) $E_r^{p,q} \in \mathcal{C}$, 通常 r 称为页数, 一般我们比较关心第 2 页 (易于计算)。而且一般我们可以考虑第一象限的谱序列, 所以可以假定 $p, q < 0$ 时, $E_r^{p,q} = 0$ 。

(b) 态射 $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ 使得 $d_r^{p+r, q-r+1} d_r^{p,q} = 0$, 称之为第 r 页的微分。

(c) 同构 $\alpha_r^{p,q} : \ker(d_r^{p,q}) / \operatorname{Im}(d_r^{p-r,q+r-1}) \rightarrow E_{r+1}^{p,q}$ 。即本页的同调信息在下一页。

(d) 滤过对象 $E^n \in \mathcal{C}$ 。我们假设对于任意固定的 (p, q) , 有 $d_r^{p,q} = 0$ 以及 $d_r^{p-r,q+r-1} = 0$ 当 r 充分大时, 由此得出 $E_r^{p,q}$ 在 r 充分大的时候会稳定下来, 我们将此对象定义为 $E_\infty^{p,q}$, 并且假定 $F^0 E^n = E^n, F^{n+1} E^n = 0$ 。

(e) 有同构 $\beta^{p,q} : E_\infty^{p,q} \rightarrow F^p E^n / F^{p+1} E^n$ 。

并且称 $E_r^{p,q}$ 收敛到 E^n , 一般记为 $E_2^{p,q} \Rightarrow E^n$ 。

容易定义两个谱序列 $E = (E_r^{p,q}, E^n), \tilde{E} = (\tilde{E}_r^{p,q}, \tilde{E}^n)$ 之间的态射, 即一族态射 $u_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow \tilde{E}_r^{p,q}, u^n : E^n \rightarrow \tilde{E}^n$, 与微分映射和滤过映射协调 (即满足明显的交换图)。谱序列构成一个加法范畴。谱序列函子是指某个范畴 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 上谱序列范畴的函子。

我们有著名的 Grothendieck 谱序列, 很多谱序列可以由其导出。

命题 2.8 ([6] 命题 2.4.1) 令 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{C}''$ 是阿贝尔范畴。假设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 的每个对象都同构于某个内射对象的子对象。考虑反变函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 以及 $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ 。假设 F, G 左正合, F 将内射对象映射为 G -循环对象。(即被 $R^q G, q > 0$ 零化的对象)。那么存在一个上同调谱序列函子从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}''$, 收敛到 $R(G \circ F)$ 。初始项为

$$E_2^{p,q}(A) = R^p G(R^q F(A)).$$

命题 2.9 (Hochschild-Serre 谱序列) 令 $\pi : X' \rightarrow X$ 是有限伽罗瓦覆盖, 伽罗瓦群为 G , 令 F 是 X_{et} 上的阿贝尔层, 则存在谱序列。

$$H^p(G, H^q(X'_{et}, F)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{et}, F).$$

2.3 Manin 障碍和下降障碍

假设 k 是整体域, X 是 k 上的代数簇, 那么存在 T 是 Ω_k 的有限集合, 并且存在 $\mathcal{O}_{k,T}$ 上分离的有限型的概形 $\mathcal{X}$, 其一般纤维是 X 。注意到 $\mathbb{A}_k$ 是 $\mathbb{A}_{k,S}$ 的正向极限。见 [3]246 页或 [14]95 页, 可以证明

$$\lim_{\longrightarrow} \mathcal{X}(\mathbb{A}_{k,S}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{A}_k) = X(\mathbb{A}_k)$$

$$\mathcal{X}(\mathbb{A}_{k,S}) \xrightarrow{\sim} \prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \notin S} \mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$$

因此, $X(\mathbb{A}_k)$ 可视为 $\prod_v X(k_v)$ 的子集。

对于 $A \in Br(X)$ 有类似的结论, 将在以下命题体现。

命题 2.10 若 $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)$, 固定 $A \in Br(X)$, 则对几乎所有 (除去有限项) 的 v 有 $A(x_v) = 0$ 。

证明 仅给出概要, 可参见 [3]249 页。

存在 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{O}_{k,S}$ 概形, 使得 A 是某个 $\mathcal{A} \in Br(\mathcal{X})$ 的像, 可假定 $x_v \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$, 对于任意 $v \notin S$, 从而 $A(x_v)$ 是某个 $\mathcal{A}(x_v) \in Br(\mathcal{O}_v)$ 的像, 注意到 $Br(\mathcal{O}_v) = 0$, 因此几乎所有 $A(x_v) = 0$ 。 ■

于是可以很轻松的给出 Manin 障碍的定义了。

定义 2.19 对于固定的 $A \in Br(X)$,

$$X(\mathbb{A}_k)^A := \{(x_v) \in X(\mathbb{A}_k) \mid \sum_v inv_v(A(x_v)) = 0\}.$$

$$X(\mathbb{A}_k)^{Br} := \bigcap_{A \in Br(X)} X(\mathbb{A}_k)^A.$$

而且有 $X(k) \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{Br} \subseteq X(\mathbb{A}_k)$ 。

注 对于包含关系, 只需注意到以下交换图。

$$\begin{array}{ccccccc} X(k) & \hookrightarrow & X(\mathbb{A}_k) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & Br(k) & \longrightarrow & \bigoplus_v Br(k_v) & \xrightarrow{\sum inv_v} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

定义 2.20 令 $G \rightarrow S$ 是一个 fppf 群概形。一个 S 上的 G 主齐性空间是一个 fppf S 概形 X 赋予了右 G 作用。(即对于任意的 T/S , $X(T)$ 有 $G(T)$ 右作用)。

$$X \times_S G \longrightarrow X$$

并且满足下列条件之一:

(i) 存在 fppf 基变换 $S' \rightarrow S$ 使得 $X_{S'}$ 有 $G_{S'}$ 作用, 并且在 S' 上同构于 $G_{S'}$, 其作用右乘 $G_{S'}$ 作用。

(ii) 态射

$$\begin{aligned} X \times_S G &\longrightarrow X \times_S X \\ (x, g) &\longmapsto (x, xg) \end{aligned}$$

是同构。

主齐性空间直觉上可以理解为是一个有单传递的 G 作用的空间。

命题 2.11 [14]179 页。令 $G \rightarrow S$ 是 fppf 群概形, X 是 S 上的 G 主齐性空间。则下列命题等价。

- (1) X 同构于平凡主齐性空间 (G 和其上的右乘作用)。
- (2) $X(S) \neq \emptyset$, 即 $X \rightarrow S$ 存在截面。
- (3) X 对应于 $\check{H}_{fppf}^1(S, G)$ 的零元素。

对应仿射的 S 群概形 G , 有以下 G 主齐性空间的分类。

命题 2.12 [14]181 页。 $G \rightarrow S$ 是仿射群概形, 并且 S 是局部诺特的概形。则有以下 (指定基点的) 同构。(即平凡主齐性空间对应到 $H_{fppf}^1(S, G)$ 的零元素)。

$$\{G - \text{主齐性空间}\} / \text{同构} \simeq H_{fppf}^1(S, G).$$

命题 2.13 [20]20, 21 页。 $G \rightarrow S$ 是 $fppf$ S 群概形, 令 P 是一个 S 上的右 G 主齐性空间, F 是一个仿射 S 概形并带有左 G 作用。则 $P \times_X F$ 在 G 作用下的商 Y 存在, 并且是仿射 X 概形, $(p, f) \mapsto (ps^{-1}, sf)$ 。

注 上述的 Y 称为 P 和 F 的收缩积 (Contracted product), 记为 $P \times^G F$ 。同时也称为 F 关于 P 的扭曲。

Q 是一个 X 上左 G 主齐性空间, 则存在逆主齐性空间 Q' (是右主齐性空间), 作为 X 概形是同构于 Q 的, 作用是 $x's := s^{-1}x'$ 。

因此, 如果有 X 上右 G 主齐性空间 P , 以及另一个右 G 主齐性空间 E , 那么定义它们的收缩积为 $P \times^G E'$ 。 E' 为逆。

我们大部分处理的是 X 和 P 都是 k 上的代数簇, G_X 是一个 k 上代数群 G 做基变换上来的, Z 是一个 k 上右 G 主齐性空间, $E = X \times_k Z$, 想求 P 与 E 的收缩积。令 $\sigma \in Z^1(Gal(\bar{k}/k), G)$, $[\sigma]$ 是 Z 的对应元素。那么收缩积 P^σ 可认为是 $\bar{P}$ 在以下作用的商, $(g, x) \mapsto (g(x)) \cdot \sigma_g^{-1}$ 。

命题 2.14 X 是 k 上的代数簇。令 G 是一个光滑的仿射代数群。假设 $f : Z \rightarrow X$ 是一个 G 主齐性空间, 并且 $\zeta \in H^1(X, G)$ 是其对应的类。那么对于任意 $\tau \in H^1(k, G)$, $f^\tau : Z^\tau \rightarrow X$ 是扭曲主齐性空间。则

$$X(k) = \bigcup_{\tau \in H^1(k, G)} f^\tau(Z^\tau(k)).$$

证明 容易知道

$$X(k) = \bigcup_{\tau \in H^1(k, G)} \{x \in X(k) : \zeta(x) = \tau\}.$$

($\zeta(x)$ 是取 f 在 x 处的纤维所对应的 $H^1(k, G)$ 上同调类)。

因此只需证, $\{x \in X(k) : \zeta(x) = \tau\} = f^\tau(Z^\tau(k))$ 。

$$x \in f^\tau(Z^\tau(k))$$

$\iff$ 纤维 Z_x^τ 是 k 上平凡 G^τ 主齐性空间 (命题 1.11)。

$\iff Z_x \times^G T^{-1}$ 是 k 上平凡 G^τ 主齐性空间。

$\iff Z_x \simeq T$ 作为 G 主齐性空间 (在两边的右侧取关于 T 的收缩积)。

$$\iff \zeta(x) = \tau$$

■

因此, 对于任意 $f : Z \rightarrow X$ 是 G 主齐性空间, 则 $X(k) \subseteq \bigcup_{\tau \in H^1(k, G)} f^\tau(Z^\tau(\mathbb{A}_k))$, 定义

$$\begin{aligned} X(\mathbb{A}_k)^f &= \bigcup_{\tau \in H^1(k, G)} f^\tau(Z^\tau(\mathbb{A}_k)), \\ X(\mathbb{A}_k)^{H^1(X, G)} &:= \bigcap_{\text{所有 } G \text{ 主齐性空间}} X(\mathbb{A}_k)^f, \\ X(\mathbb{A}_k)^{descent} &= \bigcap_{\text{所有光滑仿射代数群 } G} X(\mathbb{A}_k)^{H^1(X, G)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

命题 2.15 ([14] 命题 8.5.3) k 是整体域。 X 是正则拟射影的 k 代数簇。则

$$X(\mathbb{A}_k)^{descent} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{Br}.$$

注 这表明, X 性质不太差时下降障碍比 **Manin** 障碍精细, 我们在第二章会给出下降障碍严格比 **Manin** 障碍精细的例子。

第 3 章 下降障碍比 Manin 障碍更精细的例子

本章的目的是构造一个好的代数簇，其下降障碍为空集，Manin 障碍非空。

3.1 准备和辅助定理

定义 3.1 令 E 是在 k 上的椭圆曲线，一个 E 的 n 覆盖是指 (C, ψ) ，其中 C 是 k 上的 E 下的主齐性空间，作用为 $\mu: E \times C \rightarrow C$ ，并且满足下列交换图。

$$\begin{array}{ccc} E \times C & \xrightarrow{(n, \psi)} & E \times E \\ \downarrow \mu & & \downarrow + \\ C & \xrightarrow{\psi} & E \end{array} \quad (3.1)$$

注 一个 E 下的主齐性空间 C 是 n 覆盖，当且仅当 $[C] \in H^1(k, E)$ 能提升为 $H^1(k, E[n])$ 中的上链。

定义 3.2 一个 nm 覆盖 $\psi': C' \rightarrow E$ 称为是 $\psi: C \rightarrow E$ 的提升，如果存在 $\xi: C' \rightarrow C$ ，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccccc} & & (nm, \psi') & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ E \times C' & \xrightarrow{(m, \xi)} & E \times C & \xrightarrow{(n, \psi)} & E \times E \\ \downarrow \mu' & & \downarrow \mu & & \downarrow + \\ C' & \xrightarrow{\xi} & C & \xrightarrow{\psi} & E \\ & \searrow & \psi' & \nearrow & \end{array} \quad (3.2)$$

注 nm 覆盖 $\psi': C' \rightarrow E$ 是 n 覆盖 $\psi: C \rightarrow E$ 的提升，当且仅当 C 对应于 $H^1(k, E[n])$ 的上闭链是 C' 在 $H^1(k, E[nm])$ 的上闭链在 $m_*: H^1(k, [nm]) \rightarrow H^1(k, E[n])$ 的像。那么即有 $m[C'] = [C] \in H^1(k, E)$ 。见 [2]。

下面我们来构造一类 k 上的光滑恰当的曲面，最终我们构造的例子属于这一类曲面。构造主要基于以下两点。

(1) E 是 k 上的椭圆曲线，一个 2 覆盖 $\psi: C \rightarrow E$ 可被提升至 4 覆盖 $\psi': C' \rightarrow E$ ，而且 C 有一个度 (degree) 为 2 的 0-闭链。

(2) $\rho: D \rightarrow D$ 是无不动点的对合映射， D 是亏格为 1 的曲线。

令 $\xi: C' \rightarrow C$ ，满足 $\psi' = \psi \circ \xi$ 。这是一个伽罗瓦覆盖，伽罗瓦群为 $E[2]$ 。特别地， ξ 诱导在 Pic^0 上的映射， $\xi^*: E \rightarrow E$ 是 E 中乘以 2 的映射。由黎曼罗赫定理， C 上 degree 为 2 的除子，诱导了映射 $h: C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ ，使得它是二重覆盖。见 [21]517, 509 页。记 $\sigma: C \rightarrow C$ 为超椭圆对合 (involution) 映射， σ_* 在 C 的雅克比簇 E 上的作用是乘以 -1 。

令 $D' = D/\rho$, 且满足 $\phi : D \rightarrow D'$ (商映射) 是非分歧的二重覆盖。设 J, J' 分别为 D, D' 的雅克比簇。则 ρ_* 在 J 上的作用是平凡的, 显然 $\phi^* : J' \rightarrow J$ 是 degree 为 2 的同源 (isogeny) 映射。

令 X 是 $Y = C \times D$ 在无不动点对合映射 (σ, ρ) 下的商, $f : Y \rightarrow X$ 。这是一个光滑恰当的几何整的曲面, 也被称为超椭圆曲面或双椭圆曲面。参见 [1]。其几何不变量为 $\kappa = 0, p_g = 0, q = 1, (K_X)^2 = 0, b_1 = b_2 = 0$ 。

由 [4] 命题 3.1, $\pi_2 : Y \rightarrow D$ 诱导的 $X \rightarrow D'$ 是 Albanese 映射。从而 G 模 $Pic^0(\bar{X}) \simeq Pic^0(\bar{D}') \simeq J'(\bar{k})$ 。见 [8] 定理 3.3(iii)。最后, 令 $Y' = C' \times D$, 令 $\pi : Y' \rightarrow D$ 是第二个分量的投影。令 $f' : Y' \rightarrow X$ 为非分歧覆盖的复合, 即 $f' = (\xi, Id) \circ f$ 。

记 $G = Gal(\bar{k}/k)$ 。

定理 3.1 假设 k 满足 $H^3(k, \mathbb{G}_m) = 0$ 。若 E 无阶恰好为 2 的 k 点, 则 $f'^*(Br(X)) \subseteq \pi^*(Br(D)) \subseteq Br(Y')$ 。

对于任意的 k -代数簇 X 有 Hochschild-Serre 谱序列:

$$H^p(k, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \implies H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m).$$

当 X 是恰当 (proper) 几何连通和几何约化时, $H^0(\bar{X}, \mathbb{G}_m) = \mathcal{O}_X^* = \bar{k}^*$ 。

从谱序列中可读出以下正合列。

$$0 \rightarrow F^1 E^2 / F^2 E^2 \simeq E_\infty^{1,1} \rightarrow E_2^{1,1} = H^1(k, Pic(\bar{X})) \rightarrow E_2^{3,0} = H^3(k, \bar{k}^*) = 0$$

$$0 \longrightarrow F^1 E^2 \longrightarrow Br(X) = F^0 E^2 \longrightarrow F^0 E^2 / F^1 E^2 \simeq E_\infty^{0,2} \hookrightarrow E_2^{0,2} = Br(\bar{X})^G$$

由谱序列函子的函子性知, 其中 $b : \bar{X} \rightarrow X$ 是自然的映射。

$$\begin{array}{ccc} F^0 E^2 = Br(X) & \longrightarrow & F^0 E^2 / F^1 E^2 \hookrightarrow Br(\bar{X})^G \\ \downarrow b^* & & \downarrow \\ \tilde{F}^0 \tilde{E}^2 = Br(\bar{X}) & \xrightarrow{id} & \tilde{F}^0 \tilde{E}^2 / \tilde{F}^1 \tilde{E}^2 = Br(\bar{X}) \hookrightarrow \tilde{E}_2^{0,2} = Br(\bar{X}) \end{array} \quad (3.3)$$

于是 $Br_1(X) := \ker(Br(X) \rightarrow Br(\bar{X})^G) = F^1 E^2$, 又有以下交换图, 其中第一行是短正合列。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^2 E^2 & \longrightarrow & F^1 E^2 & \longrightarrow & F^1 E^2 / F^2 E^2 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \parallel & & \\ Br(k) & \xlongequal{\quad} & E_2^{2,0} & \longrightarrow & Br_1(X) & & \end{array} \quad (3.4)$$

结合之前两个短正合列有 $0 \rightarrow im(Br(k) \rightarrow Br_1(X)) \rightarrow Br_1(X) \rightarrow H^1(k, Pic(X)) \rightarrow 0$, 由谱序列的函子性, 对于结构映射 $s : X \rightarrow k$ 有 (并且

注意到 $Br(\bar{k}) = 0$ 。

$$\begin{array}{ccccc} F^0 E^2 = Br(k) & \longrightarrow & Br_1(X) = F^1 E^2 & \longrightarrow & Br(X) \\ s^* \uparrow & & s^* \uparrow & & s^* \uparrow \\ \tilde{F}^0 \tilde{E}^2 = Br(k) & \longrightarrow & Br(k) = \tilde{F}^1 \tilde{E}^2 & \longrightarrow & Br(k) \end{array} \quad (3.5)$$

这表明 $Br(k)$ 的像落在 $Br_1(X)$ 中, 则 $Br_0(X) = im(Br(k) \rightarrow Br(X)) = im(Br(k) \rightarrow Br_1(X))$, 从而有

$$0 \rightarrow Br_0(X) \rightarrow Br_1(X) \rightarrow H^1(k, Pic(X)) \rightarrow 0.$$

对于光滑射影的曲面, 根据 [7] 或 [11] 第 5 章 3.29(d) 有: $Br(\bar{X})$ 的可除子群 $Br(\bar{X})_{div} \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2 - \rho}$, b_2 是 $\bar{X}$ 的第二 betti 数, $\rho = rank(NS(\bar{X}))$ 。 $Br(\bar{X})/Br(\bar{X})_{div} \simeq Hom(NS_{tor}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为 G 模。在我们的例子中, $p_g = 0$, 从而 $b_2 = \rho$, 因此 $Br(\bar{X}) \simeq Hom(NS_{tor}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 。

下面我们来分析 G 模 $Pic(\bar{X})$ 和 $f^* : Pic(\bar{X}) \rightarrow Pic(\bar{Y})$ 的性质。令 Γ 为由 (σ, ρ) 生成的 Y 的循环自同构子群, $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。对于覆盖 $f : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ (覆盖的 Galois 群是 Γ) 和 $Id : \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}$ 利用 Hochschild-Serre 谱序列函子的函子性, 用 (2.3)、(2.5) 类似的方法可以得到 $f^* : Br(\bar{X}) \rightarrow Br(\bar{Y})$ 的像落在 $Br(\bar{Y})^\Gamma$ 中。由 [3] 命题 4.6.3, $Pic_{\bar{C} \times \bar{D}}^0 \simeq Pic_{\bar{C}}^0 \times Pic_{\bar{D}}^0$ 。又由于 (σ, ρ) 在 $E(\bar{k}) \times J(\bar{k})$ 的作用是乘以 $(-1, 1)$, 从而我们得到以下交换图, 其中行是正合的。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J'(\bar{k}) & \longrightarrow & Pic(\bar{X}) & \longrightarrow & NS(\bar{X}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (0, \phi^*) & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ 0 & \longrightarrow & E[2](\bar{k}) \times J(\bar{k}) & \longrightarrow & Pic(\bar{Y})^\Gamma & \longrightarrow & NS(\bar{Y})^\Gamma \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E(\bar{k}) \times J(\bar{k}) & \longrightarrow & Pic(\bar{Y}) & \longrightarrow & NS(\bar{Y}) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3.6)$$

为了分析 $Br_1(\bar{X})$ 的结构, 我们需要以下引理。

引理 3.2 有 G 模同构, $NS(\bar{X})_{tor} = E[2](\bar{k})$ 。

证明 记 $f^* : NS(\bar{X}) \rightarrow NS(\bar{Y})$ 的核为 K 。因为 Y 是阿贝尔曲面, 所以 $NS(\bar{Y})$ 是无挠的, 所以 $K = NS(\bar{X})_{tor}$ 。从而只需证 $K \simeq E[2]$ 作为 G 模。根据 Hochschild-Serre 谱序列,

$$H^p(\Gamma, H^q(\bar{Y}, \mathbb{G}_m)) \implies H^{p+q}(\bar{X}, \mathbb{G}_m).$$

从谱序列可读出以下正合列。

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0} = F^1 E^1 \rightarrow E^1 \rightarrow F^0 E^1 / F^1 E^1 = E_\infty^{0,1} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{0,1} \rightarrow E_2^{0,1} = \text{Pic}(\bar{Y})^{\Gamma} \rightarrow E_2^{2,0} = H^2(\Gamma, \bar{k}^*)$$

整合起来，有。

$$0 \longrightarrow H^1(\Gamma, \bar{k}^*) \longrightarrow \text{Pic}(\bar{X}) \xrightarrow{f^*} \text{Pic}(\bar{Y})^{\Gamma} \longrightarrow H^2(\Gamma, \bar{k}^*)$$

$\Gamma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ，由循环群的上同调公式可知， $H^1(\Gamma, \bar{k}^*)^* = \text{Ker} N / I_G A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ， $H^2(\Gamma, \bar{k}^*) = A^G / NA = 0$ 。

即有 $\text{Ker} f^* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ， $\text{Coker} f^* = 0$ 。由 (2.5) 与蛇形引理可得，

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow K \rightarrow E[2](\bar{k}) \rightarrow 0,$$

从而 $K \simeq E[2](\bar{k})$ 。 ■

推论 3.3 $Br(\bar{X})^* = 0$ ，从而 $Br(X) = Br_1(X)$ 。

证明 见 [18]93, 94 页，Wei 配对 $E[2](\bar{k}) \times E[2](\bar{k}) \rightarrow \mu_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是 G 不变的以及非退化的。从而 $E(2)$ 是自对偶。于是由引理 2.2， $Br(\bar{X}) = \text{Hom}(NS(\bar{X})_{\text{tor}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(E(2)(\bar{k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = E[2](\bar{k})$ 。根据定理 2.1 的假设知 $E[2](\bar{k})^G = E[2](k) = 0$ ，所以 $Br(\bar{X})^G = E[2](k) = 0$ 。 ■

引理 3.4 $f^*(Br(X))/Br_0(Y) \subseteq Br_1(Y)/Br_0(Y) = H^1(k, \text{Pic}(\bar{Y}))$ 包含在由 $E(\bar{k}) \times J(\bar{k}) = \text{Pic}^0(\bar{Y}) \hookrightarrow \text{Pic}(\bar{Y})$ 诱导的映射， $H^1(k, E)[2] \times H^1(k, J)$ 的像中。

证明 由谱序列的函子性有以下交换图，其中每行是正合的。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Br_0(X) & \longrightarrow & Br(X) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(\bar{X})) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ 0 & \longrightarrow & Br_0(X) & \longrightarrow & Br(X) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(\bar{X})) \longrightarrow 0 \end{array}$$

因此只需分析最右端的 f^* 。

注意到 $\bar{Y}$ 是阿贝尔曲面，因此 $NS(\bar{Y})^{\Gamma} \subset NS(\bar{Y})$ 是无挠的。因为 f 是二重覆盖，由定义可知 $\forall R \in \text{Div}(\bar{X})$ 有 $f_* f^*(R) = 2R$ 。这表明作为 $\mathbb{Q}$ 线性空间有， $NS(\bar{X}) \otimes \mathbb{Q} \simeq NS(\bar{Y})^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}$ 。 X 的第二 betti 数 $b_2 = 2$ ，且有 $b_2 = \rho = 2$ ，从而 $\dim(NS(\bar{Y})^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}) = 2$ 。

事实上， $\phi_1 : \bar{Y} \rightarrow \bar{C}, \phi_2 : \bar{Y} \rightarrow \bar{D}$ 的纤维构成此线性空间的一组基。记 $l = \{pt\} \times \bar{D}, m = \bar{C} \times \{pt\}$ ，由相交数的定义 ([21]548,550 页) 可知 $l^2 = m^2 = 0, lm = 1$ ，显然 $l, m \in NS(\bar{Y})^{\Gamma}$ 。假定 $al + bm = 0$ 在 $NS(\bar{Y})^{\Gamma}$ ，那么 $al + bm \sim_{\text{alg}} 0$ ，那么 $l(al + bm) = 0, m(al + bm) = 0$ ，即有 $b = a = 0$ ，这表明 l, m 在

$NS(\bar{Y})^F \otimes \mathbb{Q}$ 中线性无关, 从而是其一组基。并且显然 G 在 l, m 上作用是平凡的。于是 $NS(\bar{Y})^F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 作为平凡 G 模。由于 G 是投射有限群, 但 $\mathbb{Z}$ 无有限子群, 从而 $H^1(G, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(G, \mathbb{Z}) = 0$ 。

用函子 $H^1(k, -)$ 作用在图 (2.6) 上 (事实上, 需要将 $NS(\bar{Y})^F$ 替换成 $\text{Pic}(\bar{Y})$ 的像), 可得以下交换图, 其中中间的行是正合的。

$$\begin{array}{ccc} & & H^1(k, \text{Pic}(\bar{X})) \\ & & \downarrow \\ H^1(k, E[2]) \times H^1(k, J) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(\bar{Y})^F) \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(k, E) \times H^1(k, J) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(\bar{Y})) \end{array}$$

因此只需将 $H^1(k, \text{Pic}(\bar{X}))$ 在 $H^1(k, \text{Pic}(\bar{Y})^F)$ 提升至 $H^1(k, E[2]) \times H^1(k, J)$, 根据交换图便得证。 ■

证明 让我们回到定理 2.1 的证明。注意到以下交换图。

$$\begin{array}{ccccccc} Br(X) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(\bar{X})) & & H^1(k, E[2]) \times H^1(k, J) & (3.7) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ Br_0(Y) \hookrightarrow Br_1(Y) & \twoheadrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(\bar{Y})) & \longleftarrow & H^1(k, E) \times H^1(k, J) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ Br_0(Y') \hookrightarrow Br_1(Y') & \twoheadrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(\bar{Y}')) & \longleftarrow & H^1(k, E) \times H^1(k, J) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ Br_0(D) \hookrightarrow Br_1(D) & \twoheadrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(\bar{D})) & \longleftarrow & H^1(k, J) \end{array}$$

由之前的讨论知道, $\bar{Y}' \rightarrow \bar{Y}$ 诱导在雅克比簇 $E(\bar{k}) \times J(\bar{k})$ 上的映射是 $(2, 1)$ 即在 E 是乘以 2 的映射。

并且注意到正合列,

$$0 \longrightarrow E[2] \longrightarrow E \xrightarrow{[2]} E.$$

将 $H^1(k, -)$ 作用在其上知, $H^1(k, E[2]) \rightarrow H^1(k, E) \rightarrow H^1(k, E)$ 复合为零, 而且 ρ 在 J 上作用平凡。于是 (2.7) 最右端的两个竖直箭头复合等于 $(0, id)$, 而且 (2.7) 右下角的竖直箭头是自然嵌入。

于是结合引理 2.4 与简单的追图可知, $f'^*(Br(X))/Br_0(\bar{Y}')$ 落在 $H^1(k, J) \rightarrow H^1(k, \text{Pic}(\bar{D})) \rightarrow H^1(k, \text{Pic}(\bar{Y}'))$ 中, 将 $H^1(k, \text{Pic}(\bar{D}))$ 的元素提升至 $Br_1(D)$, 由交换图知 $f'^*(Br(X))/Br_0(\bar{Y}')$ 落在 $\pi^*(Br_1(D))/Br_0(\bar{Y}')$ 中, 又 $Br_1(D) \subseteq Br(D)$, 从而 $f'^*(Br(X))/Br_0(\bar{Y}')$ 落在 $\pi^*(Br(D))/Br_0(\bar{Y}')$, 所以 $f'^*(Br(X)) \subseteq \pi^*(Br(D))$ 。 ■

3.2 构造

命题 3.5 (a) 令 C 是由以下方程定义的亏格为 1 的曲线,

$$y^2 = g(x),$$

其中 $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 是 k 上可分的四次多项式。那么 C 可以赋予一个二重覆盖 $\psi : C \rightarrow E$,

$$E : u^2 = v^3 - 27Iv - 27J,$$

其中 $I = 12ae + c^2$, $J = 72ace - 27ad^2 - 2c^3$, 使得纤维 $\psi^{-1}([0])$ 是 $y = 0$ 定义的方程。

(b) 令 $K = k[x]/(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$, 令 $\theta = \bar{x} \in K$, 假若 a 在 k^*/k^{*2} , 可表示成某个 $Nm_{K/k}(\epsilon)$, $\epsilon \in K$ 。那么存在 $C' \subset \mathbb{P}_k^3$, 使得 C' 是 E 的四重覆盖, 并且是二重覆盖 $\phi : C \rightarrow E$ 的提升。而且事实上 $[C'] \in \text{III}(E)$ 。

(c) 若 $C(k) = \emptyset$, 则 $[C']$ 在 $H^1(k, E)$ 的阶恰好为 4。

证明 参见 [19] 附录 A 和 [10]。 ■

下面我们来构造例子, 下面将第一节的 k 取为 $\mathbb{Q}$, 由 [13] 命题 8.3.9, 可知 $H^3(\mathbb{Q}, \mathbb{G}_m) = 0$, 因此符合定理 2.1 的假设。取 E 是 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线, 由如下方程定义。

$$y^2 = x^3 - 1221.$$

由 Rubin 和 Kolyvagin 的工作 (见 [19] 附录 A), 其秩为 0。根据 [5] 的命题 1 可计算出其挠部分 $E(\mathbb{Q})_{\text{tor}} = 0$, 于是 $E(\mathbb{Q}) = 0$ 。

由命题 2.5 知 C 由以下方程给出, $y^2 = 3(t^4 - 54t^2 - 117t - 243) = g(t)$ 。并且可以赋予二重覆盖映射 $\psi : C \rightarrow E$, 而且存在 C' 是它的提升, $\psi' : C' \rightarrow E$ 是四重覆盖。

因为 $E(\mathbb{Q}) = 0$, 所以 $C(\mathbb{Q}) = \emptyset$, 因为 $\psi'^{-1}([0])$ 为 $3(t^4 - 54t^2 - 117t - 243) = 0 = t^4 + 54t^2 - 117t - 243$, 其不可约 (可用 matlab 分解因式), 因此无解。

取 $p(x) = x^2 + 1, q(x) = x^2 + 2$, 注意到它们的结式为 -1 , 而且它们在 $\mathbb{Q}$ 上取正值。

令 $D \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$ 是光滑恰当 (proper) 亏格为 1 的曲线, 由以下方程给出。

$$y^2 = x^2 + 1, \quad z^2 = x^2 + 2.$$

很显然 D 在无穷远有有理点。令 $\rho : D \rightarrow D$ 将 (x, y, z) 映到 $(x, -y, -z)$ 的对合映射。由 $p(x), q(x)$ 的构造, 可知 ρ 无不动点。于是 $D' = D/\rho$ 是由以下方程给出的椭圆曲线。

$$w^2 = (x^2 + 1)(x^2 - 1).$$

令 $\psi : D \rightarrow D'$ 是自然的商映射。

与之前一样，我们定义 $Y = C \times D$ ， X 是作用 (σ, ρ) 的商， $f : Y \rightarrow X$ 。 X 可由以下方程定义。

$$y^2 = 3(t^4 - 54t^2 - 117t - 243)(x^2 + 1), z^2 = 3(t^4 - 54t^2 - 117t - 243)(x^2 + 2).$$

沿用上一节的记号 $Y' = C \times D$ ， $f' : Y' \rightarrow X$ 。

定理 3.6 (a) $X(\mathbb{Q}) = \phi$ 。

(b) $\forall R \in D(\mathbb{Q}), \{P_v\} \in C'(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ ， f' 将 $\{(P_v, R)\} \in Y'(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 映到 $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{Br}$ ，特别地有 $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{Br} \neq \phi$ 。

证明 (a) 覆盖 $f : Y \rightarrow X$ 是在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 下的主齐性空间。 $H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ 。由于

$$X(\mathbb{Q}) = \bigcup_{a \in H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} f^a(Y^a(\mathbb{Q}))$$

$$Y^a = C^a \times D^a, C^a : y^2 = ag(t), D^a : y^2 = ap(x), z^2 = aq(x).$$

假设 (t_0, x_0, y_0) 是 X 的 $\mathbb{Q}_p$ 点，并且 $y_0 z_0 \neq 0$ ，则 $val_p(g(t_0))$ 是偶数。

事实上，若 $val_p(x_0) > 0$ ，则 $val_p(p(x_0)) = 0$ (因为 $p(x) = x^2 + 1$)。则 $val_p(g(t_0)) = 2val_p(y_0)$ 。

若 $val_p(x_0) = 0$ ，那么 $val_p(p(x_0) - q(x_0)) = val_p(1) = 0$ 。又 $val_p(p(x_0)), val_p(q(x_0)) \geq 0$ ，故而必有一个取等号，从而 $val_p(g(t_0)) = 2val_p(y_0)$ 。

若 $val(x_0) < 0$ ，则 $val_p(p(x_0)) = 2val_p(x_0)$ ，从而 $val_p(g(t_0)) = 2(val_p(y_0) - val_p(x_0))$ 。

所以 $g(t) = \pm 1$ 模 $\mathbb{Q}^{*2}$ 。于是若 $Y^a(\mathbb{Q}) \neq \phi$ ，则 $a = \pm 1$ 。于是有分解，

$$X(\mathbb{Q}) = f(Y(\mathbb{Q})) \cup f^-(Y^-(\mathbb{Q})).$$

其中 C^-, D^- 是将 $g(t), p(x), q(x)$ 的系数乘以 -1 。由之前知 $C(\mathbb{Q}) = \phi$ 。而且 $D^-(\mathbb{Q}) = \phi$ ，因为

$$D^- : y^2 + x^2 + 1 = 0, z^2 + x^2 + 2 = 0.$$

所以 $X(\mathbb{Q}) = \phi$ 。

(b) $(P_v, R) : \text{speck}_v \rightarrow Y', \forall A \in Br(X), A((P_v, R)) = (f'(P_v, R))^*(A) \in Br(k_v)$ 。想证明 $\{(P_v, R)\} \in Y'(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 被 f' 映到 $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{Br}$ 。即证明，

$$\sum_{v \in \Omega_k} inv_v A((P_v, R)) = \sum_{v \in \Omega_k} inv_v (P_v, R)^* f'^*(A) = 0.$$

即证明

$$\sum_{v \in \Omega_k} inv_v (P_v, R)^*(B) = 0, \forall B \in f'^*(Br(X)).$$

由定理 2.1, $f'^*(Br(X)) \subset \pi^*(Br(D))$, 从而需证明

$$\sum_{v \in \Omega_k} inv_v(P_v, R)^* \pi^*(A) = 0, \forall A \in Br(D).$$

即证

$$\sum_{v \in \Omega_k} inv_v R^*(D) = 0,$$

由类域论的正合列得证。 ■

下面我们来证明其下降障碍集为空集。

根据 BSD 猜想有, $\text{III}(E) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ 。故在假定 BSD 猜想成立的情况下, 之前命题 2.5 的 C' 是使得 $2^i[C'] = [C]$, i 达到最大的 C' 。

由 Rubin 的结果 [16] 定理 A, 注 3, 528 页, 有 $\text{III}(E)$ 有限, 所以我们下面取使得 i 最大且 $2^i[C'] = [C]$ 的 $C' \in \text{III}(E)$ (但是我们保持之前的记号, 包括 ξ)。

根据 [12] I.6.18, $\text{III}(E)$ 中的元素能被任意素数整除。也就是, $\exists [C''] \in H^1(k, E)$, 使得 $2[C''] = [C']$, C'' 是在 E 下的主齐性空间。即 C'' 是 C' 的提升, 记 $\xi' : C' \rightarrow C$ 由图 (2.2) 可知 ξ 诱导在 E 上的作用是乘以 2。

令 $Y'' = C'' \times D$, 考虑以下覆盖。

$$f'' : C'' \times D \rightarrow Y' = C' \times D \rightarrow Y = C \times D \rightarrow X.$$

$f'' = f \circ (\xi, Id) \circ (\xi', Id)$ 。从而 $f'' : Y'' \rightarrow X$ 是在 $G_1 = E[2^i] \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的主齐性空间。由之前 σ 的定义知, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 $E[2^i]$ 的作用是乘以 -1 。

定理 3.7 主齐性空间 $f'' : Y'' \rightarrow X$ 的任意扭曲 (twisted) 形式 $(f'')^\alpha : (Y'')^\alpha \rightarrow X$ 的阿代尔点为空。作为推论, X 的下降障碍集合为空。

证明 假若存在 α , $(Y'')^\alpha(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ 。

令 $\alpha \in Z^1(k, G_1)$, $(f'')^\alpha : (Y'')^\alpha \rightarrow X$ 为其扭曲形式。因为 $E[2^i]$ 在 G_1 正规, 于是 G_1^α 包含 $E[2^i]^\alpha$ 。 $(Y'')^\alpha / E[2^i]^\alpha$ 是在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 下的 X 上的齐性空间。事实这是某个 $Y \rightarrow X$ 的扭曲形式。即某个 $Y \rightarrow X$ 的扭曲形式 $Y^\tau \rightarrow X$, 在定理 2.6 的证明过程中知道至少 $[\tau] = \pm 1$, 但是 $[\tau] = -1$ 时, $D^-(\mathbb{R}) = \emptyset$, 所以必须 $[\tau] = 1$ 。也就是 $(Y'')^\alpha / E[2^i]^\alpha \simeq Y$ 。由正合列

$$1 \rightarrow E[2^i] \rightarrow G_1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

得到

$$H^1(k, E[2^i]) \rightarrow H^1(k, G_1) \rightarrow H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

也就是存在 $\beta \in Z^1(k, E[2^i])$, 使得 α 是 β 的像。所以 $(Y'')^\alpha \rightarrow Y$ 是 $Y'' \rightarrow Y$ 关于 β 的扭曲形式。 $E[2^i]$ 在 D 上的作用为平凡作用, 因此 $(Y'')^\alpha = (C'')^\beta \times D$ 。

$(C'')^\beta$ 是 E 的 2^{i+1} 重覆盖, 并且是 $2[(C'')^\beta] = [C']$, 从而 $2^{i+1}[(C'')^\beta] = [C]$ 。而且 $(C'')^\beta(\mathbb{A}_Q) \neq \phi$, 从而 $(C'')^\beta \in \text{III}(E)$, 但这与 C' 的取法矛盾。
得证。

■

参 考 文 献

- [1] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*, volume 34 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.
- [2] J. W. S. Cassels. Arithmetic on curves of genus 1. III. The Tate-Šafarevič and Selmer groups. *Proc. London Math. Soc.* (3), 12:259–296, 1962.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène and A. N. Skorobogatov. *The Brauer–Grothendieck Group*, volume 71 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer International Publishing, 2021.
- [4] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov, and Peter Swinnerton-Dyer. Double fibres and double covers: paucity of rational points. *Acta Arith.*, 79(2):113–135, 1997.
- [5] J. Gebel, A. Pethő, and H. G. Zimmer. On Mordell’s equation. *Compositio Math.*, 110(3):335–367, 1998.
- [6] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d’algèbre homologique. *Tohoku Math. J.* (2), 9:119–221, 1957.
- [7] Alexander Grothendieck. Le groupe de Brauer. I,II,III. Exemples et compléments. In *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, volume 3 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 88–188. North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [8] Alexander Grothendieck. Technique de descente et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. VI. Les schémas de Picard: propriétés générales. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 7*, pages Exp. No. 236, 221–243. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [9] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [10] J. R. Merriman, S. Siksek, and N. P. Smart. Explicit 4-descents on an elliptic curve. *Acta Arith.*, 77(4):385–404, 1996.
- [11] James S. Milne. *Étale cohomology*, volume 33 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [12] James S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. BookSurge, LLC, Charleston, SC, second edition, 2006.
- [13] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.

- [14] Bjorn Poonen. *Rational points on varieties*, volume 186 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [15] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.
- [16] Karl Rubin. Tate-Shafarevich groups and L -functions of elliptic curves with complex multiplication. *Invent. Math.*, 89(3):527–559, 1987.
- [17] Jean-Pierre Serre. *Local fields*, volume 67 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979. Translated from the French by Marvin Jay Greenberg.
- [18] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, second edition, 2009.
- [19] A. N. Skorobogatov. Beyond the Manin obstruction. *Invent. Math.*, 135(2):399–424, 1999.
- [20] A. N. Skorobogatov. *Torsors and rational points*, volume 144 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [21] Ravi Vakil. *The Rising Sea: Foundations Of Algebraic Geometry*. 2017. Available at math.stanford.edu/~vakil/216blog/.
- [22] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

致 谢

值此论文完成之际，我想感谢一路走来时所有关心我、帮助我、和我讨论问题的老师、同学、朋友。

特别地，感谢梁永祺老师一直积极主动的支持我们参加各种暑期学校、会议、讨论班，以及这次论文写作的指导。感谢曹阳老师和张磊老师这学期组织的 etale 上同调讨论班。感谢盛茂老师讲授的代数拓扑课程，是使我将来可能选择 motivic homotopy 这一方向的一部分原因。

最后我要感谢养育我的父母，如果不是你们的养育，不可能有现在的我。