



代数簇上有理点的障碍理论

答辩人： 方日鑫

中国科学技术大学，数学科学学院

May 23, 2021

大纲

- 1 背景介绍
- 2 预备知识
- 3 构造
- 4 总结与展望

大纲

- 1 背景介绍
- 2 预备知识
- 3 构造
- 4 总结与展望

背景

- 研究代数簇的有理点是数论中一个非常基本但是又很困难的问题。
 - 数域上的二次超曲面有解当且仅当在每个 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{R}$ 上有解，这被称为局部整体原则。
 - 局部整体原则对于一般的方程 (代数簇) 是否都成立？
-
- 显然，答案是否定的。
 - 为了研究局部整体原则失效的原因，我们需要研究 $X(k)$ 与 $X(\mathbb{A}_k)$ 的关系。

背景

- 研究代数簇的有理点是数论中一个非常基本但是又很困难的问题。
- 数域上的二次超曲面有解当且仅当在每个 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{R}$ 上有解，这被称为局部整体原则。
- 局部整体原则对于一般的方程 (代数簇) 是否都成立？
- 显然，答案是否定的。
- 为了研究局部整体原则失效的原因，我们需要研究 $X(k)$ 与 $X(\mathbb{A}_k)$ 的关系。

背景

- 研究代数簇的有理点是数论中一个非常基本但是又很困难的问题。
 - 数域上的二次超曲面有解当且仅当在每个 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{R}$ 上有解，这被称为局部整体原则。
 - 局部整体原则对于一般的方程 (代数簇) 是否都成立？
-
- 显然，答案是否定的。
 - 为了研究局部整体原则失效的原因，我们需要研究 $X(k)$ 与 $X(\mathbb{A}_k)$ 的关系。

背景

- 研究代数簇的有理点是数论中一个非常基本但是又很困难的问题。
 - 数域上的二次超曲面有解当且仅当在每个 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{R}$ 上有解，这被称为局部整体原则。
 - 局部整体原则对于一般的方程 (代数簇) 是否都成立？
-
- 显然，答案是否定的。
 - 为了研究局部整体原则失效的原因，我们需要研究 $X(k)$ 与 $X(\mathbb{A}_k)$ 的关系。

背景

- 研究代数簇的有理点是数论中一个非常基本但是又很困难的问题。
- 数域上的二次超曲面有解当且仅当在每个 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{R}$ 上有解，这被称为局部整体原则。
- 局部整体原则对于一般的方程 (代数簇) 是否都成立？
- 显然，答案是否定的。
- 为了研究局部整体原则失效的原因，我们需要研究 $X(k)$ 与 $X(\mathbb{A}_k)$ 的关系。

背景

- 研究代数簇的有理点是数论中一个非常基本但是又很困难的问题。
- 数域上的二次超曲面有解当且仅当在每个 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{R}$ 上有解，这被称为局部整体原则。
- 局部整体原则对于一般的方程 (代数簇) 是否都成立？
- 显然，答案是否定的。
- 为了研究局部整体原则失效的原因，我们需要研究 $X(k)$ 与 $X(\mathbb{A}_k)$ 的关系。

发展历史

- 在 1970 年, Manin 利用 Brauer 群, 在 $X(k)$ 和 $X(\mathbb{A}_k)$ 间构造了一个中间集合 $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$. 称为 Brauer-Manin 集合。
- Brauer-Manin 集合可以解释很多局部整体原则失效的原因, 也就是 $X(\mathbb{A}_k)^{Br} = \emptyset$ 。
- 一个自然的问题是, Brauer-Manin 障碍是否可以解释所有局部整体原则失效的原因。
- 1999 年, Skorobogatov 在 $\mathbb{Q}$ 上构造了一个好的代数簇, 并且其 Brauer-Manin 障碍非空。

发展历史

- 在 1970 年, Manin 利用 Brauer 群, 在 $X(k)$ 和 $X(\mathbb{A}_k)$ 间构造了一个中间集合 $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$. 称为 Brauer-Manin 集合。
- Brauer-Manin 集合可以解释很多局部整体原则失效的原因, 也就是 $X(\mathbb{A}_k)^{Br} = \emptyset$ 。
- 一个自然的问题是, Brauer-Manin 障碍是否可以解释所有局部整体原则失效的原因。
- 1999 年, Skorobogatov 在 $\mathbb{Q}$ 上构造了一个好的代数簇, 并且其 Brauer-Manin 障碍非空。

发展历史

- 在 1970 年, Manin 利用 Brauer 群, 在 $X(k)$ 和 $X(\mathbb{A}_k)$ 间构造了一个中间集合 $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$. 称为 Brauer-Manin 集合。
- Brauer-Manin 集合可以解释很多局部整体原则失效的原因, 也就是 $X(\mathbb{A}_k)^{Br} = \emptyset$.
- 一个自然的问题是, Brauer-Manin 障碍是否可以解释所有局部整体原则失效的原因。
- 1999 年, Skorobogatov 在 $\mathbb{Q}$ 上构造了一个好的代数簇, 并且其 Brauer-Manin 障碍非空。

发展历史

- 在 1970 年, Manin 利用 Brauer 群, 在 $X(k)$ 和 $X(\mathbb{A}_k)$ 间构造了一个中间集合 $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$ 。称为 Brauer-Manin 集合。
- Brauer-Manin 集合可以解释很多局部整体原则失效的原因, 也就是 $X(\mathbb{A}_k)^{Br} = \emptyset$ 。
- 一个自然的问题是, Brauer-Manin 障碍是否可以解释所有局部整体原则失效的原因。
- 1999 年, Skorobogatov 在 $\mathbb{Q}$ 上构造了一个好的代数簇, 并且其 Brauer-Manin 障碍非空。

发展历史

- 在 1970 年, Manin 利用 Brauer 群, 在 $X(k)$ 和 $X(\mathbb{A}_k)$ 间构造了一个中间集合 $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$. 称为 Brauer-Manin 集合。
- Brauer-Manin 集合可以解释很多局部整体原则失效的原因, 也就是 $X(\mathbb{A}_k)^{Br} = \emptyset$ 。
- 一个自然的问题是, Brauer-Manin 障碍是否可以解释所有局部整体原则失效的原因。
- 1999 年, Skorobogatov 在 $\mathbb{Q}$ 上构造了一个好的代数簇, 并且其 Brauer-Manin 障碍非空。

发展历史

- 1930 年 Chevalley 和 Weil 以及之后 (直到 2002 年) 的一些数学家的工作, 利用主齐性空间的理论可以构造另外一种障碍, $X(\mathbb{A}_k)^{descent}$, 称之为下降障碍。
- 对于不太差的代数簇来说, 下降障碍比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 事实上, 在 Skorobogatov 的例子中, 下降障碍集为空, Brauer-Manin 障碍非空。也就是, 下降障碍严格比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 但更糟糕的是, 2010 年 Poonen 构造了一个好的代数簇, 其下降障碍也是非空集并且无有理点的例子, 现在已知的所有障碍都无法解释。

发展历史

- 1930 年 Chevalley 和 Weil 以及之后 (直到 2002 年) 的一些数学家的工作, 利用主齐性空间的理论可以构造另外一种障碍, $X(\mathbb{A}_k)^{descent}$, 称之为下降障碍。
- 对于不太差的代数簇来说, 下降障碍比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 事实上, 在 Skorobogatov 的例子中, 下降障碍集为空, Brauer-Manin 障碍非空。也就是, 下降障碍严格比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 但更糟糕的是, 2010 年 Poonen 构造了一个好的代数簇, 其下降障碍也是非空集并且无有理点的例子, 现在已知的所有障碍都无法解释。

发展历史

- 1930 年 Chevalley 和 Weil 以及之后 (直到 2002 年) 的一些数学家的工作, 利用主齐性空间的理论可以构造另外一种障碍, $X(\mathbb{A}_k)^{descent}$, 称之为下降障碍。
- 对于不太差的代数簇来说, 下降障碍比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 事实上, 在 Skorobogatov 的例子中, 下降障碍集为空, Brauer-Manin 障碍非空。也就是, 下降障碍严格比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 但更糟糕的是, 2010 年 Poonen 构造了一个好的代数簇, 其下降障碍也是非空集并且无有理点的例子, 现在已知的所有障碍都无法解释。

发展历史

- 1930 年 Chevalley 和 Weil 以及之后 (直到 2002 年) 的一些数学家的工作, 利用主齐性空间的理论可以构造另外一种障碍, $X(\mathbb{A}_k)^{descent}$, 称之为下降障碍。
- 对于不太差的代数簇来说, 下降障碍比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 事实上, 在 Skorobogatov 的例子中, 下降障碍集为空, Brauer-Manin 障碍非空。也就是, 下降障碍严格比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 但更糟糕的是, 2010 年 Poonen 构造了一个好的代数簇, 其下降障碍也是非空集并且无有理点的例子, 现在已知的所有障碍都无法解释。

发展历史

- 1930 年 Chevalley 和 Weil 以及之后 (直到 2002 年) 的一些数学家的工作, 利用主齐性空间的理论可以构造另外一种障碍, $X(\mathbb{A}_k)^{descent}$, 称之为下降障碍。
- 对于不太差的代数簇来说, 下降障碍比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 事实上, 在 Skorobogatov 的例子中, 下降障碍集为空, Brauer-Manin 障碍非空。也就是, 下降障碍严格比 Brauer-Manin 障碍精细。
- 但更糟糕的是, 2010 年 Poonen 构造了一个好的代数簇, 其下降障碍也是非空集并且无有理点的例子, 现在已知的所有障碍都无法解释。

大纲

- 1 背景介绍
- 2 预备知识
- 3 构造
- 4 总结与展望

记号和约定

- $\mathcal{A}b$: 阿贝尔范畴
- Ω_k : k 的所有素位的集合
- $\mathbb{A}_k$: $\prod'_{v \in \Omega_k} (k_v, \mathcal{O}_v) = \{(x_v) | \text{仅有限个 } v, x_v \in k_v, x_v \notin \mathcal{O}_v\}$
- k_s : k 的可分闭包
- $\bar{k}$: k 的代数闭包
- $\text{III}(E)$: E 的 Tate-Shafarevich 群
- $\bar{X}$: $X \times_k \bar{k}$

若无特殊说明，以下讨论中的基域皆为代数数域。

- 构造障碍的一般方法

考虑一个函子 $F : Schemes^{opp} \rightarrow Sets$ 。对于任意的 k 代数 L ，将 $F(spec L)$ 记为 $F(L)$ 。

假设 $A \in F(X)$ 。对于任意的 k 代数 L ，定义

$ev_A : X(L) \rightarrow F(L)$, $x : spec L \rightarrow X$, $ev_A(x) = x^*(A) \in F(L)$ 。

我们有以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \hookrightarrow & X(\mathbb{A}_k) \\ \downarrow ev_A & & \downarrow ev_A \\ F(k) & \longrightarrow & F(\mathbb{A}_k) \end{array} \quad (1)$$

令 $X(\mathbb{A}_k)^A = \{y \in X(\mathbb{A}_k) | ev_A(y) \in im(F(k) \rightarrow F(\mathbb{A}_k))\}$ ，由 (1) 知道， $X(k) \subseteq X(\mathbb{A}_k)^A$ 。

定义 1

- 因此，我们定义

$$X(\mathbb{A}_k)^F := \bigcap_A X(\mathbb{A}_k)^A \supseteq X(k).$$

- 如果 $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ ，但是 $X(\mathbb{A}_k)^F = \emptyset$ ，那我们说存在局部整体原则的 F 障碍。
- 事实上，通常这样的函子 F 是某种上同调理论，比如 $H^2(-, \mathbb{G}_m)$ ， $H^1(-, G)$ 等等。

定义 2

域 k 的 Brauer 群 $Br(k)$ 定义为 $H^2(Gal(k_s/k), k_s^*)$ 。

事实上, Brauer 群可以用 Azumaya 代数定义。

定义 3

设 A 是 k 上的有限维代数, 则下列三条等价。

(1) A 是中心的, 即 $Z(A) = k$, 且是单代数。

(2) 存在域扩张 $k \subseteq L$ 和某个 n , 使得 $A \otimes_k L \simeq M_n(L)$ 。

(3) $A \otimes_k A^\circ \rightarrow \text{End}_k(A), a \otimes b \mapsto (x \mapsto axb, x \in A)$ 是同构。其中 A° 是 A 的反代数。

满足上面一条的 k 代数称为 k 上的 Azumaya 代数。

我们现在再次定义 k 的 **Brauer 群**。两个 k 代数 A, B 称为相似的, 如果存在 n, m , 有 $A \otimes M_n(k) \simeq B \otimes M_m(k)$, 这是一个等价关系, 记为 $A \sim B$ 。于是考虑集合

$$\{\text{Azumaya } k \text{ 代数}\} / \sim,$$

这上面有自然的加法 $[A] + [B] := [A \otimes_k B]$, 单位元是 $[k]$, 根据定义 3 知道 $[A]^{-1} = [A^\circ]$, 所以这构成一个阿贝尔群。将它记为 $Br_{Az}(k)$ 。

命题 1

$$Br(k) \simeq Br_{Az}(k)$$

由类域论得到以下的正合列，这对我们引入 Brauer-Manin 障碍至关重要。

命题 2

$$0 \longrightarrow Br(k) \longrightarrow \bigoplus_v Br(k_v) \xrightarrow{\sum_v inv_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$inv_v : Br(k_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 为局部不变量。

为了定义 Brauer-Manin 障碍，我们还需要定义一般概形的 Brauer 群。事实上，我们应该用 **etale** 上同调去定义，当考虑的概形为 $Spec k$ 时，**etale** 上同调群同构于 **Galois** 上同调群。

定义 4

概形 X 的 Brauer 群为 $H_{et}^2(X, \mathbb{G}_m)$ 。

- 事实上还可以通过 Azumaya 代数去定义 $Br_{Az}(X)$, 但这时候我们需要考虑的是 $\mathcal{O}_X$ 代数, 且作为 $\mathcal{O}_X$ 模是凝聚的。
- $Br_{Az}(X)$ 和 $Br(X)$ 的关系可以参考 Gabber 的结果。

于是可以很轻松的给出 Manin 障碍的定义了。

对于固定的 $A \in Br(X)$,

$$X(\mathbb{A}_k)^A := \{(x_v) \in X(\mathbb{A}_k) \mid \sum_v inv_v(A(x_v)) = 0\}.$$

$$X(\mathbb{A}_k)^{Br} := \bigcap_{A \in Br(X)} X(\mathbb{A}_k)^A.$$

注意到以下交换图。

$$\begin{array}{ccccccc} X(k) & \hookrightarrow & X(\mathbb{A}_k) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 \longrightarrow Br(k) & \longrightarrow & \oplus_v Br(k_v) & \xrightarrow{\sum inv_v} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- 从而我们有 $X(k) \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{Br} \subseteq X(\mathbb{A}_k)$ 。

定义 5

令 $G \rightarrow S$ 是一个 **fppf** 群概形。一个 S 上的 G 主齐性空间是一个 **fppf** S 概形 X 赋予了右 G 作用。(即对于任意的 T/S , $X(T)$ 有 $G(T)$ 右作用)。

$$X \times_S G \longrightarrow X$$

并且满足下列条件之一:

(i) 存在 **fppf** 基变换 $S' \rightarrow S$ 使得 $X_{S'}$ 有 $G_{S'}$ 作用, 并且在 S' 上同构于 $G_{S'}$, 其作用右乘 $G_{S'}$ 作用。

(ii) 态射

$$\begin{aligned} X \times_S G &\longrightarrow X \times_S X \\ (x, g) &\longmapsto (x, xg) \end{aligned}$$

是同构。

命题 3

$G \rightarrow S$ 是仿射群概形, 并且 S 是局部诺特的概形。则有以下 (指定基点的) 同构。(即平凡主齐性空间对应到 $H_{fppf}^1(S, G)$ 的零元素)。

$$\{G\text{-主齐性空间}\} / \text{同构} \simeq H_{fppf}^1(S, G).$$

命题 4

$G \rightarrow S$ 是 $fppf$ S 群概形, 令 P 是一个 S 上的右 G 主齐性空间, F 是一个仿射 S 概形并带有左 G 作用。则 $P \times_X F$ 在 G 作用下的商 Y 存在, 并且是仿射 X 概形, $(p, f) \mapsto (ps^{-1}, sf)$ 。

- 我们大部分处理的是 X 和 P 都是 k 上的代数簇, Z 是一个 k 上右 G 主齐性空间, $E = X \times_k Z$, 想求 P 与 E 的收缩积。令 $\sigma \in Z^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), G)$, $[\sigma]$ 是 Z 的对应元素。那么收缩积 P^σ 可认为是 $\bar{P}$ 在以下作用的商, $(g, x) \mapsto (g(x)) \cdot \sigma_g^{-1}$ 。

命题 5

X 是 k 上的代数簇。令 G 是一个光滑的仿射代数群。假设 $f: Z \rightarrow X$ 是一个 G 主齐性空间, 并且 $\zeta \in H^1(X, G)$ 是其对应的类。那么对于任意 $\tau \in H^1(k, G)$, $f^\tau: Z^\tau \rightarrow X$ 是扭曲主齐性空间。则

$$X(k) = \bigcup_{\tau \in H^1(k, G)} f^\tau(Z^\tau(k)).$$

因此, 对于任意 $f: Z \rightarrow X$ 是 G 主齐性空间, 则
 $X(k) \subseteq \bigcup_{\tau \in H^1(k, G)} f^\tau(Z^\tau(\mathbb{A}_k))$, 定义

$$X(\mathbb{A}_k)^f = \bigcup_{\tau \in H^1(k, G)} f^\tau(Z^\tau(\mathbb{A}_k)),$$

$$X(\mathbb{A}_k)^{H^1(X, G)} := \bigcap_{\text{所有 } G \text{ 主齐性空间}} X(\mathbb{A}_k)^f,$$

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{descent}} = \bigcap_{\text{所有光滑仿射代数群 } G} X(\mathbb{A}_k)^{H^1(X, G)}. \quad (2)$$

命题 6

k 是整体域。 X 是正则拟射影的 k 代数簇。 则

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{descent}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{PGL} = X(\mathbb{A}_k)^{Br}.$$

(Hochschild-Serre 谱序列)

令 $\pi: X' \rightarrow X$ 是有限伽罗瓦覆盖, 伽罗瓦群为 G , 令 F 是 X_{et} 上的阿贝尔层, 则存在谱序列。

$$H^p(G, H^q(X'_{et}, F)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{et}, F).$$

主定理

在 $\mathbb{Q}$ 上存在好的代数簇, 即 X 是光滑射影的, 并且 $\overline{X}$ 是整的。其有理点 $X(\mathbb{Q}) = \phi$, $X(\mathbb{Q})^{Br} \neq \phi$, 并且 $X(\mathbb{Q})^{descent} = \phi$ 。

大纲

- 1 背景介绍
- 2 预备知识
- 3 构造**
- 4 总结与展望

下面我们来构造一类 k 上的光滑恰当的曲面，最终我们构造的例子属于这一类曲面。构造主要基于以下两点。

- (1) E 是 k 上的椭圆曲线，一个 2 覆盖 $\psi: C \rightarrow E$ 可被提升至 4 覆盖 $\psi': C' \rightarrow E$ ，而且 C 有一个度 (degree) 为 2 的 0-闭链。
- (2) $\rho: D \rightarrow D$ 是无不动点的对合映射， D 是亏格为 1 的曲线。

- 令 $\xi: C' \rightarrow C$, 满足 $\psi' = \psi \circ \xi$ 。记 $\sigma: C \rightarrow C$ 为超椭圆对合 (involution) 映射, σ_* 在 C 的雅克比簇 E 上的作用是乘以 -1 。
- 令 $D' = D/\rho$, 且满足 $\phi: D \rightarrow D'$ (商映射) 是非分歧的二重覆盖。设 J, J' 分别为 D, D' 的雅克比簇。则 ρ_* 在 J 上的作用是平凡的, 显然 $\phi^*: J' \rightarrow J$ 是 degree 为 2 的同源 (isogeny) 映射。
- 令 X 是 $Y = C \times D$ 在无不动点对合映射 (σ, ρ) 下的商, $f: Y \rightarrow X$ 。这是一个光滑恰当的几何整的曲面, 也被称为超椭圆曲面或双椭圆曲面。其几何不变量为 $\kappa = 0, p_g = 0, q = 1, (K_X)^2 = 0, b_1 = b_2 = 0$ 。
- 最后, 令 $Y' = C' \times D$, 令 $\pi: Y' \rightarrow D$ 是第二个分量的投影。令 $f': Y' \rightarrow X$ 为非分歧覆盖的复合, 即 $f' = (\xi, Id) \circ f$ 。

定理 2

假设 k 满足 $H^3(k, \mathbb{G}_m) = 0$ 。若 E 无阶恰好为 2 的 k 点, 则 $f'^*(Br(X)) \subseteq \pi^*(Br(D)) \subseteq Br(Y')$ 。

- 在具体的构造中, 取 $k = \mathbb{Q}$, 并且取 E , 使得 $E(\mathbb{Q}) = 0$ 。
- 可以取 E 由以下方程定义。 $y^2 = x^3 - 1221$ 。 C 由以下方程给出, $y^2 = 3(t^4 - 54t^2 - 117t - 243)$ 。
- D 由以下方程给出。 $y^2 = x^2 + 1$, $z^2 = x^2 + 2$ 。
- X 可以以下方程定义。

$$y^2 = 3(t^4 - 54t^2 - 117t - 243)(x^2 + 1), z^2 = 3(t^4 - 54t^2 - 117t - 243)(x^2 + 2).$$

定理 3

(a) $X(\mathbb{Q}) = \phi$.

(b) $\forall R \in D(\mathbb{Q}), \{P_v\} \in C'(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, f' 将 $\{(P_v, R)\} \in Y'(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 映到 $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{Br}$, 特别地有 $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{Br} \neq \phi$.

证明概要

- $f: Y \rightarrow X$ 是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 主齐性空间, 利用命题 5 的分解, 并注意 C 和 D 有理点的情况。
- 只需证明 $\{(P_v, R)\}$ 与 $f'^*(Br(X))$, 这由定理 2 和类域论的正合列可得。

- 由 Rubin 的结果, 有 $\text{III}(E)$ 有限, 所以我们下面取使得 i 最大且 $2^i[C'] = [C]$ 的 $C' \in \text{III}(E)$ (但是我们保持之前的记号, 包括 ξ)。
- 根据 $\text{III}(E)$ 中的元素能被任意素数整除。也就是, $\exists [C''] \in H^1(k, E)$, 使得 $2[C''] = [C']$, C'' 是在 E 下的主齐性空间。即 C'' 是 C' 的提升, 记 $\xi' : C' \rightarrow C$ 。

定理 4

主齐性空间 $f'' : Y'' \rightarrow X$ 的任意扭曲 (twisted) 形式 $(f'')^\alpha : (Y'')^\alpha \rightarrow X$ 的阿代尔点为空。作为推论, X 的下降障碍集合为空。

证明概要

- 假若存在 Y'' 的扭曲形式的阿代尔点非空, 那么可以得到, C'' 的某个扭曲形式 $(C'')^\beta$ 是 E 的 2^{i+1} 重覆盖, 并且是 $2[(C'')^\beta] = [C']$, 从而 $2^{i+1}[(C'')^\beta] = [C]$ 。
- 且 $(C'')^\beta$ 局部有解, 于是 $(C'')^\beta \in \text{III}(E)$ 。
- 但这与 C' 取法矛盾。

大纲

- 1 背景介绍
- 2 预备知识
- 3 构造
- 4 总结与展望

- 由定理 3 和定理 4, 我们得到了主定理。
- 事实上, 用 **etale** 同伦理论可以在一定程度上解释 2010 年 Poonen 给出的例子。也就是 k 上好的代数簇其下降障碍非空, 但有理点为空集。

Theorem

Let $f : X \rightarrow C$ be a smooth proper family of Châtelet surfaces over an elliptic curve C with $|C(k)| < \infty$. Suppose that for all $a \in C(k)$, we have $X_a(k) = \emptyset$. Suppose furthermore that $\text{III}(C)$ has trivial divisible subgroup, and that for every real place v of k , every $a \in S(k)$, and every $b \in X_a(k_v)$, the map $\pi_1(X(k_v), b) \rightarrow \pi_1(S(k_v), a)$ is surjective (vacuous if k is totally imaginary). Then $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét}, \text{Br}} = \emptyset$

- 粗略地说, 代数簇 X 的 **etale** 同伦类型是由 X 的 **cech nerve** $\pi_0(\mathcal{U} \times \cdots \times \mathcal{U})$ 给出的单纯集, 再取拓扑实现之后得到的拓扑空间。记为 $Et(X)$ 。其中 $\mathcal{U} \rightarrow X$ 是 **etale cover**。
- 事实上需要取 **hyper covering**。
- 在 Theorem 的证明中需要建立 **fibration** $X \rightarrow C$ 对应的 $Et(X) \rightarrow Et(C)$ 之间的同伦群的纤维序列。
- 2017 年, Tony Feng 用相对 **etale** 同伦理论证明了有限域上好的代数曲面 (事实上, 对偶数维的代数簇也成立) 上的 **Artin-Tate** 配对

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{AT}} : \text{Br}^d(X)_{\text{nd}}[\ell^\infty] \times \text{Br}^d(X)_{\text{nd}}[\ell^\infty] \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

是交错的 (alternating)。

证明 Artin-Tate 配对是交错的最重要的一步是需要证明以下是交错的。 X 维数为 $2d$ 。

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_n : H_{\text{et}}^{2d}(X; \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}(d)) \times H_{\text{et}}^{2d}(X; \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}(d)) \rightarrow \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}$$

by

$$\langle x, y \rangle_n := \int x \smile \beta y.$$

$$\beta : H_{\text{et}}^i(X; \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}(d)) \rightarrow H_{\text{et}}^{i+1}(X; \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}(d))$$

- 通过建立 **etale** 拓扑下的 Steenrod 运算 Sq^i , 我们有

$$x \smile \beta(x) = \widetilde{Sq}^{2d}(\beta(x)) \in H_{\text{et}}^{4d+1}(X; \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}(2d)).$$

- 受吴文俊工作的启发, 我们需要去寻找 **etale** 拓扑下的吴类, 因为

$$v_i \smile x = Sq^i x \text{ for all } x \in H^i(M; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

v_i 被称为吴类。

- 用 **etale** 同伦理论的框架可以证明这是存在的。

- **etale** 同伦理论是给概形 X 指定了一个 (pro) 拓扑空间，这似乎损失了一些信息。
- 1998 年，Voevodsky 直接在代数簇上建立了一种同伦理论， $\mathbb{A}^1$ 同伦理论，或称 **Motivic** 同伦理论。
- 他成功利用这一理论解决了 Milnor K 群猜想和 Bloch-Kato 猜想。
- 从现在看来，**Motivic** 同伦理论在算术几何或是代数拓扑中都有很好的应用，而且故事还远未结束。

谢谢!