电动力学 笔记

原生生物

* 刘川老师《电动力学》笔记

* 如无特殊说明，采用爱因斯坦求和约定与张量记号，即**重复指标代表求和**；δ_{ij} 为克罗内克记号，当且仅当 $i=j$ 时为 1，否则为 0；ϵ_{ijk} 为只有 $1i, 2j, 3k$ 位置为 1，其余为 0 的矩阵的行列式值；∂_j 代表 $\frac{\partial}{\partial x_j}$，更多下标时类似。

* 积分上下限不写时默认对全空间 $\mathbb{R}^n$ 积分。

目录

一　电磁场与麦克斯韦方程组

§1.1　真空中的麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla\times\vec{B}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{J}\\ \nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

* 符号含义：$\vec{E}$ 电场强度 [电场]、$\vec{B}$ 磁场强度 [磁场]、ρ 电荷密度、$\vec{J}$ 电流密度、ϵ_0 真空介电常数、μ_0 真空磁导率常数
* 真空介电常数与真空磁导率常数满足 $c^2=\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$
* 四个方程分别反映电场高斯定律、安培环路定律与麦克斯韦位移电流、法拉第电磁感应定律、磁场高斯定律

洛伦兹力：电磁场中电荷密度、电流密度 $\rho,\vec{J}$，则单位**体积**受力 [力密度]$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}$。

§1.2　麦克斯韦方程组的对称性

1. 线性性

   方程组对 $\rho,\vec{J},\vec{E},\vec{B}$ 线性，即 $\rho_1,\vec{J}_1$ 生成 $\vec{E}_1,\vec{B}_1$，$\rho_2,\vec{J}_2$ 生成 $\vec{E}_2,\vec{B}_2$，则 $a\rho_1+b\rho_2,a\vec{J}_1+b\vec{J}_2$ 生成 $a\vec{E}_1+b\vec{E}_2,a\vec{B}_1+b\vec{B}_2$。

2. 洛伦兹协变性

   方程组在洛伦兹变换的意义下不变，即满足狭义相对论性，将在后续章节讨论。

3. 规范对称性

   通过电磁势体现，下节讨论。

4. 分立对称性

   宇称变换：$\vec{x}\to-\vec{x}$，此时 ρ 不变，$\vec{J}\to-\vec{J}$，∇ 变号，于是 $\vec{E}\to-\vec{E},\vec{B}\to\vec{B}$。

   * 将空间反射不变的矢量称为**轴矢量**，变号的矢量称为**极矢量**。

   时间反演变换：$t\to-t$，此时 $\rho,$ 不变，$\vec{J}\to-\vec{J}$，$\frac{\partial}{\partial t}$ 变号，于是 $\vec{E}\to\vec{E},\vec{B}\to-\vec{B}$。

§1.3　电磁势与规范对称性

由于 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，根据数学知识可知存在**矢势** $\vec{A}$ 使得 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，此时计算得第三个方程可写为

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

于是根据数学知识可知存在**标势** Φ 使得 $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\Phi$。

此时剩下两个方程化为

$$\begin{cases}\nabla^2\Phi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\big(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\big)=-\mu_0\vec{J}\end{cases}$$

* 这里 $\nabla^2\vec{A}$ 指对每个分量用 Laplace 算子作用再拼成矢量。
* 只有静电学中，即 $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0$ 时，标势才代表电势。

对某标量场 Λ，作变换

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

可计算验证 $\vec{E}, \vec{B}$ 不变，这种对称性称为**规范对称性**，此变换称为**规范变换**。
由于规范不变性，可要求 $\vec{A}, \Phi$ 满足某些特殊的条件 [规范]，例如**库伦规范** $\nabla \cdot \vec{A} = 0$，或**洛伦茨规范**

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

* 洛伦茨规范下麦克斯韦方程组进一步化为

$$\begin{cases} \nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} \end{cases}$$

标势和矢势满足**独立**的波动方程，代表电磁场存在波动形式的解，称为**电磁波**。
* 由方程形式电磁波波速与光速相同，成为光也是电磁波的证据。

§1.4 介质中的麦克斯韦方程组

线性各向同性均匀介质

- 介质单位体积的平均电偶极矩为**电极化强度** $\vec{P}$ [电偶极子的电偶极距定义为带电量 q 与 $-q$ 指向 $+q$ 的矢量乘积]，则由于其不均匀会产生**束缚电荷**，考虑封闭曲面积分可得介质内部**束缚电荷密度** $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$、边界 $\sigma_b = \vec{n} \cdot \vec{P}$。
- 束缚电荷分布随时间改变会产生束缚电流分布，由于束缚电荷守恒

  $$\frac{\partial\rho_b}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_b = 0$$

  可得**束缚电流密度** $\vec{J}_b = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$。
- 由于分子内部的带电微观粒子运动，会产生**分子电流**，当介质被外加磁场磁化时，记单位体积平均磁偶极矩为**磁化强度** $\vec{M}$，考虑闭合回路积分可得介质内部**分子电流密度** $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$、边界 $\vec{K}_m = -\vec{n} \times \vec{M}$。

将 ρ_b 加入 ρ，$\vec{J}_b, \vec{J}_m$ 加入 $\vec{J}$，记**电位移矢量** $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$，**磁场强度** $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$，得到介质中的麦克斯韦方程组 [这里 $\rho, \vec{J}$ 指自由电荷、自由电流的密度]

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = 0 \end{cases}$$

* 利用数学上 Gauss 定理与 Stolkes 定理可对方程一、四作体积分，对方程二、三作环路积分，从而改写为积分形式。
* 对一般介质，$\vec{D}, \vec{H}$ 与 $\vec{E}, \vec{B}$ 关系可能非常复杂，称为电磁介质中的**本构关系**。而上述简化情况事实上可看作某种平均场近似。如无特殊说明，均假设上述关系式满足。

电磁介质简介

1. **一般线性介质**

$\vec{P},\vec{M}$ 与电磁场的依赖关系可写为 [对时间非局域的，但假设对空间局域，此局域性一般成立]

$$P_i(t)=\epsilon_0\int \mathrm{d}t'\chi_{ij}^{(e)}(t')E_j(t-t')$$

$$M_i(t)=\int \mathrm{d}t'\chi_{ij}^{(m)}(t')H_j(t-t')$$

考虑傅里叶变换 [无歧义时可将 $\tilde{f}(\omega)$ 也记为 $f(\omega)$]

$$\tilde{f}(\omega)=\int \mathrm{d}tf(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},f(t)=\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\tilde{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

即可得到

$$P_i(\omega)=\epsilon_0\chi_{ij}^{(e)}(\omega)E_j(\omega),\quad M_i(\omega)=\chi_{ij}^{(m)}(\omega)H_j(\omega)$$

这里 $\chi_{ij}^{(e)}(\omega),\chi_{ij}^{(m)}(\omega)$ 称为**电极化率张量**与**磁化率张量**，于是记**介电张量** $\epsilon_{ij}(\omega)=\epsilon_0(\delta_{ij}+\chi_{ij}^{(e)}(\omega))$、**磁导率张量** $\mu_{ij}(\omega)=\mu_0(\delta_{ij}+\chi_{ij}^{(m)}(\omega))$，则根据 $\vec{D},\vec{H}$ 的定义与傅里叶变换的线性性有

$$D_i(\omega)=\epsilon_{ij}(\omega)E_j(\omega),\quad B_i(\omega)=\mu_{ij}(\omega)H_j(\omega)$$

2. **各向同性线性介质**

各向同性满足时 [事实上只需立方对称即可]，$\epsilon_{ij}(\omega)$ 与 $\mu_{ij}(\omega)$ 必然与 δ_{ij} 正比，从而可由对角元值确定，记作 $\epsilon(\omega),\mu(\omega)$，类似定义 $\chi^{(m)}(\omega),\chi^{(e)}(\omega)$ 可得

$$\vec{D}(\omega)=\epsilon(\omega)\vec{E}(\omega),\quad \epsilon(\omega)=\epsilon_0(1+\chi^{(e)}(\omega))$$

$$\vec{H}(\omega)=\frac{1}{\mu(\omega)}\vec{B}(\omega),\quad \mu(\omega)=\mu_0(1+\chi^{(m)}(\omega))$$

这里 $\epsilon(\omega)$ 记为介电常数或电容率，$\mu(\omega)$ 称为磁导率；$\epsilon(\omega)/\epsilon_0$ 称为相对介电常数，$\mu(\omega)/\mu_0$ 称为相对磁导率。

* 液体、气体、立方对称的晶体与大量多晶体是各向同性的，其电极化率必然为正，磁化率可能正 [顺磁] 或负 [逆磁抗磁]。

* 介电常数与磁导率一般与外场圆频率 ω、温度等相关，介电常数对频率依赖更明显。

3. **导体**

类似对于线性介质讨论，我们假设电流密度于电场有频域上的线性关系，即

$$J_i(\omega)=\sigma_{ij}(\omega)E_j(\omega)$$

$\sigma_{ij}(\omega)$ 称为**电导率张量**。类似地，若各向同性满足，即有 $\vec{J}(\omega)=\sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$，也即微观**欧姆定律**。

* 理想导体：电导率趋于无穷，实际例子如内部 $\vec{E},\vec{B}$ 均为 0 的超导体。

4. **铁电体、铁磁体**

铁电体、铁磁体不属于线性电磁介质，哪怕外加电磁场为 0，也存在自发的电极化或磁化。其只在少数元素中出现，呈现高度的非线性。

* 硬铁磁体：$\vec{B}$ 不太大时 $\vec{M}$ 恒定的铁磁体。

交界处边界条件
考虑底面与交界面法向垂直，高度趋于 0 的柱体，运用电场高斯定律即得到

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma$$

这里 $\vec{n}$ 为介质 1 指向介质 2 的单位矢量，σ 指交界面自由面电荷密度。对磁场类似得 $\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$。
考虑无穷小矩形回路，一对边与交界面切向垂直，运用磁场环路定律即得到

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{K}$$

这里 $\vec{K}$ 指交界面处自由面电流密度。对电场类似得 [由 $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 有限，其面积分趋于 0] $\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$。

§1.5　电磁规律中的守恒律

电荷守恒
连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J}=0$$

可从麦克斯韦方程组前两方程直接计算得到。

能量守恒
利用洛伦兹力表达式，空间存在电流分布 $\vec{J}$ 时，体积 V 内电场对电流密度做功功率为

$$W=\iiint_V \mathrm{d}^3x\vec{J}\cdot\vec{E}$$

代入麦克斯韦方程组 $\vec{J}$ 的表达式，再利用 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 即可计算得

$$W=-\iiint_V \mathrm{d}^3x\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{S}\right),\quad u=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}),\quad \vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$

其含义即体积 V 内带电粒子能量下降一部分转化为**电磁场能量** u 的上升，一部分以**能流密度** $\vec{S}$ 从边界流出。
* 这里 $\vec{S}$ 也称为**坡印亭矢量**。

动量守恒
利用洛伦兹力表达式，考虑 V 中全部粒子 [源] 的总动量 $\vec{p}^s$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}^s}{\mathrm{d}t}=\int_V \mathrm{d}^3x(\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B})$$

将 $\vec{J},\rho$ 代入表达式，化简后可最终将动量守恒写为

$$\frac{\mathrm{d}(p_i^s+p_i^f)}{\mathrm{d}t}=\iiint_V \mathrm{d}^3x\partial_j T_{ij}$$

这里**电磁场总动量**为

$$\vec{p}^f=\iiint_V \mathrm{d}^3x\epsilon_0\mu_0\vec{S}$$

麦克斯韦应力张量为

$$T_{ij}=\epsilon_0\left(E_iE_j+c^2B_iB_j-\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E}+c^2\vec{B}\cdot\vec{B})\delta_{ij}\right)$$

* 电磁场**动量密度** $\vec{g}$ 定义为 $\epsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})$，计算得其即为 $\epsilon_0\mu_0\vec{S}=\frac{\vec{S}}{c^2}$。

角动量守恒
类似可得到对原点的角动量密度 $\mathcal{M}=\vec{x}\times\vec{g}$，电磁场中角动量密度与物质的角动量结合才能得到守恒性。

二　静电学

§2.1　泊松方程与静电边值问题

考虑均匀、各向同性的线性电介质 [介电常数 ϵ] 中的静电场，这时只涉及两方程 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho,\nabla\times\vec{E}=0$，之前的标势 Φ 此时即为静电势，满足 $\vec{E}=-\nabla\Phi$。
由 $\vec{D}=\epsilon\vec{E}$ 可得

$$\nabla^2\Phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon}$$

* 此方程形式称为 Poisson 方程，区域自由电荷密度 $\rho=0$ 时即为 Laplace 方程 $\nabla^2\Phi=0$。
* 由 PDE 知识，给定 ρ 与边界条件后 Φ 可以唯一确定，即称为**静电边值问题**。
无边界的无穷大空间中 Poisson 方程解为

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int \mathrm{d}^3x'\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

即可看作库伦定律的线性叠加，数学上可利用 [这里 δ^3 即三维空间的 δ 函数]

$$\nabla^2_{\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=-4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

直接计算证明。
* 此式可两边对 $\vec{x}$ 在包含 $\vec{x}'$ 的小球内计算积分，左侧利用高斯公式即可得到 δ 函数前的系数。
一般情况下，考虑 V 被闭合曲面 S 包围，若已知 S 上的 Φ 则称为 **Dirichlet 边界条件**，若已知 S 上 Φ 的法向偏导则称为 **Neumann 边界条件**，由 PDE 理论可证明两者均能得到唯一解。

格林函数

不妨考虑真空情况，$\epsilon=\epsilon_0$。设函数 $G(\vec{x},\vec{x}')$ 在 V 中满足

$$\nabla^2_{\vec{x}'}G(\vec{x},\vec{x}')=-4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

则利用格林公式

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)=\oint_S \mathrm{d}S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)$$

可计算得到

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3x'G(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}')+\frac{1}{4\pi}\oint_S \mathrm{d}S'\left(G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\Psi(\vec{x}')}{\partial n'}-\Phi(\vec{x}')\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}\right)$$

* 由上方计算 $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ 亦满足条件，但不保证边界条件，导致上式右端无法确定。不过，直接计算可知 $F(\vec{x},\vec{x}')=G(\vec{x},\vec{x}')-\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ 必满足 $\nabla^2_{\vec{x}'}F(\vec{x},\vec{x}')=0$，即其**调和**。
对 Dirichlet 边值问题，额外要求 $G_D(\vec{x},\vec{x}')=0,\vec{x}'\in S$，即得解为

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3x'G_D(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}')-\frac{1}{4\pi}\oint_S \mathrm{d}S'\Phi(\vec{x}')\frac{\partial G_D(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}$$

对 Neumman 边值问题，额外要求 $\frac{\partial G_N(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}=-\frac{4\pi}{A_S},\vec{x}'\in S$，这里 A_S 为 S 面积，即得解为

$$\Phi(\vec{x})=\langle\Phi\rangle_S+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3x'G_N(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}')+\frac{1}{4\pi}\oint_S \mathrm{d}S'G_N(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\Phi(\vec{x}')}{\partial n'}$$

这里 $\langle\Phi\rangle_S$ 为 Φ 在 S 上的平均值。
* 一般情况下对格林函数的求解是困难的。

§2.2 导体的边界条件与导体组的能量

* 同样假设导电介质具有线性性与各向同性。
理论分析可得导体**内部电场恒零，表面等势，自由电荷只可能出现在表面**，根据高斯定律即可得到 [ϵ 指导体外部介电常数，σ 指自由面电荷密度，取 n 对应为外法向]

$$\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}=-\sigma$$

导体组静电能
考虑 N 个导体，导体间介电常数 ϵ，每个导体表面 Φ_i，总电荷 Q_i，且假定空间中除了导体表面外不存在自由电荷。由此可计算总能量 (由于导体中无电场，只需对导体外部分积分)：

$$U=\int \mathrm{d}^3x\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}=\frac{\epsilon}{2}\int \mathrm{d}^3x(\nabla\Phi)^2=\frac{\epsilon}{2}\int \mathrm{d}^3x\nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Phi_iQ_i$$

(后三个等号分别为代入 Φ 定义、计算后由空间无自由电荷消去 $\nabla^2\Phi$、利用高斯定理与上方 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ 等式)
由线性叠加原理，第 i 个导体表面的电荷可以写为

$$Q_i=\sum_{j=1}^{N}C_{ij}\Phi_j$$

这里 C_{ij} 为只与导体几何有关的参数。其中 C_{ii} 称为导体的**电容系数** [单个导体即为电容]，非对角元称为**感应系数**，总静电能即为

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}C_{ij}\Phi_i\Phi_j$$

§2.3 唯一性定理与静电镜像法

静电唯一性定理：对 Dirichlet 边值问题或 Neumman 边值问题，静电场的解唯一。
证明：若有 $\Phi_1(\vec{x}),\Phi_2(\vec{x})$ 两解满足要求，记 $\Psi(\vec{x})=\Phi_1(\vec{x})-\Phi_2(\vec{x})$，利用高斯定理可知

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\nabla\Psi)^2=\oint_S\Psi(\nabla\Psi)\cdot\mathrm{d}\vec{n}-\int_V\mathrm{d}^3x\Psi\nabla^2\Psi$$

由于 $\nabla^2\Psi=0$，且无论何种边值条件都有右侧第一项积分为 0，可知 $\nabla\Psi$ 必须恒为 0，于是 Ψ 为常数，$\nabla\Phi_1(\vec{x})=\nabla\Phi_2(\vec{x})$，电场唯一。

电像法
考虑半径 a 接地导体球外，距球心 R 处放置点电荷 Q，求解空间电势。
由于已知导体球面上电势为 0，可假设导体内镜像电荷替代感应电荷，计算可发现球心与点电荷连线上距球心 $\frac{a^2}{R}$ 处放置 $-Q\frac{a}{R}$ 电荷可保证球面电势 0，由唯一性定理可知空间 $\Phi(\vec{x})$ 即相当于点电荷与镜像电荷叠加产生。
* 可利用 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ 得到球面面电荷密度，总量即为像电荷电量 $-Q\frac{a}{R}$。
* 几何上为空间**反演**变换，当 $a\to\infty$ 时成为无穷大导体板，像电荷即为对称位置、电量相反。
* 为满足特殊几何条件时的简单方法，但实际应用可能复杂 (如像电荷不能在计算区域内、两球时需考虑无穷多像电荷等)。

§2.4 泊松方程的分离变量解法

本节介绍 $\nabla^2\Phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon}$ 的一般分离变量求解方案。由于全空间的解 $\frac{1}{4\pi\epsilon}\int \mathrm{d}^3x'\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ 一定满足内部要求，只是未必满足边界条件，真实解一定可以写为其加上 $\nabla^2\Phi(\vec{x})=0$ 的某个解。因此，先考虑这个 Laplace 方程的分离变量方式。

直角坐标系

分离变量为 $\Phi(\vec{x})=X(x)Y(y)Z(z)$，可考虑基本形式的解

$$X(x)\propto \mathrm{e}^{k_1x},\quad Y(y)\propto \mathrm{e}^{k_2y},\quad Z(z)\propto \mathrm{e}^{k_3z}$$

代入 Laplace 方程可知 $k_1^2+k_2^2+k_3^2=0$。

* 由边界条件确定 k_i，有限区间 k_i 一般取分立纯虚数，本征函数是三角函数，无穷区间则可能连续。

柱坐标系

分离变量为 $\Phi(\vec{x})=Z(z)\Phi(\phi)R(r)$，这里 (ϕ,r) 即为 xy 平面极坐标，可考虑基本形式的解

$$Z(z)\propto \mathrm{e}^{\pm kz},\quad \Phi(\phi)\propto \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}m\phi},\quad R(r)\propto J_m(kr),N_m(kr)$$

这里 J_m 与 N_m 指贝塞尔函数。

由静电势单值性，m 为整数，而 k 有不同选取：k 实数时，$R(r)$ 为标准贝塞尔函数，J_m 在 0 处有限，而 N_m 发散，需要额外边界条件确定；k 纯虚数时，利用 z 方向边界条件可得到 k 可能取值，对应 $R(r)$ 为虚宗量贝塞尔函数 $I_m(|k|r),K_m(|k|r)$，同样，I_m 在 0 处有限，而 K_m 发散。

* 贝塞尔函数也具有正交、归一、完备等特性，如 $[0,a]$ 上，记 x_{mn} 为 $J_m(x)$ 在正实轴的第 n 个零点，则基本的解形式为 $R(r)=J_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right)$，有正交归一与完备条件

$$\int_0^a rJ_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right)J_m\left(\frac{x_{mn'}r}{a}\right)\mathrm{d}r=\frac{a^2}{2}J_{m+1}^2(x_{mn})\delta_{nn'}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a^2J_{m+1}^2(x_{mn})}J_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right)J_m\left(\frac{x_{mn}r'}{a}\right)=\frac{1}{r}\delta(r-r')$$

因此任何函数可通过基本形式进行展开。

* 无穷区间上正交归一条件为

$$\int_0^{\infty} rJ_m(kr)J_m(k'r)\mathrm{d}r=\frac{1}{k}\delta(k-k')$$

称为 Hankel 变换，将 r,k 对调即为完备关系，类似直角坐标系中的 Fourier 变换。

球坐标系

球坐标系下 Laplace 算符为

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\hat{L}^2}{r^2},\quad \hat{L}^2=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi}$$

球谐函数 Y_{lm} 定义为角动量平方算符的本征函数，即

$$\hat{L}^2Y_{lm}(\theta,\phi)=l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi),\quad l\in\mathbb{N},\quad m\in\mathbb{Z}\cap[-l,l]$$

其也可以显式写成

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

这里 P_l^m 为连带勒让德函数。

* 其满足性质 $Y_{l,-m}=(-1)^m Y_{lm}^*$
将 θ,ϕ 视为与 $\vec{n}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$ 等同，即可记为 $Y_{lm}(\vec{n})$，再记 $\mathrm{d}\vec{n}=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$，则其正交归一与完备条件为

$$\int \mathrm{d}\vec{n}Y_{lm}^*(\vec{n})Y_{l'm'}(\vec{n})=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\vec{n}')Y_{lm}(\vec{n})=\delta(\cos\theta'-\cos\theta)\delta(\phi'-\phi)$$

由此，任意 θ,ϕ 的函数可展开为球谐函数，一般解可以写为

$$\Phi(r,\vec{n})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l+\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\vec{n})$$

系数 A_{lm},B_{lm} 完全由边界条件确定。
* 若问题有 ϕ 方向对称性，只涉及 $m=0$ 的球谐函数，这时连带勒让德多项式即为勒让德多项式。
* 球谐函数**加法定理**：

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{\min\{|\vec{x}|,|\vec{x}'|\}^l}{\max\{|\vec{x}|,|\vec{x}'|\}^{l+1}}Y_{lm}^*(\vec{n}')Y_{lm}(\vec{n})$$

证明：将左侧乘 $\frac{1}{4\pi}$ 视为格林函数 $G(\vec{x},\vec{x}')$，即有

$$\nabla^2G(\vec{x},\vec{x}')=-\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')=-\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')$$

利用完备性关系展开右侧，知可设格林函数为 $G(\vec{x},\vec{x}')=\sum_{l,m}g_l(r,r')Y_{lm}^*(\vec{n}')Y_{lm}(\vec{n})$，再由 g_l 在 $r\to 0,\infty$ 时有限、关于 r,r' 对称，求解可得到结果。

一个例子

无穷空间中介电常数 ϵ_2，存在均匀强度 E_0 的 z 轴方向电场，放入一个介电常数 ϵ_1，半径 a 的电介质球，球心为原点，求放入后电场分布。
由于不存在自由电荷，对应 Laplace 方程，由 z 轴对称性知内外都只涉及 $m=0$ 的球谐函数，又因内部 $r=0$ 处不可能发散，电势一定可以写成

$$\Phi_{in}(\vec{x})=\sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta),\quad \Phi_{out}(\vec{x})=\sum_l\left(B_l r^l+\frac{C_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

由于无穷远处 $\Phi_{out}(\vec{x})=-E_0z=-E_0r\cos\theta$，必然只有 $l=1$ 项，且 $B_1=-E_0$。此外，其产生介质极化也必然只有 $l=1$ 项，从而只需求解 A_1,C_1。通过球面 θ 处场强切向连续、电位移矢量法向连续可知

$$A_1=-E_0+\frac{C_1}{a^3},\quad \epsilon_1A_1=-\epsilon_2\left(E_0+\frac{2C_1}{a^3}\right)$$

解得

$$\Phi_{in}(\vec{x})=-\left(\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1+2\epsilon_2}\right)E_0r\cos\theta,\quad \Phi_{out}(\vec{x})=-E_0r\cos\theta+\left(\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+2\epsilon_2}\right)E_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta$$

* 更复杂的情况一般都需要通过求解格林函数进行间接求解。

§2.5 静电边值问题的数值解法

* 本节主要讨论对 Laplace 方程的求解。

简单网格法

将三维空间划分为网格边长 a 的网格，则有

$$\nabla^2\Phi(\vec{x})\approx\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a^2}(\Phi(\vec{x}+\tilde{i})+\Phi(\vec{x}-\tilde{i})-2\Phi(\vec{x}))$$

这里 $\tilde{i}$ 为 i 方向长度 a 的矢量。从而通过格点值可得到 Laplace 算子的近似，再结合边界条件求解。
* 可行的求解思路是从扩散方程 $\frac{\partial\Phi(\vec{x},t)}{\partial t}=\nabla^2\Phi(\vec{x},t)$ 出发，得到迭代

$$\frac{\Phi(\vec{x},t+\Delta t)-\Phi(\vec{x},t)}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a^2}(\Phi(\vec{x}+\tilde{i})+\Phi(\vec{x}-\tilde{i})-2\Phi(\vec{x}))$$

由于 Laplace 方程为扩散方程的稳定状态，充分迭代至 $t\to\infty$ 时即可得到解，此方法称为 **Jacobi 方法**。通过计算数学知识可知，时空步长需满足 $6\Delta t\le a^2$ 才能保证迭代稳定进行。
* 例：考虑点电荷在空间中存在某接地导体时的电场，其电势减去点电荷电势得到的函数 $\Psi(\vec{x})$ 应满足 Laplace 方程，且边界条件为 $\Psi(\vec{x})$ 在导体边界的值为点电荷电势的相反数 [从而保证和为 0]，由此即可求解。

有限元方法

* 思路：利用**单形**进行剖分，如二维时考虑三角网格。
以二维为例，若已知三角形 $(x_i,y_i),i=1,2,3$ 顶点电势 Φ_i，设内部电势为 $a+bx+cy$，求解可得

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{3}(p_i+q_ix+r_iy)\Phi_i,\quad D=\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix},\quad p_1=x_2y_3-x_3y_2,q_1=y_2-y_3,r_1=x_3-x_2$$

其余 p_i,q_i,y_i 循环交换系数即得。
* 由此，三角形内部的电场 $-\nabla\Phi(x,y)$ 恒定，$E_x=-\frac{1}{D}\sum_i q_i\Phi_i,E_y=-\frac{1}{D}\sum_i r_i\Phi_i$。
节点处近似值计算：根据数学知识可知 Laplace 方程应使静电能泛函

$$\mathcal{E}[\Phi]=\frac{\epsilon}{2}\int\mathrm{d}^2x|\nabla\Phi(\vec{x})|^2$$

取最小值，而设三角形共有 N_f 个，每个的面积 ΔS_f，电场为 $\vec{E}_f$，则上述泛函在有限元下近似为

$$\mathcal{E}[\{\Phi_i\}]=\frac{\epsilon}{2}\sum_{f=1}^{N_f}\vec{E}_f^2\Delta S_f$$

此为关于所有 Φ_i 的正定二次型，可通过数值方法求解最小值。
* 考虑迪利克雷边界条件，这时边界节点给定，只需求解全部内部节点，确定系数矩阵后可得到方程组，从而利用共轭梯度等方法求解。

§2.6 静电多极展开

考虑真空中某有界的电荷分布 $\rho(\vec{x})$ [即其只在有界区域 V 内非零]，要求计算远离这团电荷处一点的静电势。
利用球谐函数加法定理，两侧乘 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{x}')$ 后在 V 内直接积分计算得到 (由要求 $r\gg r'$)

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\frac{Y_{lm}(\vec{n})}{r^{l+1}}q_{lm},\quad q_{lm}=\int Y_{lm}^*(\vec{n}')(r')^l\rho(\vec{x}')\mathrm{d}^3x'$$

系数 q_{lm} 为与 $\vec{x}$ 无关的常数，称为电荷分布对应的**多极矩**。

* 定义 $Q=\int \mathrm{d}^3x'\rho(\vec{x}')$ 为总电荷，$\vec{p}=\int \mathrm{d}^3x'\rho(\vec{x}')\vec{x}$ 为该电荷分布的电偶极矩，电四极矩张量 $\mathbf{D}$ 满足

$$D_{ij}=\int \mathrm{d}^3x'(3x'_ix'_j-(r')^2\delta_{ij})\rho(\vec{x}')$$

* 这里 $l=0$ 称为单极矩 (总电荷)，随后随 l 增大分别称电偶极矩、电四极矩、电八极矩等，对应带电体系的多极矩张量。一般来说带电体系的多极矩依赖原点选取，但**非零最低阶**的电多极矩与原点选取无关。

电偶极子

考虑原点的一个点电偶极矩 $\vec{p}$，计算可发现电势与非原点处场强为 (这里 $\vec{n}$ 指 $\vec{x}$ 方向单位矢量)

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3},\quad \vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p})-\vec{p}}{r^3}$$

但此场强事实上还差一个正比于 δ 函数的项，考虑静电场在球心原点、半径 R 的球体积分，由高斯公式可得

$$\int_{r<R}\mathrm{d}^3x\vec{E}(\vec{x})=-\int_{r=R}R^2\mathrm{d}\Omega_n\Phi(\vec{x})\vec{n}=-\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3x'\rho(\vec{x}')\int_{r=R}\mathrm{d}\Omega_n\frac{\vec{n}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

* 这里 $\vec{n}$ 指球面外法向量，第二个等号是将电势拆分为积分。

利用球谐函数保留 $l=1$ 计算可得右侧积分为 $\frac{4\pi}{3}\frac{r_<}{r_>}\vec{n}'$，这里 $r_<,r_>$ 指 r' 与 R 中较小、较大的，于是原积分即为

$$-\frac{R^2}{3\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3x'\frac{r_<}{r_>^2}\vec{n}'\rho(\vec{x}')$$

若电荷分布全在球内，$r_<$ 恒为 r'，可直接计算得到积分为 $-\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$；若全在球外，即为 $\frac{4\pi R^2}{3}\vec{E}(0)$。由此，为使球内的积分成立，电场实际上是

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p})-\vec{p}}{r^3}-\frac{4\pi}{3}\vec{P}\delta^3(\vec{x})\right)$$

静电能

静电能为 $\int \mathrm{d}^3x\rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})$，若 $\rho(\vec{x})$ 只在原点腹肌南非零，事实上可以对 $\Phi(\vec{x})$ 在原点附近展开，再利用分布的电偶极矩、电四极矩定义可以得到静电能 [事实上这比起直接展开增添了 $-\frac{1}{6}r^2\nabla\cdot\vec{E}(0)$，由于其为 0 无影响]

$$U\approx Q\Phi(0)-\vec{p}\cdot\vec{E}(0)-\frac{1}{6}\sum_{i,j}D_{ij}\frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i}$$

* 直接计算可知 $\vec{x}_1,\vec{x}_2$ 处电偶极矩 $\vec{p}_1,\vec{p}_2$，则相互作用静电能为

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2-3(\vec{n}\cdot\vec{p}_1)(\vec{n}\cdot\vec{p}_2)}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2}+\frac{4\pi}{3}(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)\delta^3(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\right)$$

这里 $\vec{n}$ 为 $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ 方向的单位矢量。

三　静磁学

§3.1　环形电流的磁场与磁矩

回顾磁矢势 $\vec{A}$ 满足 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，利用库伦规范 [静磁学中与洛伦茨规范] 可取 $\nabla\cdot\vec{A}=0$，假定空间中充满磁化率 $\mu=\mu_0\mu_r$ 的线性各向同性均匀磁介质，计算即得到泊松方程 $\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$，于是类似电场时，无边界空间中解即可写为

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

* 电荷守恒连续性方程要求 $\nabla\cdot\vec{J}=0$，且 $\vec{J}$ 可以包含广义函数 [如一维 δ 函数代表面电流密度，二维 δ 函数代表线电流密度]，可以对应将 $\vec{J}(\vec{x})\mathrm{d}^3x$ 替换为 $\vec{K}\mathrm{d}S$ 或 $I\mathrm{d}\vec{l}$，这里 $\vec{K}$ 为面电流密度，I 为线电流强度。
* 若存在不同磁介质，回顾第一章得到的边界条件，即可唯一确定静磁问题解。

环形电流计算

考虑真空中电流强度为 I、半径为 a 的电流环，环心位于坐标原点，法向指向 z 方向，求空间磁矢势与磁场。
球坐标系下电流密度只有 ϕ 分量，为

$$J_\phi(r',\theta',\phi')=\frac{I}{a}\sin\theta'\delta(\cos\theta')\delta(r'-a)$$

直角坐标系下，设 $\hat{x},\hat{y}$ 为两方向单位向量，则 $\vec{J}(\vec{x}')=-J_\phi\sin\phi'\hat{x}+J_\phi\cos\phi'\hat{y}$，由于关于 ϕ 对称，可直接设考虑 $\phi=0$ 的点的磁矢势，由对称性，这些点只有 A_ϕ 非零，直接积分即得到 [注意 $\phi=0$ 时 $A_\phi=A_y$]

$$A_\phi(r,\theta)=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{(a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi')^{1/2}}$$

* 此积分为椭圆积分，无解析解，$r\gg a$ 时刻通过分母泰勒展开至前两项 [第一项 $\frac{1}{r}$ 积分为 0] 得到近似

$$A_\phi(r,\theta)\approx\frac{\mu_0 I\pi a^2}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}$$

从而磁场有近似

$$B_\theta=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\cos\theta}{r^3},\quad B_\theta=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^3},\quad m=I\pi a^2$$

这里 m 称为**磁偶极矩**，与电偶极子周围的电场类似。

§3.2 磁场的能量

考虑 N 个闭合稳恒电流回路 C_i，电流强度分别为 I_i，空间充满磁导率 μ 均匀介质。计算可得到

$$(\nabla\times\vec{A})^2=\partial_j(A_k\partial_jA_k)-A_k(\partial_j\partial_jA_k)-\partial_j(A_k\partial_kA_j)+A_k(\partial_j\partial_kA_j)$$

而全微分在全空间积分可化为无穷远边界上，为 0，且由库伦规范最后一项为 0，只剩下第二项，再利用泊松方程得能量为

$$U=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\vec{H}\cdot\vec{B}=\frac{1}{2\mu}\int\mathrm{d}^3x(\nabla\times\vec{A})^2=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\vec{A}\cdot\vec{J}$$

利用替换规则可写出此时磁矢势的表达式

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\sum_{i=1}^N\oint_{C_i}\frac{I_i\mathrm{d}\vec{l}_i(\vec{x}_i')}{|\vec{x}-\vec{x}_i'|}$$

这里 $\vec{x}_i'$ 沿 C_i 绕转，$\mathrm{d}\vec{l}_i(\vec{x}_i')$ 即为该点处 C_i 的切向量。代入原式即得

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N L_{ij}I_iI_j,\quad L_{ij}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{C_i}\oint_{C_j}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_i(\vec{x}_i)\cdot\mathrm{d}\vec{l}_j(\vec{x}_j)}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|}$$

这里对角元 L_{ii} 称为线圈的**电感**或**自感系数**，非对角元 $L_{ij},i\neq j$ 称为**互感系数**。
* 无穷细导线的电感事实上发散，需要假设存在界面，可认为均匀分布估计电感。

电流圈作用力

考虑两电流圈 C_1,C_2 间作用力，为方便，用 $\vec{l}_1,\vec{l}_2$ 简写 $\vec{l}_1(\vec{x}_1),\vec{l}_2(\vec{x}_2)$。

根据功能原理，$\vec{F}_{2\to1}$ 可以写为两电流圈相互作用能对第一个电流圈坐标的**正**梯度 [由于保持电流不变而非磁矢势不变，这里的受力为正梯度而非负梯度]，也即

$$\vec{F}_{2\to1}=\nabla_{\vec{x}_1}U=-\frac{\mu I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{(\vec{x}_1-\vec{x}_2)(\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2)}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}$$

凑积分为 0 的全微分后分母可改写为 $-\mathrm{d}\vec{l}_1\times(\mathrm{d}\vec{l}_2\times(\vec{x}_1-\vec{x}_2))$，从而有

$$\vec{F}_{2\to1}=\oint_{C_1}I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{B}_{2\to1},\quad \vec{B}_{2\to1}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}$$

左侧公式为洛伦兹力宏观形式 [安培力]，右侧即为毕奥-萨伐尔定律。

§3.3　磁多极展开

考虑原点附近的电流分布与远处一点 $\vec{x}$，仍假定充满磁导率 μ 均匀介质，利用泰勒展开前两项

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\approx\frac{1}{|\vec{x}|}+\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{|\vec{x}|^3}$$

即有

$$A_i(x)\approx\frac{\mu}{4\pi|\vec{x}|}\int\mathrm{d}^3x'J_i(\vec{x}')+\frac{\mu x_j}{4\pi|\vec{x}|^3}\int\mathrm{d}^3x'J_i(\vec{x}')x'_j$$

* 利用高斯公式化到无穷远处可知 $\int\mathrm{d}^3x'\partial'_j(J_j(\vec{x}')x'_i)=0$，展开偏导并利用 $\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')=0$ 即可得到上方第一项积分事实上为 0。
* 类似可知 $\int\mathrm{d}^3x'\partial'_k(J_k(\vec{x}')x'_ix'_j)=0$，展开化简可得到

$$x_j\int\mathrm{d}^3x'\vec{J}(\vec{x}')x'_j=-\vec{x}\times\vec{m},\quad \vec{m}=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x'(\vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}'))$$

上方 $\vec{m}$ 称为磁偶极矩 [简称**磁矩**]，由此可计算得

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3},\quad \vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{m})-\vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right)$$

此处 $\vec{n}$ 代表 $\vec{x}$ 方向单位矢量。
* 完全类似电偶极场，考虑积分后会对磁场增添一个 δ 函数修正，成为

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{m})-\vec{m}}{|\vec{x}|^3}+\frac{8\pi}{3}\vec{m}\delta^3(\vec{x})\right)$$

磁矩

对平面电流圈，设其面积 S，电流强度 I，右手定则确定单位法向量 $\vec{n}_0$，即有 $\vec{M}=SI\vec{n}_0$，符合之前环形电流的结果。

若电流密度 $\vec{J}(\vec{x})$ 由一系列带电 q_i，速度 $\vec{v}_i$ 的粒子提供，即 $\vec{J}(\vec{x})=\sum_i q_i\vec{v}_i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i)$，计算可知

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\sum_i q_i(\vec{x}_i\times\vec{v}_i)=\sum_i\frac{q_i}{2M_i}\vec{L}_i$$

这里 $\vec{L}_i$ 表示粒子角动量。若所有粒子 q_i,M_i 同为 q,M，即有 $\vec{m}=\frac{q}{2M}\vec{L}$，$\vec{L}$ 为总角动量 $\sum_i\vec{L}_i$。
* 量子力学中除了经典角动量外还有纯量子的**自旋角动量** $\vec{S}$，原子磁矩与核子磁矩分别为

$$\vec{m}=-\frac{e\hbar}{2m_e}(g_l\vec{L}+g_s\vec{S})/\hbar,\quad \vec{m}_N=\frac{e\hbar}{2m_p}(g_s\vec{S})/\hbar$$

这里右侧 $(g_l\vec{L}+g_s\vec{S})/\hbar$ 代表无量纲总角动量，左侧系数即为量子力学中的 μ。轨道角动量的贡献与经典情形一致，$g_l=1$，而自旋角动量系数 g_s 依赖于粒子性质。

力与力矩

根据受力公式 $\vec{F}=\int \mathrm{d}^3x'\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{B}(\vec{x}')$，对 $\vec{B}$ 作泰勒展开，保留两项即得到

$$F_i\approx\epsilon_{ijk}\left(B_k(0)\int \mathrm{d}^3x'J_j(\vec{x}')+\int \mathrm{d}^3x'J_j(\vec{x}')(\vec{x}'\cdot\nabla)B_k(0)\right)$$

类似之前讨论可知首项为 0，第二项利用 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 可化为

$$\vec{F}=(\vec{m}\times\nabla)\times\vec{B}=\nabla(\vec{m}\times\vec{B})$$

对力矩 $\vec{N}=\int \mathrm{d}^3x'(\vec{x}'\times(\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{B}(\vec{x}')))$，完全类似可得到 $\vec{N}=\vec{m}\times\vec{B}$，与静电学中的 $\vec{p}\times\vec{E}$ 类似。

能量

由于力可看作势能的负梯度，势能可表达为

$$U=-\vec{m}\times\vec{B}$$

* 原子物理中电子磁矩与外加磁场相互作用能可写为此形式，因此称为**塞曼能**，由于磁矩与角动量正比，角动量是量子化的，原子在外磁场中时因转动不变性而简并的能级将分裂，称为**塞曼效应**。

* 原子核磁矩 $\vec{m}_N$ 与电子磁矩的偶极-偶极相互作用产生**超精细结构**，设电子自旋磁矩 $\vec{m}_e$，轨道运动磁矩 $\frac{e}{2m_e}\vec{L}$，相互作用能为 [$\vec{n}$ 指连线方向的单位矢量]

$$\mathcal{H}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{m}_N\cdot\vec{m}_e-3(\vec{n}\cdot\vec{m}_N)(\vec{n}\cdot\vec{m}_e)}{r^3}-\frac{e}{m}\frac{\vec{m}_N\cdot\vec{L}}{r^3}-\frac{8\pi}{3}(\vec{m}_N\cdot\vec{m}_e)\delta^3(\vec{x})\right)$$

量子力学中此能量视为某种微扰，需要在波函数中取平均。

§3.4 磁标势与等效磁荷

若空间**无自由电流分布**，根据麦克斯韦方程组有 $\nabla\times\vec{H}=0$，于是存在**磁标势** $\Phi_M(x)$ 满足 $\vec{H}(\vec{x})=-\nabla\Phi_M(\vec{x})$。

由于 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，利用 $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$ 可得

$$\nabla^2\Phi_M(\vec{x})=-(-\nabla\cdot\vec{M})$$

也即 $\vec{M}(\vec{x})$ 提供了类似静电学中电荷的磁荷密度 $\rho_M(\vec{x})=-\nabla\cdot\vec{M}(\vec{x})$，或在边界上的面磁荷密度 $\sigma_M(\vec{x})=\vec{n}\cdot\vec{M}(\vec{x})$。

多数情况下 $\vec{M}$ 会与 $\Phi_M(x)$ 有关，因此此方程并不能简单视为泊松方程求解。此处只考虑两种简单情况：

1. **线性各向同性均匀介质** $\vec{B}=\mu\vec{H}$，从而满足 Laplace 方程 $\nabla^2\Phi_M(\vec{x})=0$。

   例：考虑真空中均匀静磁场 H_0，方向为 z 方向，将内外半径 a,b 的空心球壳放入，球壳介质为线性各向同性均匀介质，相对磁导率为 μ_r，球心为坐标原点，求空间磁场。

   考虑球坐标系，此问题关于 ϕ 对称，类似泊松方程分离变量解法中的例子，利用球谐函数可得到 $r>b$ 与 $a<r<b$ 处磁标势可以视为均匀场与偶极场叠加，$r<a$ 处磁标势则对应均匀场，结合无穷远处条件可设

   $$\Phi_M^{r>b}=-H_0r\cos\theta+\frac{A_1\cos\theta}{r^2},\quad \Phi_M^{a<r<b}=-H_1r\cos\theta+\frac{C_1\cos\theta}{r^2},\quad \Phi_M^{r<a}=-H_2r\cos\theta$$

   结合 $r=b,r=a$ 处的连续性条件 [可直接利用 $r\cos\theta=z$ 将 Φ_M 写在直角坐标系中计算 $\vec{H}$，进而根据线性介质得到 $\vec{B}$，从而可得到连续性方程]

   $$-H_0+\frac{A_1}{b^3}=-H_1+\frac{C_1}{b^3},\quad H_0+\frac{2A_1}{b^3}=\mu_r\left(H_1+\frac{2C_1}{b^3}\right),\quad -H_1+\frac{C_1}{a^3}=-H_2,\quad \mu_r\left(H_1+\frac{2C_1}{b^3}\right)=H_2$$

即可解出 A_1, H_1, C_1, H_2。

* 当 $\mu_r \gg 1$ 时可发现球内部磁场约为 $\frac{9H_0}{2\mu_r(1-a^3/b^3)}$，反比于 μ_r，这称为**磁屏蔽**，类似静电屏蔽。

2. **硬铁磁体**，这时 $\vec{M}$ 几乎不依赖 $\vec{H}$，可将 $\vec{M}$ 视为已知矢量场，类似静电问题求解。

   例：磁化强度均匀为 $\vec{M}$ 的硬铁磁体球，半径为 a，球心为坐标原点，磁化强度指向 z 方向，求空间磁场。

   由于磁化强度为常矢量，体磁荷密度为 0，面磁荷密度即为 $\vec{N}\cdot\vec{M} = M_0\cos\theta'$，这里 θ' 指原点指向球面某点的矢量与 z 轴夹角。于是，直接积分可得到

$$\Phi_M(\vec{x}) = \frac{M_0a^2}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega' \frac{\cos\theta'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

   利用球谐函数加法定理，由于 $\cos\theta' \propto Y_{10}(\theta',\phi')$，根据正交性可知只需保留

$$\frac{4\pi}{3}\frac{\min(a,r)}{\max(a,r)^2}Y_{10}^*(\theta',\phi')Y_{10}(\theta,\phi)$$

   一项乘 $\cos\theta'$ 的积分，从而利用 $\frac{\cos\theta'}{Y_{10}(\theta',\phi')} = \frac{\cos\theta}{Y_{10}(\theta,\phi)}$ 与正交归一性计算可得

$$\Phi_M(\vec{x}) = \frac{1}{3}M_0a^2\frac{\min(a,r)}{\max(a,r)^2}\int \mathrm{d}\Omega' Y_{10}^*(\theta',\phi')Y_{10}(\theta',\phi')\cos\theta = \frac{1}{3}M_0a^2\frac{\min(a,r)}{\max(a,r)^2}\cos\theta$$

   * 由此可得到球内为均匀磁场，$\vec{H} = -\frac{1}{3}\vec{M}$，球外为磁偶极子形式，磁偶极矩为 $\frac{4\pi a^3}{3}\vec{M}$，即磁化强度乘球体积。

§3.5　静磁问题的数值解法

* 实际铁磁体往往是多晶的，会产生不同磁畴，同一个磁畴内 $\vec{M}$ 基本沿固定方向，从而使得铁磁体的磁畴体出现固定磁矩。
考虑简化模型，假定晶粒内部磁化强度 $\vec{M}_1(\vec{x}) = M_s\hat{z}$，晶粒间 $\vec{M}_2(\vec{x}) = M_s'\hat{z}$，这里 $\hat{z}$ 为 z 方向单位矢量，$M_s > M_s'$。根据面磁荷密度的公式，$\vec{M}_1, \vec{M}_2$ 交界处会出现等效的磁荷，它们产生的磁场称为**退磁场**。
* 由于等效磁荷成对出现，退磁场全空间积分必然为 0，但方均根非 0，随 $\frac{M_s'}{M_s}$ 远离 1 而成线性关系增大，当 $M_s' = 0$ 时其强度在饱和磁感应强度 20% 左右。
* 对于实际任意分布的情况，一般需要通过数值解法处理，具体做法与静电学中类似。

四　电磁波的传播

§4.1　均匀平面电磁波的基本性质

没有电荷与电流分布时，假设空间存在介电常数 ϵ、磁导率 μ 的均匀线性介质，可以得到

$$\nabla^2\vec{E} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0,\quad \nabla^2\vec{B} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

其基本解为均匀平面电磁波，即

$$\vec{E} = \vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}-\mathrm{i}\omega t},\quad \vec{B} = \vec{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}-\mathrm{i}\omega t}$$

* 这里波动部分用复指数表示，电磁场振幅 $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ 也可取复矢量。约定真实测量的物理量均为对应复值的**实部**。

基本性质

代入麦克斯韦方程组可得到

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{B}_0=0,\cdot\vec{B}_0=\sqrt{\mu\epsilon}\vec{n}\times\vec{E}_0,\quad k^2=\mu\epsilon\omega^2$$

这里 $\vec{n}$ 为 $\vec{K}$ 方向单位矢量，由前三式可知 $\vec{k},\vec{B}_0,\vec{E}_0$ 相互垂直，可构成三维空间的标架，第四个式子可得到 [利用 $c^{-2}=\mu_0\epsilon_0$，这里 k 指 $|\vec{k}|$]

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{n},\quad n=\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$$

这里 v 即为**相速度**，n 称为介质**折射率**。
* 真实介质均为色散介质，也即折射率与 ω 有关，但很窄的频率范围内可假设几乎无关，从而可将均匀平面电磁波叠加得到一般解。

偏振性质
记 $\vec{e}_3=\vec{N}$ 如上方定义，考虑垂直 $\vec{N}$ 的平面内的两单位矢量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 满足 $\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{N}$，它们就构成了三维空间的标准正交基。
由此电场强度可以展开

$$\vec{E}(\vec{x},t)=(E_1\vec{e}_1+E_2\vec{e}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}-\mathrm{i}\omega t}$$

复系数 E_1,E_2 的关系不同即称为其属于不同**偏振状态**：若 $\frac{E_2}{E_1}$ 为实数，称**线偏振**；若 $\frac{E_2}{E_1}=\pm\mathrm{i}$，称为左旋/右旋**圆偏振**；一般情况下 $\vec{E}(\vec{x},t)$ 面对传播反向看将画出椭圆，因此称为**椭圆偏振**。
* 对圆偏振，令 $\vec{e}_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1\pm\vec{e}_2)$，它们也与 $\vec{e}_3$ 构成三维复内积空间的一组标准正交基。
Stokes 参数：记 $\vec{e}_1\cdot\vec{E}=a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1},\vec{e}_2\cdot\vec{E}=a_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_2}$，其中 a_1,a_2 为模长，δ_1,δ_2 为辐角，定义

$$s_0=a_1^2+a_2^2,\quad s_1=a_1^2-a_2^2,\quad s_2=2a_1a_2\cos(\delta_2-\delta_1),\quad s_3=2a_1a_2\sin(\delta_2-\delta_1)$$

为 Stokes 参数，它们可以直接测量，从而描述偏振性质。
* 实际上 Stokes 参数有三个独立参数，满足 $s_0^2=s_1^2+s_2^2+s_3^2$。

能流
由电磁波定义与基本性质可算出坡印亭矢量的**周期平均值** [第一个等号可通过积分平均计算得到]

$$\bar{\vec{S}}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}|\vec{E}_0|^2\vec{n}$$

类似得能量密度**周期平均值**为

$$\bar{u}=\frac{1}{4}\left(\epsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^*+\frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}^*\right)=\frac{\epsilon}{2}|\vec{E}_0|^2$$

于是能流密度 $\bar{\vec{S}}=\bar{u}v\vec{n}$，这里 v 即为相速度。
* 此结论仅对单色均匀平面电磁波正确，一般电磁波能量流动速度未必为相速度。

§4.2 电磁波在介质表面的折射与反射

假设两种折射率分别为 n,n' 的介质 [对应介电常数、磁导率为 μ,ϵ 与 μ',ϵ']，一均匀平面电磁波从折射率为 n 的介质入射到交界面上。
为方便，设交界面法线的单位矢量 $\vec{n}$ 沿 z 轴正方向，入射电磁波波矢 $\vec{k}$ 在 xz 平面内。入射波矢与法向量张成的平面称为**入射面**，夹角 i 称**入射角**。设反射波的波矢为 $\vec{k}''$，它与负法向 $-\vec{n}$ 的夹角 r'' 称**反射角**；折射波的波矢 $\vec{K}'$，其与 $\vec{n}$ 的夹角 r 称为**折射角**。以下用 $\hat{x}$ 表示向量 $\vec{x}$ 方向的单位矢量，则入射波、折射波、反射波电磁场分别为

$$\vec{E}=\vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{S}-\mathrm{i}\omega t},\quad \vec{B}=\sqrt{\mu\epsilon}\hat{k}\times\vec{E}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i\vec{k}'\cdot\vec{S}-i\omega t},\quad \vec{B}' = \sqrt{\mu'\epsilon'}\hat{k}'\times\vec{E}'$$
$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i\vec{k}''\cdot\vec{S}-i\omega t},\quad \vec{B}'' = \sqrt{\mu\epsilon}\hat{k}''\times\vec{E}''$$

由于电磁波频率不变，类似之前推导知波矢应满足 [用 x 表示 $\vec{x}$ 的模长]

$$k = k'' = n\frac{\omega}{c},\quad k' = n'\frac{\omega}{c}$$

考虑电磁场的边界条件，$z=0$ 平面上应有 $\vec{k}\cdot\vec{n} = \vec{k}'\cdot\vec{n} = \vec{k}''\cdot\vec{n}$，也即三个波矢都处于**同一平面** [$xz$ 平面]。将其除以模长即可得到角度关系

$$i = r'',\quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n}$$

更具体来说，代入四个边界条件得到

$$(\epsilon(\vec{E}_0+\vec{E}''_0)-\epsilon'\vec{E}'_0)\cdot\vec{n} = 0$$
$$(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}''_0-\vec{k}'\times\vec{E}'_0)\cdot\vec{n} = 0$$
$$(\vec{E}_0+\vec{E}''_0-\vec{E}'_0)\times\vec{n} = 0$$
$$\left(\frac{1}{\mu}(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}''_0)-\frac{1}{\mu'}\vec{k}'\times\vec{E}'_0\right)\times\vec{n} = 0$$

由于电场强度与波矢垂直，可将电场强度分解为垂直入射面 (即 y 方向) 的分量与平行入射面 (且与对应波矢垂直) 的分量计算大小。这样分解后可直接解出 [2、4 式求解垂直分量，1、3 式求解平行分量]

$$\frac{(\vec{E}'_0)_\perp}{(\vec{E}_0)_\perp} = \frac{2n\cos i}{n\cos i+(\mu/\mu')n'\cos r},\quad \frac{(\vec{E}''_0)_\perp}{(\vec{E}_0)_\perp} = \frac{n\cos i-(\mu/\mu')n'\cos r}{n\cos i+(\mu/\mu')n'\cos r}$$
$$\frac{(\vec{E}'_0)_\parallel}{(\vec{E}_0)_\parallel} = \frac{2n\cos i}{(\mu/\mu')n'\cos i+n\cos r},\quad \frac{(\vec{E}''_0)_\parallel}{(\vec{E}_0)_\parallel} = \frac{(\mu/\mu')n'\cos i-n\cos r}{(\mu/\mu')n'\cos i+n\cos r}$$

* 这些公式统称为**菲涅尔公式**，公式除折射率外还涉及 μ/μ'，但可见光频段可近似认为 $\mu/\mu'=1$，从而公式只涉及折射率。
* 当 $i=0$ 时菲涅尔公式可以合并为

$$\vec{E}'_0 = \frac{2}{\sqrt{\mu\epsilon'/(\mu'\epsilon)}+1}\vec{E}_0,\quad \vec{E}''_0 = \frac{\sqrt{\mu\epsilon'/(\mu'\epsilon)}-1}{\sqrt{\mu\epsilon'/(\mu'\epsilon)}+1}\vec{E}_0$$

* 当 $\mu/\mu'=1$ 时，若入射角等于**布儒斯特角** $i_B = \tan^{-1}\frac{n'}{n}$，则反射波电场平行分量 $(\vec{E}''_0)_\parallel$ 为 0，也即反射波的偏振方向垂直于入射面。
* 若 $n>n'$，使得 $r=\frac{\pi}{2}$ 的角度称为全反射角，即满足 $i_0 = \sin^{-1}\frac{n'}{n}$。入射角等于 i_0 时折射波延交界面传播，而比全反射角还大时，$\cos r$ 成为纯虚数

$$\cos r = i\sqrt{\frac{\sin^2 i}{\sin^2 i_0}-1}$$

于是折射波相因子会出现 z 方向的指数衰减 $e^{-k'|\cos r|z}$ [称为**隐失波**]，无法进入 n' 介质，而将沿交界面传播。这时反射波与入射波模长一致，但相位可以有差别。

§4.3　电磁波在导电介质中的传播

假设导电介质均匀、各向同性，满足欧姆定律 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$。
* 与之前的区别在于导电介质会产生自由电流，从而出现耗散。

若所有场都简谐依赖于时间，即有相因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则根据麦克斯韦方程组可得

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B}=-\mathrm{i}\omega\left(\epsilon_b+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}$$

这里 μ,ϵ_b 为导电介质中的束缚电子贡献的介电常数与磁导率，均可能为 ω 的函数。将括号内定义为

$$\epsilon(\omega)=\epsilon_b(\omega)+\mathrm{i}\frac{\sigma(\omega)}{\omega}$$

若场具有平面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}-\mathrm{i}\omega t}$ 形式，则代入得 $k^2=\mu\epsilon\omega^2$，也即若介质 $\mu\epsilon_b$ 为实数，电导率 σ 非零，$\vec{k}$ 与 ω **不可能同为实数**：

1. 若 $t=0$ 时导体中已经存在某电磁场分布，其可以按三维空间分解为实波矢 $\vec{k}$ 的叠加，则频率 ω 必须为复数，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 的实部代表电磁场随时间**指数衰减**，这是耗散的结果。

2. 若外界有电磁波入射导体，导体内称为受迫振动，不随时间衰减，即 ω 为实数，这时 $\vec{k}$ 必须为复数，设 $\vec{n}$ 为垂直导体表面并指向内部的法向单位矢量，其应能写为 $k\vec{n}$。记 $k=k_1+\mathrm{i}\frac{1}{2}A$，$k_1$ 与 A 为实数，A 称为**吸收系数**。

   对不良导体，$\sigma/(\omega\epsilon_b)\ll 1$，近似得到

   $$k\approx\sqrt{\mu\epsilon_b}\omega+\mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_b}}\sigma$$

   吸收系数 $\sigma\sqrt{\mu/\epsilon_b}$ 几乎不依赖频率。

   对良导体，$\sigma/(\omega\epsilon_b)\gg 1$，近似得到

   $$k\approx\frac{1+\mathrm{i}}{\delta},\quad \delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

   这里 δ 称为**趋肤深度**，代表电磁波进入导体的特征长度。直接代入平面电磁波可得

   $$\vec{E}=\vec{E}_0\mathrm{e}^{-\vec{n}\cdot\vec{x}/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{n}\cdot\vec{x}/\delta-\mathrm{i}\omega t},\quad \vec{H}=\vec{H}_0\mathrm{e}^{-\vec{n}\cdot\vec{x}/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{n}\cdot\vec{x}/\delta-\mathrm{i}\omega t},\quad \vec{H}_0=\frac{1}{\mu\omega}k\vec{n}\times\vec{E}_0$$

   * 由 k 为复数，$\vec{H},\vec{E}$ 存在相位差，而根据良导体 k 的辐角约为 $\frac{\pi}{4}$ 即知相位差约为 $\frac{\pi}{4}$。

* 利用等效复介电常数 ϵ，也可研究涉及导电介质表面的反射与透射，会有与之前几乎相同的结论，但偏振变化十分复杂。

准静态近似

当导体中传导电流远大于位移电流贡献时，位移电流可以忽略，称为准静态近似，对应良导体的情形。
假设导体内 σ,μ 不依赖位置，忽略位移电流 $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$，对麦克斯韦方程组第二个方程两边取旋度，利用介质中 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 即得到

$$\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\nabla^2\vec{H}$$

边界条件仍为 $\vec{B}$ 法向连续，$\vec{H}$ 切向连续。
* 此为**扩散方程**形式，$\vec{E},\vec{B},\vec{A},\vec{J}$ 事实上都满足此形式，由于其空间特征尺度平方与时间特征尺度成比例，可以给出对趋肤深度的估计。

准静态近似下，谐振电磁场会诱导导体内部**涡流**并耗散为热。根据电路知识，耗散功率为

$$W_J = \int \mathrm{d}^3x \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle$$

这里尖括号表示周期内的平均，$\vec{J}, \vec{E}$ 均指实部对应的真实值。而外部流入导体的能流功率平均即为坡印亭矢量面积分：

$$W = -\oint \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

利用高斯公式与周期函数的时间导数周期内平均值为 0 [由牛顿莱布尼茨公式可知] 即可计算出 $W = W_J$，符合能量守恒。

* 此推导事实上与第一章能量守恒的推导基本相同，只是忽略了位移电流对应的电场能量贡献。
* 已知良导体外部的谐变磁场后，利用扩散方程与边界条件即可解出导体内部的磁场，从而估算耗散功率。

§4.4 介质色散的经典模型

考虑**经典振子模型**，也即将介质的束缚电子看作经典谐振子，有各自的本征频率与阻尼系数。
在谐振电场 [如单色平面电磁波] 下，电子会产生平均电偶极矩

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma}$$

这里 ω 为外电场频率，ω_0、γ 为本征圆频率与阻尼系数。若原子总电子为 Z 个，本征频率 ω_i，阻尼系数 γ_i 的有 f_i 个 [这称为**振子强度**]，则有介电常数为 [此式来源为真空增添电子的电偶极矩]

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma_i}$$

* 此公式事实上对量子情形也有不错的描述。
* 对导体而言，存在自由电子，即本征频率为 0 的电子，将其他电子归为 ϵ_b 后得到

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_b(\omega) + \mathrm{i}\frac{Ne^2 f_0}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)}$$

对比上节可发现 $\sigma(\omega) = \frac{Ne^2 f_0}{m(\gamma_0 - i\omega)}$，称为**德鲁德公式**。频率较低时可忽略虚部，电导率为实，而固体物理中称 $\frac{1}{\gamma_0}$ 为自由电子的**弛豫时间**。

若 $\omega \gg \omega_i$，介电常数即满足

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m}$$

ω_p 称为**等离子体频率**。此式对所有介质都成立，最极端的情况下 [如纯等离子体忽略电子阻尼]，电磁波频率小于等离子体频率时，介电常数为负，电磁波波矢进入此区域的分量变为纯虚数，也即成为隐失波，指数衰减 [**紫外透明**]。
一般频率而言，γ_i 较小，介电常数基本为实数，于是对电磁波的吸收很小，即该介质对电磁波**透明**。但当 $\omega \approx \omega_i$ 时，对该频率的吸收即非常明显，称为**共振吸收区**。
* 介电常数明显称为复数时，电磁波波数也是复数，回顾之前的 $k = k_1 + \mathrm{i}\frac{1}{2}A$，$A$ 代表能流的衰减，因此称为吸收系数。

§4.5 电磁信号在色散介质中的传播

实际电磁信号往往并不是单色均匀波，而是以**波包** [即不同频率单色波叠加] 的形式传播，以下以一维情况标量波 [忽略偏振] 为例。

波包的色散

考虑一维波包

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega(k)t}\mathrm{d}k$$

这里 $\omega(k)$ 与介质色散性质有关，$A(k)$ 代表不同频率成分的强度，根据 Fourier 变换公式可知

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int u(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

* 也可由其他时刻计算出，对单色波 $u(x,0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}$，对应振幅 $A(k)$ 为 $\sqrt{2\pi}\delta(k-k_0)$，此后仍为单色波。
* 利用傅里叶变换性质可得位置空间与频率空间的延展 [并非此处重点，省略严禁定义] 满足 $\Delta k\Delta x\geq\frac{1}{2}$，事实上是量子力学中的不确定关系。由此，位置空间波包越窄，所需频率就越宽。

由于相速度 $v_p=\frac{\omega}{k}$ 对不同频率不同，不同成分的相位差会随时间演化而变化，也即代表波包形状随时间推移发生变形，这就是**色散**。

对平面单色波，能量流动速度与相速度相同，但对波包可能非常复杂。考虑 $A(k)$ 只在 $k=k_0$ 附近某个小范围非零的情况，泰勒展开可得

$$\omega(k)\approx\omega_0+v_g(k-k_0),\quad \omega_0=\omega(k_0),v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k_0)$$

代入可发现波包随时间的演化近似为

$$u(x,t)\approx u(x-v_gt,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0v_g-\omega_0)t}$$

这里 v_g 即为**群速度**。此时波包形状几乎没有改变，只是按群速度移动，v_g 比相速度 v_p 更好刻画了波包的传播与能量流动。

* 由于 $\omega(k)=\frac{ck}{n(k)}$，计算有 [此处均省略 $k=k_0$]

$$v_g=\frac{v_p}{1+\frac{\omega}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}}$$

当存在色散，导数项非 0 时，群速度与相速度即不同。

* 当 $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}>0$ 时称为**正常色散**，而小于 0 则称为**反常色散**，反常色散时 v_g 甚至可以超过光速，但这时近似无法成立，群速度已经失去了物理意义，并不代表信号传播速度。

因果性

考虑一般的情况，回顾第一章，各向同性的线性介质中，电位移矢量与电场强度关系 [本部分讨论时均为实] 可写为

$$\vec{D}(\vec{x},t)=\epsilon_0\left(\vec{E}(\vec{x},t)+\int\chi(\tau)\vec{E}(\vec{x},t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

因果性要求 $\tau<0$ 时 $\chi(\tau)=0$，也即 t 时刻电位移矢量只能依赖 t 之前的电场强度，由此可将积分改为 0 到 ∞。

原积分两边傅里叶变换即得到介电常数的表达式 (与第一章 $\epsilon(\omega)=\epsilon_0(1+\chi^{(e)}(\omega))$ 相同)，再利用因果性可得

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}=1+\int_0^\infty\chi(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

利用此表达式与 $\vec{D},\vec{E}$ 为实可得：

1. 若 $\chi(\tau)$ 对所有 τ 有界，$\epsilon(\omega)$ 在复平面上半平面 [$\mathrm{Im}(\omega)>0$] 解析；
2. 若 $\chi(\tau)$ 在 $\tau\to\infty$ 时 [记作 $\chi(\infty)$] 为 0，利用数学可证明 $\epsilon(\omega)$ 可以延拓到实轴，但实际上利用导体等效介电常数定义可知导体 $\chi(\infty)=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$，因此在 $\omega=0$ 处有极点，可证明在实轴其他点仍可延拓；

3. 假定 χ 的连续性，有 $\chi(0)=0$，从而分部积分可得 ω 很大时

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}\approx 1-\frac{\chi'(0)}{\omega^2}$$

4. 由于 $\chi(\tau)$ 为实数，介电常数满足共轭关系 $\epsilon(-\omega)=\epsilon^*(\omega^*)$。

利用复变函数知识，对上半平面任何一点 z，有 [这里事实上可以包含 0 处为极点的情况]

$$\frac{\epsilon(z)}{\epsilon_0}=1+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\epsilon(\omega')/\epsilon_0-1}{\omega'-z}\mathrm{d}\omega'$$

这里 C 为以实轴 $[-R,R]$ 为直径的，上半平面中的充分大半圆。将此半圆趋于无穷，由于大 ω 处其以 ω^2 衰减，半圆上的积分趋于 0，可将积分改为实轴上积分，再令 $z=\omega+\mathrm{i}\delta$，并取 $\delta\to 0^+$，计算即得到

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}=1+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\mathcal{P}\int_{\mathbb{R}}\frac{\epsilon(\omega')/\epsilon_0-1}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'$$

* 此处 $\mathcal{P}$ 表示主值积分 (一种特殊的反常积分定义)。
* 将此结果实部、虚部写出就称为**克拉默斯-克勒尼希关系**，或称为色散关系，对介质普遍成立。

最大信号传播速度

假设一个空间 $x>0$ 为折射率 $n(\omega)$ 介质，$x<0$ 为真空，频谱 $A(\omega)$ 的电磁波包从真空正入射到介质，也即真空中电磁波

$$u_I(x,t)=\int A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)x-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

利用菲涅尔公式可得介质中电磁波

$$u(x,t)=\int\frac{2}{1+n(\omega)}A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)x-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

假设波前在 $t<0$ 时尚未到达 $x=0$，也即 $t<0$ 时 $u_I(x=0^-,t)=0$，类似上一部分对因果性的讨论，这时频谱

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty u_I(x=0^-,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

可以成为上半平面的解析函数 [事实上是从实轴解析延拓到上半平面]。

进一步假定 $A(\omega)$ 在 ω 很大处有界，由 $\epsilon(\omega)$ 行为可知 $n(\omega)$ 在 $|\omega|\to\infty$ 时趋于 1，因此 $\mathrm{i}k(\omega)x-\mathrm{i}\omega t$ 趋于

$$\frac{\mathrm{i}\omega(x-ct)}{c}$$

与上一部分完全类似，对 $\frac{2}{1+n(\omega)}A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)x-\mathrm{i}\omega t}$ 在半圆利用柯西积分定理，由于 $A(\omega),n(\omega)$ 在整个上半平面解析可知半圆上积分为 0，而 $x>ct$ 时，$\exp(\mathrm{i}\omega(x-ct)/c)$ 在无穷处趋于 0，因此半圆积分的极限等于实轴上积分，从而得到 $u(x,t)=0$，也即说明无论折射率形式如何，波包传播速度不可能大于光速。

§4.6 波导与谐振腔

介质波导即为不导电的光介质构成的光纤，而谐振腔为金属或铁氧体围成的封闭空间。本节讨论电磁波在其中的传播。

麦克斯韦方程组的横纵分离

不考虑边界条件时，波导管内部电磁场方程应与无限介质相同，若所有场以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 随时间振荡，应有

$$(\nabla^2+\mu\epsilon\omega^2)\begin{pmatrix}\vec{E}\\\vec{B}\end{pmatrix}=0$$

将电场纵向分量分解 $\vec{E}=E_z\vec{e}_3+\vec{E}_\perp$，磁场作相同分解，记 $\nabla_\perp$ 为 $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},0\right)$，麦克斯韦方程组可表达为

$$\frac{\partial\vec{E}_\perp}{\partial z}+\mathrm{i}\omega\vec{e}_3\times\vec{B}_\perp=\nabla_\perp E_z,\quad \vec{e}_3\cdot(\nabla_\perp\times\vec{E}_\perp)=\mathrm{i}\omega B_z$$

$$\frac{\partial\vec{B}_\perp}{\partial z}-\mathrm{i}\mu\epsilon\omega\vec{e}_3\times\vec{E}_\perp=\nabla_\perp B_z,\quad \vec{e}_3\cdot(\nabla_\perp\times\vec{B}_\perp)=-\mathrm{i}\mu\epsilon\omega E_z$$

$$\nabla_\perp\cdot\vec{E}_\perp=-\frac{\partial E_z}{\partial z},\quad \nabla_\perp\times\vec{B}_\perp=-\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

考虑沿 z 轴向上的波导管，其中的电磁波利用对称性有 [此时 k 事实上是波矢的纵向分量]

$$\vec{E}=\vec{E}(x,y)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t},\quad \vec{B}=\vec{B}(x,y)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}$$

由此代入上方方程组得到 $k_\perp$ 非零时 [此处 $\pm$ 与上方对应]

$$\vec{E}_\perp=\frac{\mathrm{i}}{k_\perp^2}(\pm k\nabla_\perp E_z-\omega\vec{e}_3\times\nabla_\perp B_z)$$

$$\vec{B}_\perp=\frac{\mathrm{i}}{k_\perp^2}(\pm k\nabla_\perp B_z+\mu\epsilon\omega\vec{e}_3\times\nabla_\perp E_z)$$

这里 $k_\perp$ 满足 $\mu\epsilon\omega^2=k^2+k_\perp^2$。

* 于是横向场**由纵向分量确定**。

* 若 E_z,B_z 均为 0，且 $\vec{E}_\perp,\vec{B}_\perp$ 存在非零解，代入上方方程组即可知 k 与 ω 必须满足 $k^2=\mu\epsilon\omega^2$，从而 $k_\perp=0$。

注意到 $\nabla_\perp\cdot\vec{E}(x,y)=\nabla\cdot\vec{E}(x,y)$，代入本部分开始的方程计算可知

$$(\nabla_\perp^2+k_\perp^2)\begin{pmatrix}\vec{E}(x,y)\\ \vec{B}(x,y)\end{pmatrix}=0$$

本节中，此后如无特殊说明，$\vec{E},\vec{B}$ 均表示**去除纵向与随时间波动项**的 $\vec{E}(x,y),\vec{B}(x,y)$，在不涉及对 z 与对时间导数时，它们满足的线性方程与 $\vec{B},\vec{E}$ 满足的完全相同。

* 求解波导中传播问题即为根据边界条件利用此方程解出纵向分量，再进一步得到横向分量。

* 定义 $E_z=0$ 的波为**横电波**或 **TE 波**，$B_z=0$ 的波为**横磁波**或 **TM 波**，均为 0 的波为**横电磁波**或 **TEM 波**，也可将波称为**模式**。根据上方讨论，TEM 波中必须满足 $k_\perp=0$，否则只有无意义的平凡解。

金属波导

考虑理想导体，电导率无穷大，则根据之前讨论可知完全屏蔽电磁波，内部电磁场为 0，从而利用麦克斯韦方程组边界条件知 $\vec{n}\times\vec{E}=0,\vec{n}\cdot\vec{B}=0$，代入横纵分离的方程得到边界上

$$E_z=0,\frac{\partial B_z}{\partial n}=0$$

这里 $\vec{N}$ 为边界面 S 的法向单位矢量。

用 $\psi(x,y)$ 表示 E_z 或 B_z，由上一部分知其满足 $(\nabla_\perp^2+k_\perp^2)\psi=0$，结合电场的边界条件 $E_z|_S=0$ 或磁场的边界条件 $\frac{\partial\psi}{\partial n}\big|_S=0$ 即可求解方程。

* 由此也即看出电场、磁场的求解是独立的。

对 $B_z=0$ 的 TM 波或 $E_z=0$ 的 TE 波，验证可知都有形式

$$\vec{H}_\perp=\pm\frac{1}{Z}\vec{e}_3\times\vec{E}_H$$

其中 Z 称为波导中的**波阻抗**，TM 波中为 $\frac{k}{\epsilon\omega}=\frac{k}{k_0}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$，TE 波中为 $\frac{\mu\omega}{k}=\frac{k_0}{k}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$，这里 k_0 为本征频率 $\sqrt{\mu\epsilon}\omega$。

由偏微分方程理论知对两种边值问题，$\psi(x,y)$ 的解均唯一，且相应 $k_\perp^2$ 一般为正的、分立的实数。将这些 $k_\perp^2$ 取值记为 $\gamma_\lambda^2, \lambda\in\mathbb{N}^*$，给定 ω 后波导中可传播的波数

$$k_\lambda^2 = \mu\epsilon\omega^2 - \gamma_\lambda^2$$

亦有限。对给定 γ_λ^2，存在截止频率 $\omega_\lambda = \gamma_\lambda/\sqrt{\mu\epsilon}$，频率 ω 必须大于截止频率才可保证 k_λ 为实，可传播。由 γ_λ^2 存在最小可能值，也存在**最小截止频率**，低于其的电磁波无法传播。

例：考虑理想导体构成的两边长 $a>b$ 的矩形波导管，以截面一个顶点为原点，a,b 两边在 x,y 轴正方向。

1. 对 TE 波，利用磁场的边界条件，分离变量可设磁场写为

   $$H_z = H_0\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

   其对应的

   $$\gamma_{mn}^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{b^2}{n^2}\right)$$

   为使电磁波存在，由 E_z 已经为 0，H_z 不能恒定，因此 m,n 不全为 0，最小的 γ_{mn} 为 γ_{10}，由此得到截止频率 $\omega_{10}=\gamma_{10}/\sqrt{\mu\epsilon}$。

2. 对 TM 波，利用电场的边界条件，分离变量可设电场写为

   $$E_z = E_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

   对应的 γ_{mn} 表达式完全相同，但此时不恒定要求 m,n 均不为零，因此最小 $\gamma_{mn}=\gamma_{11}$，截止频率为 ω_{11}。

* 对 TEM 波，由上一部分知 $k=k_0=\sqrt{\mu\epsilon}\omega$。但若在单连通区域中，考虑 $k_\perp=0$ 时的拉普拉斯方程即发现仍会导致 $\vec{E}_x,\vec{E}_y,\vec{B}_x,\vec{B}_y$ 只有常数解，于是 TEM 波**不能存在于单连通截面**的金属波导管中，须利用同轴电缆等结构。

能量流动

考虑平均能流密度 [本节中仍记为 $\vec{S}$ 而非 $\bar{\vec{S}}$] $\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*$，计算可得对 TM 波或 TE 波有

$$\vec{S}=\begin{cases}\frac{\omega k\epsilon}{2k_\perp^4}\left(\vec{e}_3|\nabla_\perp\psi|^2+\mathrm{i}\frac{k_\perp^2}{k}\psi\nabla_\perp\psi^*\right) & \mathrm{TM}\\ \frac{\omega k\mu}{2k_\perp^4}\left(\vec{e}_3|\nabla_\perp\psi|^2+\mathrm{i}\frac{k_\perp^2}{k}\psi^*\nabla_\perp\psi\right) & \mathrm{TE}\end{cases}$$

这里在 TM 波中 ψ 表示 E_z，TE 波中表示 H_z。

事实上 $\vec{S}$ 的实部为实际能流密度，理想导体时 ψ 为实，因此第二项无意义。将能流密度对波导管截面积分即可得到能量传输功率

$$P=\int_A\vec{S}\cdot\vec{e}_3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

代入 $\vec{S}$ 表达式，利用格林公式，无论对 TE 或 TM 波，对**理想导体**均有 $\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial n}=0$，设 $\gamma_\lambda=k_\perp$，记 $\omega_\lambda=\gamma_\lambda/\sqrt{\mu\epsilon}$ 即有 [利用 $k^2=\mu\epsilon(\omega^2-\omega_\lambda^2)$]

$$\begin{pmatrix}P_{TM}\\P_{TE}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\mu\epsilon}\frac{\omega k}{\omega_\lambda^2}\int_A|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\begin{pmatrix}\epsilon\\\mu\end{pmatrix}$$

利用能量密度周期平均值 $\bar{u}=\frac{1}{4}\left(\epsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^*+\frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}^*\right)$，类似积分得到单位长度平均电磁场能量

$$U=\int_A\bar{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad\begin{pmatrix}U_{TM}\\U_{TE}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2}\int_A|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\begin{pmatrix}\epsilon\\\mu\end{pmatrix}$$

* 由此 $\frac{P}{U}=\frac{k}{\omega\mu\epsilon}$，固定 γ_λ 时，由于 $\omega=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{k^2+\gamma_\lambda^2}$，计算发现恰有 $\frac{P}{U}=v_g=\omega'(k)$，也即功率与单位长度能量之比恰为**群速度**。
对**非理想导体**，一般存在欧姆损耗。简单讨论方法为假定

$$\gamma_\lambda=k_\perp^{(0)}+a_\lambda+\mathrm{i}b_\lambda$$

这里 $k_\perp^{(0)}$ 为理想导体时的 $k_\perp$，考虑损耗后实际的 γ_λ 为复，由此计算可得 $P=P_0\mathrm{e}^{-2b_\lambda z}$，于是

$$b_\lambda=-\frac{1}{2P}\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z}$$

* 可通过计算 $\vec{S}$ 的实部的扰动后积分得到。
根据良导体中电磁波与趋肤深度 δ 关系的表达式，可计算截面边界 C 的线积分得到单位长度损耗

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{2\sigma\delta}\oint_C|\vec{n}\times\vec{H}|^2\mathrm{d}l$$

谐振腔：波导管两端也用导体封闭即得到谐振腔，这时 z 方向传递的波成为驻波，波数必然为 $k=\frac{p\pi}{d},p\in\mathbb{Z}$，$d$ 为纵向长度。由此即得

$$\mu\epsilon\omega_{p,\lambda}^2=\gamma_\lambda^2+\frac{p^2\pi^2}{d^2}$$

这些频率称为谐振腔的**本征频率**。
* 事实上任何导体围成的空间都可成为谐振腔，$d\to0$ 时最低固有频率与腔的尺寸反比。

平面介质波导

* **光纤**即为介质波导重要例子，由于传输电磁波频率很高，可以忽略波动性进行**几何光学近似** [事实上就是量子力学中的半经典近似，或称 WKB 近似]，从而基本机制为光信号在内部到外部的边界上发生全反射，因此需要内层折射率 n_1 大于包层折射率 n_2。
空间中 $|x|\le a$ 部分充满折射率 n_1 介质，外部折射率 n_2，且 $n_1>n_2$。假设其中电磁波沿 $+z$ 传播，其即构成无穷大平面介质波导。设电磁波圆频率 ω，定义参数

$$k_0=\frac{\omega}{c},\quad \Delta=\frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2},\quad V=k_0a\sqrt{n_1^2-n_2^2}=n_1k_0a\sqrt{2\Delta}$$

* 由于 Δ 标志内外层折射率差异，称为**轮廓高度参数**，对通常光纤较小，将其看作小量的近似称为**弱波导近似**。V 称为**光纤参数**。
对介质波导，假设 $\vec{E}=\vec{E}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t},\vec{B}=\vec{B}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}$，记 $k_0=\sqrt{\mu\epsilon}\omega$，方程

$$(\nabla_\perp^2+k_\perp^2)\begin{pmatrix}\vec{E}(x,y)\\ \vec{B}(x,y)\end{pmatrix}=0$$

仍然成立，且由对称性可假设 E_z,H_z 与 y 无关，从而 z 方向方程化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\gamma^2\right)\psi(x)=0,\quad |x|<a$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\beta^2\right)\psi(x)=0,\quad |x|>a$$

这里 ψ 为 E_z 或 H_z，$\gamma^2=n_1^2k_0^2-k^2,\beta^2=k^2-n_2^2k_0^2$。
由一般的 $\psi''+\alpha\psi=0$ 的解的形式，为保持电磁波的正常传播，$|x|<a$ 时应关于 x 简谐，从而 $\alpha>0$；$|x|>a$ 时应关于 x 衰减，从而 $\alpha<0$ 且应取解形式为 $C\mathrm{e}^{-\sqrt{-\alpha}|x|}$，由此可知必须 $\gamma^2>0,\beta^2>0$，即得

$$n_2^2k_0^2\le k^2<n_1^2k_0^2$$

由于边界的对称性，可考虑奇函数解与偶函数解作为基本解，可验证偶函数解为

$$\psi(x)=\begin{cases}A\cos\gamma x & |x|\le a\\ B\mathrm{e}^{-\beta|x|} & |x|>a\end{cases}$$

奇函数解为

$$\psi(x)=\begin{cases}A\sin\gamma x & |x|\le a\\ B\frac{x}{|x|}\mathrm{e}^{-\beta|x|} & |x|>a\end{cases}$$

* 用横向场对 x 的奇偶性定义波的奇偶性，而由于横向场是 ψ 的微分，奇偶性相反，也即**偶函数解对应奇 TE 波或 TM 波，奇函数解对应偶 TE 波或 TM 波。**
利用 ψ 算出场后，代入麦克斯韦方程组在 $|x|=a$ 处的边界条件可得

$$\begin{aligned}
&A\sin\gamma a=B\mathrm{e}^{-\beta a},\quad \frac{A}{\gamma a}\cos(\gamma a)=\frac{B}{\beta a}\mathrm{e}^{-\beta a} && \text{偶 TE 波}\\
&A\cos\gamma a=B\mathrm{e}^{-\beta a},\quad \frac{A}{\gamma a}\sin(\gamma a)=-\frac{B}{\beta a}\mathrm{e}^{-\beta a} && \text{奇 TE 波}\\
&A\sin\gamma a=B\mathrm{e}^{-\beta a},\quad \frac{An_1^2}{\gamma a}\cos(\gamma a)=\frac{Bn_2^2}{\beta a}\mathrm{e}^{-\beta a} && \text{偶 TM 波}\\
&A\cos\gamma a=B\mathrm{e}^{-\beta a},\quad \frac{An_1^2}{\gamma a}\sin(\gamma a)=-\frac{Bn_2^2}{\beta a}\mathrm{e}^{-\beta a} && \text{奇 TM 波}
\end{aligned}$$

用前后两个方程相除可以得到传播波数 β,γ 的本征方程。记 $U=\gamma a, W=\beta a$，有

$$\begin{aligned}
&W=U\tan U && \text{偶 TE 波}\\
&W=-U\cot U && \text{奇 TE 波}\\
&n_1^2W=n_2^2U\tan U && \text{偶 TM 波}\\
&n_1^2W=-n_2^2U\cot U && \text{奇 TM 波}
\end{aligned}$$

计算发现光纤参数 $V^2=U^2+W^2$，因此给定光纤参数后结合上方方程可求解出 U,W。几何上，求解过程可看作函数曲线与圆的交点，由此可得到极限性质。
由于本征方程对应的函数定义域间断的，将最靠近原点的一支 [或对称的两支] 称为对应波的第一个模式，其次称为第二个模式，以此类推。圆 $V^2=U^2+W^2$ 能与第 k 个模式相交的最小 V 称为第 k 个模式的截止频率。由此作图可发现偶 TE 波或 TM 波第一个模式截止频率 0，第二个模式截止频率 π；奇 TE 波或 TM 波第一个模式截止频率 $\frac{\pi}{2}$。
若将偶 TE 或 TM 波的第 k 个模式记作 TE_{2k-2} 或 TM_{2k-2}，奇 TE 或 TM 波的第 k 个模式记作 TE_{2k-1} 或 TM_{2k-1}，则可统一为 TM_j 或 TE_j 截止频率 $\frac{j\pi}{2}, j\in\mathbb{N}$。
* 对 TE 或 TM 波，求解出的本征值 $U(V)$ 满足 $U\le V$，且截止频率时恰好等号成立，从而每个模式的 $U_i(V)$ 在 $U-V$ 平面上从直线 $U=V$ 延伸出，实际对一个 V 可存在多个 U_i 对应。
* 可发现平面介质波导方程与量子力学一维势阱类似，因为事实上此方程即对应光子的薛定谔方程，ψ 与波函数对应。

圆形介质波导

空间中 $\sqrt{x^2+y^2}\le a$ 部分充满折射率 n_1 介质，外部折射率 n_2，且 $n_1>n_2$。仍假设其中电磁波沿 $+z$ 传播，其即构成圆形介质波导，更符合实际模型。参数定义与之前相同，取柱坐标系 (ρ,ϕ,z)，则可得 $\psi(\rho,\phi)$ 的方程：

$$(\nabla_\perp^2+\gamma^2)\psi=0,\quad \rho<a$$

$$(\nabla_\perp^2-\beta^2)\psi=0,\quad \rho>a$$

分离变量为 $R(\rho)\Phi(\phi)$，类似第二章计算得到可取 $\Phi(\phi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$，再代入可得 $R(\rho)$ 可取

$$R(\rho)=\begin{cases}R_eJ_m(\gamma\rho) & \rho<a\\ R_hK_m(\beta\rho) & \rho>a\end{cases}$$

* 这里 J_m 为贝塞尔函数，K_m 为虚宗量贝塞尔函数，此选取确保内部的解有界，在外部衰减。

由于 $\vec{E}_z,\vec{H}_z$ 应对 ϕ 有相同频率，它们的 m 相同，下面假设对 E_z 的 R_e,R_h 为 A_e,A_h，对 H_z 的 R_e,R_h 为 B_e,B_h。此时利用麦克斯韦方程组的边界条件会发现 E_z,H_z 产生耦合，也即**不能分别求解**。具体来说，边界条件为 [U,W 定义与上一部分相同]

$$\begin{pmatrix}J_m(U) & 0 & -K_m(W) & 0\\ 0 & J_m(U) & 0 & -K_m(W)\\ \frac{\mathrm{i}mk}{\gamma^2a}J_m(U) & -\frac{\omega\mu_0}{\gamma}J_m'(U) & \frac{\mathrm{i}mk}{\beta^2a}K_m(W) & -\frac{\omega\mu_0}{\beta}K_m'(W)\\ \frac{\omega\epsilon_0n_1^2}{\gamma}J_m'(U) & \frac{\mathrm{i}mk}{\gamma^2a}J_m(U) & \frac{\omega\epsilon_0n_2^2}{\beta}K_m'(W) & \frac{\mathrm{i}mk}{\beta^2a}K_m(W)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_e\\A_h\\B_e\\B_h\end{pmatrix}=0$$

于是，非零解要求行列式为 0，这即为其**本征方程**，计算得可写成

$$\left(\frac{J_m'(U)}{UJ_m(U)}+\frac{n_2^2}{n_1^2}\frac{K_m'(W)}{WK_m(W)}\right)\left(\frac{J_m'(U)}{UJ_m(U)}+\frac{K_m'(W)}{WK_m(W)}\right)=\left(\frac{mk}{n_1k_0}\right)^2\left(\frac{V}{UW}\right)^4$$

* 其在一般情况下无法解析求解。

当 $m=0$ 时，可发现边界条件 A_e,B_e 与 A_h,B_h 不再耦合，于是分别存在非零的 $E_z=A_e=B_e=0$ 的 TE 波 [对应本征方程左侧第一个括号为 0] 与 $H_z=A_h=B_h=0$ 的 TM 波 [对应本征方程左侧第二个括号为 0]。

此时利用 $J_0'=-J_1,K_0'=-K_1$ 可进一步化简条件，截止频率对应 $U=V$，于是由本征方程可知 V 必须为 J_0 的非负零点，最小的为 $x_1^{(0)}\approx2.405$，对应波记为 $\mathrm{TE}_{01},\mathrm{TM}_{01}$。$V$ 比此频率还小时，光纤中不再能传播横电或横磁波。

当 $m=1$ 时，仍考虑截止频率发现 $J_1(V)=0$，于是 V 必须为 J_1 的非负零点，最小为 0，此时的结果称为 HE_{11} 波，可以以任何频率传播。

* 考察此后的截止频率可发现，$0<V<x_1^{(0)}$ 时只有 HE_{11} 波可以传播，由此只要 V 充分小即可实现**单模传播**。

五　电磁波的辐射和散射

* 本章无特殊说明时均考虑真空中。

§5.1　电磁势波动方程的推迟解

考察第一章中洛伦茨规范下的麦克斯韦方程组

$$\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-4\pi f(\vec{x},t)$$

这里 Ψ 为 Φ 或 $\vec{A}_i$，而 f 为对应的右端电荷分布或电流分布。为了从分布得到标势、矢势，我们必须求解此方程。

考虑 Fourier 变换

$$\mathcal{F}[\varphi](\vec{x},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\varphi(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\quad \mathcal{F}^{-1}[\varphi](\vec{x},t)=\int\varphi(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

记 $\tilde{\Psi}=\mathcal{F}[\Psi],\tilde{f}=\mathcal{F}[f]$ 可算得

$$(\nabla^2+k^2)\tilde{\Psi}(\vec{x},\omega)=-4\pi\tilde{f}(\vec{x},\omega)$$

这里 $k=\frac{\omega^2}{c^2}$，只需对固定 ω 求解此方程即可。
先求解格林函数

$$(\nabla^2+k^2)G_k(\vec{x},\vec{x}')=-4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

记 $R=|\vec{x}-\vec{x}'|$，利用对称性将 G_k 化为球坐标，即可解得

$$G_k^{\pm}(R)=\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kR}}{R}$$

* 上标 $+$ 称为**推迟格林函数**，而上标 $-$ 称为**超前格林函数**。
由于原方程含时格林函数须满足

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{x},t;\vec{x}',t')=-4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\delta(t-t')$$

记 $\tau=t-t'$ 考虑两边同作 Fourier 变换，再将解作逆变换即得 [利用 δ 函数 Fourier 变换为常数]

$$G^{\pm}(R,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kR}}{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega$$

由于 $k=\omega/c$，此积分即得到 δ 函数

$$G^{\pm}(R,\tau)=\frac{\delta(\tau\mp R/c)}{R}=\frac{1}{R}\delta(t-(t'\pm R/c))$$

于是推迟代表 $t>t'$，超前代表 $t<t'$，由于观测时间 t 必然大于源时间 t'，只有推迟格林函数符合因果律，由此可解得原方程

$$\psi(\vec{x},t)=\int\mathrm{d}^3x'\,\mathrm{d}t'G^{+}(R,\tau)f(\vec{x}',t')=\int\mathrm{d}^3x'\frac{f(\vec{x}',t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

* 对磁矢势即为将 f 替换为 $\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}$，此关系是讨论振荡电流电磁波的基本出发点。

§5.2 谐振电荷和电流分布的电磁辐射

电磁与电流分布谐振，即假设

$$\rho(\vec{x},t)=\rho(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\quad \vec{J}(\vec{x},t)=\vec{J}(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

利用连续性方程知有条件 $\mathrm{i}\omega\rho(\vec{x})=\nabla\cdot\vec{J}(\vec{x})$。
* 以下如无特殊说明，对任何电磁场相关的函数 f，$f(\vec{x})$ 即代表 $f(\vec{x},t)=f(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，**省略谐振项**。

由于已经取定了洛伦茨规范，只需求解 $\vec{A}$ 即可得到 $\frac{\partial\phi}{\partial t}$，而根据谐振即可知 $\frac{\partial\phi(\vec{x},t)}{\partial t}=-\mathrm{i}\omega\phi(\vec{x},t)$，从而得到 ϕ。对 $\vec{A}$，由上节可知

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\vec{J}(\vec{x}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

假设辐射源集中在原点附近，其尺度 d 对应 $|\vec{x}'|$ 的尺度，接收电磁波的点 $r=|\vec{x}|\gg d$，电磁波波长 $\lambda=\frac{2\pi}{k}$，分为三个区域考虑：

1. 近场区 [静态区]，满足 $d\ll r\ll\lambda$；
2. 中间区 [感应区]，满足 $d\ll r\sim\lambda$；
3. 远场区 [辐射区]，满足 $d\ll\lambda\ll r$。

对中间区或远场区，可将分母的 $|\vec{x}-\vec{x}'|$ 近似为 r，而指数上利用对 $\vec{x}'$ 泰勒展开到一阶 $|\vec{x}-\vec{x}'|\approx r-\vec{n}\cdot\vec{x}'$，这里 $\vec{n}$ 为 $\vec{x}$ 方向单位矢量，即得到近似

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\int\mathrm{d}^3x'\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vec{n}\cdot\vec{x}'}$$

由于积分只与方向有关，此近似下即为**球面波** [但一般具有各向异性]。此时根据定义与麦克斯韦方程组第二个方程可得 [由于假定 $d\ll r$，可得远处 $\vec{J}=0$]

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A},\quad\vec{E}=-\frac{\mathrm{i}Z_0}{k}\nabla\times\vec{H},\quad Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

更一般地，只要 $\gamma\gg d,r\gg d$，可作展开

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(1+\frac{\vec{n}\cdot\vec{x}'}{r}+\cdots\right)(1-\mathrm{i}k\vec{n}\cdot\vec{x}'+\cdots)$$

这里第一个括号来自分母的泰勒展开，第二个括号来自分子的泰勒展开，称为**长波近似**。将展开式不同项代入 $\vec{A}(\vec{x})$ 的表达式，即得到不同的辐射类型，将在下节讨论。

§5.3 电偶极辐射、磁偶极辐射和电四极辐射

电偶极辐射

只保留长波近似的首项得到

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\int\mathrm{d}^3x'\vec{J}(\vec{x}')$$

与第三章磁多极展开的讨论完全类似可得

$$\int\mathrm{d}^3x'\vec{J}(\vec{x}')=-\int\mathrm{d}^3x'\vec{x}(\nabla'\cdot\vec{J})=-\mathrm{i}\omega\int\mathrm{d}^3x'\vec{x}'\rho(\vec{x}')$$

记积分中为**电偶极矩** $\vec{p}(\vec{x})$，代入可得

$$\vec{A}(\vec{x})=-\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{p}(\vec{x})$$

在球坐标下计算 ∇ 算子可知

$$\vec{H}=\frac{ck^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}kr}\right)\vec{n}\times\vec{p}$$

而利用 $\vec{A}$ 与洛伦茨规范解出 ϕ 后计算得

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(k^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{\mathrm{i}k}{r^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}(3(\vec{n}\cdot\vec{p})\vec{n}-\vec{p})\right)$$

* 近场区由 $r\ll\lambda$ 可知 $kr\ll1$，这时只保留 r 的高次项，且 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\to1$，即为电偶极子场的形式：

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}(3(\vec{n}\cdot\vec{p})\vec{n}-\vec{p})$$

* 远场区 $kr\gg1$，只保留低次项，即有

$$\vec{H}=\frac{ck^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{n}\times\vec{p},\quad\vec{E}=Z_0\vec{H}\times\vec{n}$$

辐射功率的角度分布：在方向 $\vec{n}$ 处立体角的辐射功率通过坡印亭矢量周期平均 [且应取实部] 定义

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\big(r^2\vec{n}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}^*)\big)$$

对电偶极辐射计算可得 [这里 θ 为 $\vec{n},\vec{p}$ 夹角，可不妨将 $\vec{p}$ 取为 z 轴，即有 $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$]

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}=\frac{c^2Z_0k^4}{32\pi^2}|\vec{p}|^2\sin^2\theta,\quad P=\int\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}\mathrm{d}\Omega=\frac{c^2Z_0k^4}{12\pi}|\vec{p}|^2$$

磁偶极辐射

长波近似里电场、磁场分别的次级项对矢势的贡献为 [即除首项和交叉项后代入 $\vec{A}$ 表达式]

$$\frac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(\frac{1}{r}-\mathrm{i}k\right)\int \mathrm{d}^3x'(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}(\vec{x}')$$

计算可得

$$(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}=\frac{1}{2}\vec{x}'\times\vec{J}+\frac{1}{2}(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}+(\vec{n}\cdot\vec{J})\vec{x}'$$

回顾第三章中磁矩定义为 $\vec{m}=\frac{1}{2}\int(\vec{x}'\times\vec{J})\mathrm{d}^3x'$，于是只保留上式左侧的贡献时得到

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mathrm{i}k\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}kr}\right)\vec{n}\times\vec{m}$$

此时的 $\vec{A}$ 形式类似电偶极辐射的 $\vec{H}$，因此由对称性可知 $\vec{H}$ 将类似电偶极辐射的 $\vec{E}$，计算可得

$$\vec{E}=-\frac{Z_0k^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}kr}\right)\vec{n}\times\vec{m}$$

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\left(k^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}(\vec{n}\times\vec{m})\times\vec{n}+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{\mathrm{i}k}{r^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}(3(\vec{n}\cdot\vec{m})\vec{n}-\vec{m})\right)$$

* 与电偶极辐射类似，近场区磁场趋于偶极场，无穷远处振幅为球面波，类似计算可知

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}=\frac{Z_0k^4}{32\pi^2}|\vec{m}|^2\sin^2\theta,\quad P=\frac{Z_0k^4}{12\pi}|\vec{m}|^2$$

电四极辐射

考虑右侧 $\frac{1}{2}(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}+(\vec{n}\cdot\vec{J})\vec{x}'$ 的贡献，仍类似第三章可知

$$\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x'\big((\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}+(\vec{n}\cdot\vec{J})\vec{x}'\big)=-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\int(\vec{n}\cdot\vec{x}')\rho(\vec{x}')\vec{x}'\,\mathrm{d}^3x'$$

于是贡献为

$$\vec{A}(\vec{x})=-\frac{\mu_0ck^2}{8\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}kr}\right)\int(\vec{n}\cdot\vec{x}')\rho(\vec{x}')\vec{x}'\,\mathrm{d}^3x'$$

具体电磁场解的形式较复杂，远场区近似满足

$$\vec{B}=\mathrm{i}k\vec{n}\times\vec{A},\quad \vec{E}=\frac{\mathrm{i}kZ_0}{\mu_0}(\vec{n}\times\vec{A})\times\vec{n}$$

这样的辐射场即称为电四极辐射场，回顾第二章对电四极矩张量 $\mathbf{D}$ 的定义，计算得磁场可表达成

$$\vec{H}=-\frac{\mathrm{i}ck^3}{24\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{n}\times(\mathbf{D}\vec{n})$$

于是类似计算可知 [这里上标 † 为矩阵的共轭转置]

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}=\frac{c^2Z_0k^6}{1152\pi^2}\big|(\vec{n}\times(\mathbf{D}\vec{n}))\times\vec{n}\big|^2,\quad P=\frac{c^2Z_0k^6}{1440\pi}\mathrm{tr}(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D})$$

* 电偶极、磁偶极辐射功率均与 k^4 正比，电四极辐射与 k^6 正比。
* 对宏观体系而言，远场区电偶极辐射贡献最大，磁偶极辐射与电四极辐射强度大致相当。

§5.4　辐射场的多极展开

球谐函数展开

* 上一节中，我们利用长波近似对 $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ 进行了泰勒展开并进行了一定讨论，但事实上其对高阶修正并不精准。仿照静电学中的加法定理，也应对利用球谐函数展开。

类似第二章加法定理的证明，由于

$$(\nabla^2+k^2)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=-4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

两侧球谐函数展开，对比系数可得到

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}=\mathrm{i}k\sum_{l,m}j_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>)Y_{lm}^*(\vec{n}')Y_{lm}(\vec{n})$$

这里 $j_l,h_l^{(1)}$ 为球贝塞尔函数，$Y_{lm}(\vec{n})$ 为球谐函数，$r_>,r_<$ 表示 $|\vec{x}|,|\vec{x}'|$ 中较大/较小的一个。此公式称为**球面波的加法定理**。

定义**轨道角动量**算符 $\hat{L}=-\mathrm{i}\vec{x}\times\nabla$ [事实上与量子力学形式一致，相差 $\hbar$]，回顾第二章提到的角动量平方算符 $\hat{L}^2$，即为 $\hat{L}\cdot\hat{L}$，拉普拉斯算符可写为

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r}r-\frac{\hat{L}^2}{r^2}$$

多极场

若电磁场对时间均以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 谐振，空间中无电荷、电流，代入麦克斯韦方程组可知

$$(\nabla^2+k^2)\vec{H}=0,\quad \nabla\cdot\vec{H}=0,\quad (\nabla^2+k^2)\vec{E}=0,\quad \nabla\cdot\vec{E}=0$$

$$\vec{E}=\frac{\mathrm{i}Z_0}{k}\nabla\times\vec{H},\quad \vec{H}=-\frac{\mathrm{i}}{Z_0k}\nabla\times\vec{E}$$

同时可进一步计算验证

$$(\nabla^2+k^2)(\vec{x}\cdot\vec{E})=0,\quad (\nabla^2+k^2)(\vec{x}\cdot\vec{H})=0$$

计算得 $\nabla\cdot\vec{E}=0,\nabla\cdot\vec{H}=0$ 可以转化为上式，从而形成相同形式的方程。

根据数学知识，球坐标系中可取完备集 $h_l^{(1)}(kr)Y_{lm}(\vec{n}),h_l^{(2)}(kr)Y_{lm}(\vec{n})$ 展开任何函数，这里 $h_l^{(1)},h_l^{(2)}$ 为**球汉克尔函数**，上一部分的 $j_l=(h_l^{(1)}+h_l^{(2)})/2$。由此有 [此处 Ψ 为电磁场的任何一个分量]

$$\Psi(\vec{x})=\sum_{l,m}\left(A_{lm}h_l^{(1)}(kr)+B_{lm}h_l^{(2)}(kr)\right)Y_{lm}(\vec{n})$$

现在我们试着对此式作分解。从 $\vec{x}\cdot\vec{H}$ 出发，定义 (l,m) 阶**磁多极场**

$$\vec{x}\cdot\vec{H}_{lm}^{(M)}(\vec{x})=\frac{l(l+1)}{k}g_{lm}(kr)Y_{lm}(\vec{n}),\quad \vec{x}\cdot\vec{E}_{lm}^{(M)}(\vec{x})=0$$

这里 g_{lm} 为球汉克尔函数 $h_l^{(1)},h_l^{(2)}$ 的某线性组合，利用电场只有横向分量即可解得

$$\vec{E}_{lm}^{(M)}(\vec{x})=Z_0g_{lm}(kr)\hat{L}Y_{lm}(\vec{n}),\quad \vec{H}_{lm}^{M}(\vec{x})=-\frac{\mathrm{i}}{Z_0k}\nabla\times\vec{E}_{lm}^{(M)}$$

完全类似得到**电多极场**，下方 f_l 亦为球汉克尔函数的某线性组合：

$$\vec{H}_{lm}^{(E)}(\vec{x})=f_{lm}(kr)\hat{L}Y_{lm}(\vec{n}),\quad \vec{E}_{lm}^{E}(\vec{x})=\frac{\mathrm{i}Z_0}{k}\nabla\times\vec{H}_{lm}^{(E)}$$

由于线性组合的表示，任何辐射场可用电多极场与磁多极场展开，称为**多极场展开**。

记 $\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})=\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\hat{L}Y_{lm}(\vec{n})$，展开式可以写成

$$\vec{H}=\sum_{l,m}\left(a_E(l,m)f_{lm}(kr)\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})-\frac{\mathrm{i}}{k}a_M(l,m)\nabla\times g_{lm}(kr)\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})\right)$$

$$\vec{E}=Z_0\sum_{l,m}\left(\frac{\mathrm{i}}{k}a_E(l,m)\nabla\times f_{lm}(kr)\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})+a_M(l,m)g_{lm}(kr)\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})\right)$$

系数 a_E,a_M 称为电/磁多极场系数，表示成分多少，利用 $\vec{\chi}_{lm}$ 满足的正交归一关系

$$\int\vec{\chi}_{l'm'}(\vec{n})\cdot\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}=\delta_{ll'}\delta_{mm'},\quad\int\vec{\chi}^*_{l'm'}(\vec{n})\cdot(\vec{x}\times\vec{\chi}_{lm}(\vec{n}))\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}=0$$

可得到计算方式

$$a_M(l,m)g_{lm}(kr)=\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{lm}(\vec{x}\cdot\vec{H})\mathrm{d}\Omega,\quad Z_0a_E(l,m)f_{lm}(kr)=-\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{lm}(\vec{x}\cdot\vec{E})\mathrm{d}\Omega$$

多极辐射功率

考虑远场区 $kr\gg1$ 时的近似，由于系数 $a_M(l,m)g_{lm}(kr)$ 乘积一定，可假设 g_{lm},f_{lm} 都是归一化的，远场时即可近似为 $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}$，于是上方的多极场展开化为

$$\vec{H}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\sum_{l,m}(-1)^{l+1}\big(a_E(l,m)\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})+a_M(l,m)\vec{n}\times\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})\big)$$

$$\vec{E}=Z_0\vec{H}\times\vec{N}$$

从而计算可得辐射功率角分布

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}=\frac{Z_0}{2k^2}\left|\sum_{l,m}(-1)^{l+1}\big(a_E(l,m)\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})\times\vec{n}+a_M(l,m)\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})\big)\right|^2$$

* 只有某个电或磁的多极场时，求和即为 $|a(l,m)|^2|\vec{\chi}_{lm}(\vec{n})|^2$，事实上利用定义可算出 [省略参数 $\vec{n}$]

$$|\vec{\chi}_{lm}|^2=\frac{1}{l(l+1)}\left(\frac{(l-m)(l+m+1)}{2}|Y_{l,m+1}|^2+\frac{(l+m)(l-m+1)}{2}|Y_{l,m-1}|^2+m^2|Y_{lm}|^2\right)$$

利用 $\vec{\chi}$ 的正交归一性可知总辐射功率恰为

$$P=\frac{Z_0}{2k^2}\sum_{l,m}\left(|a_E(l,m)|^2+|a_M(l,m)|^2\right)$$

§5.5　电磁波的散射

电磁波传播区域的微小粒子称为**散射体**，若尺度远大于波长，可采用几何光学近似处理，但尺度与波长相当或更小时就会体现波动性。

一般描述

考虑尺度远小于波长的情况，电磁波可堪称原电磁波与散射部分的叠加，仍省略 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 项，假设入射电磁波为平面波 [将电场偏振单位矢量 $\vec{e}_0$ 与大小 E_0 分开，实际传播方向为 $\vec{n}_0$]

$$\vec{E}_c=E_0\vec{e}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vec{n}_0\cdot\vec{x}},\quad\vec{H}_c=\frac{1}{Z_0}\vec{n}_0\times\vec{E}_{inc}$$

这里 $k=\omega/c$ 为入射波数。

再假设散射波对应 $\vec{E}_s,\vec{H}_s$，真实电磁场即为二者求和。

* 对原点附近散射体，远离散射体的空间应有球面波形式。

微分散射截面定义为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\vec{n},\vec{e};\vec{n}_0,\vec{e}_0)=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2|\vec{e}^*\cdot\vec{E}_s(r\vec{n})|^2}{|\vec{e}_0^*\cdot\vec{E}_c(r\vec{n})|^2}$$

这里上标星号为共轭，$\vec{n},\vec{e}$ 为指定方向的立体角与指定的偏振态方向，将其对立体角 $\vec{n}$ 积分即可得到总散射截面。

* 将分子分母同除以 $2Z_0$，分母即成为入射波的能流密度 $\vec{S}_c$ 模长，而分子即为散射波在给定方向与立体角后的功率。

偶极散射

考虑真空中空间半径为 a，介电常数 ϵ，磁导率 μ [相对介电常数、相对磁导率记为 ϵ_r,μ_r] 的介质小球，并假设 $ka\ll 1$，即波长远大于小球半径。根据二三两章中求解的结果，可知电偶极矩、磁偶极矩分别为

$$\vec{p}=4\pi a^3\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\vec{E}_c,\quad \vec{m}=4\pi a^3\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\vec{H}_c$$

由近似条件，更高阶辐射可以忽略，因此远离散射体处，散射波电磁场能看成电偶极场与磁偶极场叠加，即

$$\vec{E}_s=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}k^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left((\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}-\frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{m}\right),\quad \vec{H}_s=\frac{1}{Z_0}\vec{n}\times\vec{E}_s$$

由此计算可知

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\vec{n},\vec{e};\vec{n}_0,\vec{e}_0)=\frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0E_0)^2}\left|\vec{e}^*\cdot\vec{p}+\frac{1}{c}(\vec{n}\times\vec{e}^*)\cdot\vec{m}\right|^2=k^4a^6\left|\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2}\vec{e}^*\cdot\vec{e}_0+\frac{\mu_r-1}{\mu_r+2}(\vec{n}\times\vec{e}^*)\cdot(\vec{n}_0\times\vec{e}_0)\right|$$

* 其具有长波散射、偶极散射特性，即正比于频率四次方。

假设 $\vec{n}_0$ 与 $\vec{n}$ 夹角 $\theta\neq 0$，其张成的平面称为**散射平面**，由于散射波 $\vec{E}_s$ 必然垂直于 $\vec{n}$，可将其分解为散射平面上与垂直于散射平面的方向。假设两方向单位矢量为 $\vec{e}_\parallel,\vec{e}_\perp$，则定义 [由偏振方向要求，这里积分是对与 $\vec{n}_0$ 垂直平面上的单位矢量]

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\parallel}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\theta_{\vec{e}_0}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\vec{n},\vec{e}_\parallel;\vec{n}_0,\vec{e}_0),\quad \frac{\mathrm{d}\sigma_\perp}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\theta_{\vec{e}_0}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\vec{n},\vec{e}_\perp;\vec{n}_0,\vec{e}_0)$$

也即代表两种极化情况的散射波对入射波偏振平均后的散射截面，利用各向同性可知其只与 θ 有关，进一步定义散射波**偏振度**

$$\Pi(\theta)=\frac{\frac{\mathrm{d}\sigma_\perp}{\mathrm{d}\Omega}-\frac{\mathrm{d}\sigma_\parallel}{\mathrm{d}\Omega}}{\frac{\mathrm{d}\sigma_\perp}{\mathrm{d}\Omega}+\frac{\mathrm{d}\sigma_\parallel}{\mathrm{d}\Omega}}$$

由此即可刻画散射波的极化程度 [其为 1 代表完全极化，只有垂直方向，其为 0 则代表完全非极化，只有平行方向]。

* 长波散射又称为**瑞利散射**，由正比频率四次方可知高频电磁波更容易被散射，因此相对高频的蓝色成为天空的颜色 [而低频直接穿透到达地面]。

多极场展开

类似球面波加法定理的讨论，利用球贝塞尔函数 j_l 可作展开

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}=4\pi\sum_{l,m}\mathrm{i}^lj_l(kr)Y_{lm}^*(\hat{n})Y_{lm}(\hat{k})$$

$\hat{n},\hat{k}$ 表示 $\vec{x},\vec{k}$ 方向的单位矢量。

若入射波为标量波，此展开即可表示，但存在偏振时会更加复杂，考虑波矢为 z 轴方向的左右旋圆偏振平面波

$$\vec{E}_c(\vec{x})=(\vec{e}_1\pm\vec{e}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz},\quad c\vec{B}_c(\vec{x})=\vec{e}_3\times\vec{E}=\mp\mathrm{i}\vec{E}$$

利用复杂的数学计算可以得到类似辐射场多极展开的关系，这里 $\vec{\chi}$ 定义与辐射场时相同，省略参数 $\vec{n}$：

$$\vec{E}_c(\vec{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{i}^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left(j_l(kr)\vec{\chi}_{l,\pm1}\pm\frac{1}{k}\nabla\times j_l(kr)\vec{\chi}_{l,\pm1}\right)$$

$$c\vec{B}_c(\vec{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{i}^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left(\frac{1}{\mathrm{i}k}\nabla\times j_l(kr)\vec{\chi}_{l,\pm1}\mp\mathrm{i}j_l(kr)\vec{\chi}_{l,\pm1}\right)$$

由此，对散射波可以作类似展开，但把 j_l 换为 $h_l^{(1)}$，并添加系数 $\alpha_\pm(l),\beta_\pm(l)$：

$$\vec{E}_s(\vec{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{i}^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left(\alpha_\pm(l)h_l^{(1)}(kr)\vec{\chi}_{l,\pm1}\pm\frac{\beta_\pm(l)}{k}\nabla\times h_l^{(1)}(kr)\vec{\chi}_{l,\pm1}\right)$$

$$c\vec{B}_s(\vec{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{i}^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left(\frac{\alpha_\pm(l)}{\mathrm{i}k}\nabla\times h_l^{(1)}(kr)\vec{\chi}_{l,\pm1}\mp\beta_\pm(l)\mathrm{i}h_l^{(1)}(kr)\vec{\chi}_{l,\pm1}\right)$$

假定散射体为半径 a 的小球，可以计算总散射功率与总吸收功率 [注意 $\vec{E},\vec{B}$ 为入射与散射之和，代表所有向内的波所贡献的功率]

$$P_s=-\frac{a^2}{2\mu_0}\int\vec{E}_s\cdot(\vec{n}\times\vec{B}_s^*)\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}},\quad P_a=\frac{a^2}{2\mu_0}\int\vec{E}\cdot(\vec{n}\times\vec{B}^*)\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}$$

也可得到微分散射截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\pi}{2k^2}\left|\sum_l\sqrt{2l+1}\big(\alpha_\pm(l)\vec{\chi}_{l,\pm1}\pm\mathrm{i}\beta_\pm(l)\vec{n}\times\vec{\chi}_{l,\pm1}\big)\right|^2$$

利用归一化性质可计算积分得 [省略下标 $\pm$]

$$\sigma_s=\frac{\pi}{2k^2}\sum_l(2l+1)\big(|\alpha(l)|^2+|\beta(l)|^2\big)$$

而对吸收的截面，利用 j_l 与 $h_l^{(1)}$ 的关系类似可得

$$\sigma_a=\frac{\pi}{2k^2}\sum_l(2l+1)\big(2-|\alpha(l)+1|^2-|\beta(l)+1|^2\big)$$

* 此公式与量子力学中散射问题的**分波法**完全一致。

小球散射

仍考虑之前的小球散射问题，但不进行长波近似。由于需要确定系数，边界条件必须给定，我们假定 $r=a$ 处满足

$$\vec{E}_t=\frac{Z_s}{\mu_0}\vec{n}\times\vec{B}$$

这里 $\vec{E}_t$ 表示电场切向分量，$\vec{n}$ 即为球面法向量，参数 Z_s 称为**表面阻抗**，由此代入多极场展开可以解得 [省略所有参数 ka]

$$a_\pm(l)=-1-\frac{h_l^{(2)}-\mathrm{i}\frac{Z_s}{Z_0}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}(xh_k^{(2)})}{\mathrm{d}x}}{h_l^{(1)}-\mathrm{i}\frac{Z_s}{Z_0}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}(xh_l^{(1)})}{\mathrm{d}x}},\quad b_\pm(l)=-1-\frac{h_l^{(2)}-\mathrm{i}\frac{Z_0}{Z_s}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}(xh_k^{(2)})}{\mathrm{d}x}}{h_l^{(1)}-\mathrm{i}\frac{Z_0}{Z_s}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}(xh_l^{(1)})}{\mathrm{d}x}}$$

当 Z_s 为 0 或无穷时，根据球贝塞尔函数的性质可知必能写成

$$\alpha_\pm(l)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l}-1,\quad\beta_\pm(l)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l'}-1$$

角度 δ_l 称为**散射相移**，对理想导体球 $Z_s=0$ 时，可显式写出 [仍省略 ka，j_l,n_l 为球贝塞尔函数]

$$\tan\delta_l=\frac{j_l}{n_l},\quad\tan\delta_l'=\frac{\frac{\mathrm{d}(xj_l)}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}(xn_l)}{\mathrm{d}x}}$$

计算可知，长波极限 $ka\ll1$ 下，对散射截面最重要的为 $l=1$ 项，l 每增加 1，相应的项会增加因子 $(ka)^2$。

六　狭义相对论

§6.1　狭义相对论的基本假设及其验证

基本假设：不同惯性系中物理规律相同 [**相对性原理**]、所有惯性系中信号可能的最大传播速度为光速 [**光速不变原理**]。

* 由于位移电流，麦克斯韦方程组在伽利略变换下会改变，两者不相容。

早期实验验证：迈克尔逊-莫雷实验，但早期光速测量存在**光学灭绝**问题，即电磁波进入介质时介质极化产生的电磁场抵消原电磁波，并产生新的电磁波，使得测量到的介质中真实传播速度为介质中光速。

由于灭绝需要距离，在灭绝距离到达前进行测量即可规避此问题，后续实验进一步验证了狭义相对论。

§6.2　洛伦兹变换

考虑惯性系 K 中两个时空点 $(t_1,\vec{x}_1),(t_2,\vec{x}_2)$，定义其**不变间隔** Δs^2 为

$$\Delta s^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - |\vec{x}_2-\vec{x}_1|^2$$

若第一个时空点发射光信号，第二个时空点收到 [这称为**光信号联系**的事件]，根据光速不变原理可知不变间隔为 0。

对另一惯性系 K'，若相对 K 的运动速度为 $\vec{v}'$，其中的时空点 $(t_1',\vec{x}_1'),(t_2',\vec{x}_2')$，则必有 $\Delta s'^2=0$。

若对任何两时空点，不变间隔平方的变换关系为 [可如此假设是由于时空均匀性，变换系数只能与 $\vec{v}$ 大小有关]

$$\Delta s^2 = A(|\vec{v}'|)\Delta {s'}^2$$

另一方面，对惯性系 K' 来说，惯性系 K 以速度 $-\vec{v}'$ 相对惯性系 K 运动，于是又有

$$\Delta {s'}^2 = A(|-\vec{v}'|)\Delta s^2$$

由于 $-\vec{v}$ 模长与 $\vec{v}$ 相同，可得 $A(|\vec{v}'|)$ 平方必然为 1，于是可能为 ±1，又由 $\vec{v}=0$ 时必然为 1，结合连续性可知只能恒为 1，即

$$\Delta {s'}^2 = \Delta s^2$$

* 不变间隔在惯性系变换下不变，满足此性质的时空称为**闵可夫斯基时空** [闵氏空间]。
* 注意到 Δs^2 未必为正，为正时称两个时空点**类时**，为负时称**类空**，为 0 时称**类光**。
* 粒子的演化轨迹在四维时空中称为**世界线**，对光子，世界线为类光点构成的**光锥**面，对速度小于光速的粒子，世界线必然落在类时区域内。

不同惯性系间不变间隔得到保持的线性坐标变换称为**洛伦兹变换**，考虑惯性系 K 与以匀速 $\vec{v}$ 相对 K 沿 x 轴正方向运动的惯性系 K'，$t=0$ 时刻的时空原点重合，且由于对称性必然有 $y'=y,z'=z$。这时，考虑与时空原点 [其在线性变换下必然保持不变] 的时空间隔可知须保持 $c^2t^2-x^2=c^2{t'}^2-{x'}^2$，这样的线性变换必然能写成

$$x' = x\cosh\psi + ct\sinh\psi,\quad ct' = x\sinh\psi + ct\cosh\psi$$

但是，在 K 系中考察 K' 系坐标原点的运动，根据定义可知 $0 = vt\cosh\psi + ct\sinh\psi$，于是进一步解得

$$x'=\gamma(x-\beta ct),y'=y,z'=z,ct'=\gamma(ct-\beta x),\quad \beta=\frac{v}{c},\gamma=\cosh\psi=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

* 对一般的运动速度 $\vec{v}$，记 $\vec{\beta}=\vec{v}/c$，γ 表达式不变，考虑分量分解可知洛伦兹变换应能写成

$$ct' = \gamma(ct-\vec{\beta}\cdot\vec{x}),\quad \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{\vec{\beta}^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{x})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}ct$$

* 利用数学知识，一般的洛伦兹变换可分解为 xy, yz, xz, xt, yt, zt 六个部分，前三个部分由保持 $x^2+y^2+z^2$ 不变即为旋转与反射，对应参考系坐标轴方向的选取，后三个部分称为**推促**，只涉及推促时的表达式如上。
* 从洛伦兹变换中时空耦合可以看出，**同时具有相对性**。
* **因果性**：两个事件的不变间隔必须类时才能得到因果关系。

§6.3　洛伦兹标量与四矢量

* 洛伦兹变换下不变的量称为**洛伦兹标量**，例如不变间隔即为洛伦兹标量。
* 回顾爱因斯坦求和约定下相同指标代表求和。

记坐标 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$，其事实上用张量语言表达为一个**逆变四矢量**，对应的**协变四矢量**定义为 $x_\mu = (x^0, -\vec{x})$，则它们可以通过**闵可夫斯基度规张量**互相转化，即有

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$$

这里 $\eta^{\nu\mu}$ 为 $\eta_{\mu\nu}$ 的逆，而根据逆变四矢量、谐变四矢量的定义，可直接得到

$$\eta^{\nu\mu} = \eta_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu}(2\delta_{\nu 0} - 1)$$

* 也即看作矩阵为 $\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$，其逆仍为自身。

一般的洛伦兹变换可以写成

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

这里 Λ^ν_μ 事实上亦为矩阵，具体分量可由上一部分得到。
* 可验证其行列式为 1，因此**四维体积元** d^4x 也是洛伦兹标量，即 $\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x'$。
* 对不变间隔，其考虑无限接近的点可写为微分形式 $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$，亦可验证为洛伦兹标量。

若时空变换下，物理量 A^μ 与 x^μ 有相同的变换形式，则称为逆变四矢量，也即

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$$

可定义对应的协变四矢量为

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$$

某两四矢量 A, B 可以定义内积 [由于协变、逆变一一对应，可视为整体进行考虑]，记为

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$$

* 此定义下可验证四矢量内积均为洛伦兹标量。特别地，不变间隔可看作 $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}x$。

电动力学中，考虑平面波，由 $c^2k^2 = \omega^2$ 计算可发现相位 $\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$ 在不同参考系不变，其也为洛伦兹标量，或定义**四波矢** $k = (\omega/c, \vec{k})$ 后写成 $\phi = k \cdot x$ 的形式。
可验证四波矢构成逆变四矢量，于是计算洛伦兹变换可得

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta)$$

这里 θ 为 $\vec{\beta}$ 与 $\vec{k}$ 的夹角，由此即得到**相对论多普勒效应**。
* 纵向、横向分别对应 $\theta = 0$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 的情况，横向多普勒效应只有考虑相对论时才会出现。。

对时空坐标四矢量的函数 $f(x)$，定义梯度算符 ∂_μ 为求导后再拼接为四矢量，利用链式法则可证明 f 为洛伦兹标量时 $\partial_u f(x)$ 为协变四矢量。可类似定义上标的梯度算符 $\partial^\nu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu$，则**达朗贝尔算符**即可写为

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\partial^\mu \partial_\mu$$

此算符即出现在电磁波动方程中。
* 由于狭义相对论对应的参考系变换为洛伦兹变换，满足其的物理理论必然在洛伦兹变换下不变，也即可以用 [符合洛伦兹变换形式定义下的] 张量写出。若一个方程能如此写出，即称其为协变的，而若物理理论中所有方程均协变，即称它是协变的，下一章中将讨论麦克斯韦方程组的协变性，从而经典电动力学是协变的。

§6.4 洛伦兹变换的数学性质

单位变换：$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$，时空均不变。
从数学上可以推出，变换为洛伦兹变换当且仅当其不改变任何四矢量内积，考虑一组基可将此条件写成

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = \eta_\alpha\beta$$

* 用矩阵写出并计算可发现行列式平方为 1，于是存在行列式为 ± 1 的两支。
数学上，所有洛伦兹变换在复合下构成一个群，其事实上可以通过分解得到六个参数来刻画，类似六对独立平面中的转动角度。其每个元素解析地依赖于六个参数，因此此群为一个**李群**。数学上可证明，行列式为 1 的洛伦兹变换的矩阵形式写为 [这里矩阵的 exp 由幂级数定义]

$$\Lambda = \exp\left(\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{i}\theta_i S_i - \omega_i K_i)\right)$$

其中 θ_i, ω_i 为 xy, yz, zx, xt, yt, zt 六个平面内的转动角度，对应的 S_i, K_i 为相应的生成元，记 E_{ij} 为第 i 行第 j 列为 1，其他为 0 的矩阵，则有

$$\mathrm{i}S_1 = E_{43} - E_{34}, \mathrm{i}S_2 = E_{24} - E_{42}, \mathrm{i}S_3 = E_{32} - E_{23}, \quad K_1 = E_{12} + E_{21}, K_2 = E_{13} + E_{31}, K_3 = E_{14} + E_{41}$$

它们满足对易关系 [这里 $[A, B] = AB - BA$，类似量子力学中定义]

$$[S_i, S_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}S_k, \quad [S_i, K_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}S_k$$

这些对易关系完全刻画了行列式为 1 的洛伦兹变换构成的群 [这也是一个李群] 的性质，称为它的**李代数**。
从之前分量分解的洛伦兹变换形式可得到，仅涉及推促的洛伦兹变换矩阵为 [β_i 为 $\vec{\beta}$ 的分量]

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

七 相对论性电动力学

§7.1 自由粒子的拉氏量与运动方程

采用拉格朗日力学的观点，对闵氏空间中的自由粒子，作用量仍然应为洛伦兹标量 [这样才能保证最小作用量原理是协变的]，而闵氏空间中可以写出的洛伦兹标量 S 为

$$S = \int L\mathrm{d}t = -mc\int \mathrm{d}s$$

这里 $L\mathrm{d}t$ 为某参考系中的表达，积分实质上是沿着世界线进行，$\mathrm{d}s$ 为不变间隔，某种意义上是世界线的弧长微元。
* 注意 $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$，而传统意义的弧长微元平方为 $\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$，于是 $\eta_{\mu\nu}$ 刻画了闵氏空间中长度 [对类空点，其距离 (不变间隔) 甚至可能是虚数] 与通常四维空间的差别，因此其称为**度规**。

假设粒子的**固有时**为 τ，也即对于粒子静止的参照系中时间间隔为 τ，则粒子时间线 x^μ 可以看作 τ 为参数的曲线，即 $x^\mu(\tau)$，于是有 [第二个等号可直接由逆变、协变四矢量定义计算得到]

$$S=-mc\int\sqrt{\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu}=-mc\int\sqrt{\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x_\mu}=-mc\int\sqrt{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}}\mathrm{d}\tau$$

* 计算可发现，以另一个参数 $\tilde{\tau}$ 对世界线作参数化，作参数变换 $\tilde{\tau}=\tilde{\tau}(\tau)$ 后，作用量仍然满足此形式，因此作用量具有**重参数化不变性**。由于 $\mathrm{d}s$ 与参数无关，这是自然的。

某参考系中，若自由粒子速度 $\vec{v}$，其蕴含 $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}$，因此可得此参考系下 $[v=|\vec{v}|]$

$$\mathrm{d}s=c\sqrt{1-\frac{v}{c^2}}\mathrm{d}t,\quad L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v}{c^2}}$$

* 注意到此时与粒子一起运动的参考系即相对原参考系速度 $\vec{v}$，因此利用洛伦兹变换可知此参考系中时间 $\mathrm{d}\tau$ 即为 $\frac{\mathrm{d}s}{c}$，因此固有时事实上满足 $\mathrm{d}s=c\mathrm{d}\tau$，这也蕴含着以固有时作为参数时，作用量对应公式的根号下事实上是 c^2。

由此，利用拉格朗日力学的公式，可知正则动量 $\vec{p}$ 与能量 [即哈密顿量] E 为

$$\vec{p}=\nabla_{\vec{v}}L=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad E=\vec{p}\cdot\vec{v}-L=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

* 能量动量关系还可写为 $E^2=c^2\vec{p}^2+m^2c^4$。
* 上述推导要求 m 为一个洛伦兹标量，称为粒子的**静止质量**，可以证明与牛顿力学中定义类似。

运动方程

考虑作用量的变分 [第二个等号可将根号中写为 $\mathrm{d}x_0^2-\mathrm{d}x_1^2-\mathrm{d}x_2^2-\mathrm{d}x_3^2$ 再由全变分计算，注意对变分，微分 $\mathrm{d}x$ 可看作普通变量]

$$\delta S=-mc\int\delta\sqrt{\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x_\mu}=-mc\int\mathrm{d}[s]x_\mu\delta\mathrm{d}x^\mu$$

记协变四矢量 $u_\mu=\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}$，称为**四速度** [这里定义方式为无量纲，也可乘 c 作为对 τ 的求导，即有量纲]，利用变分微分可交换并分部积分得到

$$\delta S=-mc\int u_\mu\mathrm{d}(\delta x^\mu)=-mcu_\mu\delta x^\mu\Big|_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}}+mc\int\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}\delta x^\mu\mathrm{d}s$$

考虑端点固定的世界线，δx^μ 在两端为 0，于是 $\delta S=0$ 即得到自由粒子运动方程

$$\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}=0$$

与 x^μ 共轭的粒子**四动量**定义为

$$p^\mu=mcu^\mu=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right)$$

* 当粒子速度为 $\vec{v}$ 时，利用 $\mathrm{d}s$ 定义可直接计算出四速度对应的逆变四矢量为 $u^\mu=(\gamma,\gamma\vec{\beta})$，$\gamma,\vec{\beta}$ 定义同前一章。
* 四动量、四速度 [须写为逆变形式] 变换规则与时空坐标相同，因此是四矢量。
* 根据之前推导，速度 0 的粒子也具有静止能量 $E=mc^2$，称为**爱因斯坦质能关系**，若 $v\ll c$，即可近似得到粒子能量为静止能量加经典动能。
* 由于四速度守恒即可知**自由粒子四动量守恒**。

零质量粒子

对零质量粒子，之前的作用量定义不再适用，需要引入辅助的世界线上的函数 $e(\tau)$，称为**单元基**，满足 $e(\tau)>0$，考虑更一般的作用量

$$S=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau\left(\frac{1}{e(\tau)}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}+e(\tau)m^2c^2\right)$$

将作用量对 $e(\tau)$ 取变分可得到

$$\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}-\mathrm{e}(\tau)^2m^2c^2=0$$

若 $m\neq 0$，此即能解出 $e(\tau)$，代入发现作用量形式与之前完全等价，于是对 x^μ 变分可得到相同的运动方程。

* 通过对 τ 重参数化，可取到合适的 $e(\tau)$ 形式，其可作为某种规范，如可选取 $e(\tau)=1$。

对零质量粒子，约束方程即为

$$\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}=0$$

对应的 $e(\tau)$ 可以任取。

* 将此作用量量子化得到的理论对应 Klein-Gordan 理论，但其并不自洽，实际上不可取，需要考虑其他形式。

§7.2 电磁场中粒子的拉氏量

高斯单位制

设下标 g 代表高斯单位制中的值，考虑真空中的麦克斯韦方程组，高斯单位制的变换为 [下方分别为电场强度、磁感应强度、电荷密度、电流密度]

$$\vec{E}=\frac{\vec{E}_g}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}},\quad \vec{B}=\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\vec{B}_g,\quad \rho=\sqrt{4\pi\epsilon_0}\rho_g,\quad \vec{J}=\sqrt{4\pi\epsilon}\vec{J}_g$$

而对规范势，高斯单位制的变换为

$$\vec{A}=\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\vec{A}_g,\quad \Phi=\frac{\Phi_g}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$$

考虑介质时，磁化强度、极化强度满足

$$\vec{M}=\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\vec{M}_g,\quad \vec{P}=\vec{P}_g\sqrt{4\pi\epsilon_0}$$

力学相关物理量，如 $\vec{x},\vec{p},t$ 等单位无变化，其他物理量则可从上方基本物理量确定。下面的讨论**采用高斯单位制**，省略下标 g。

考虑带电的微观粒子，带电量 e 也应为洛伦兹标量，根据量子理论可知其必然为电子电量整数倍 [排除夸克]。若其在某外电磁场中，电动力学假定其具有某四矢量势 $A_\mu(x)$，作用量可写成

$$S=-mc\int \mathrm{d}s-\frac{e}{c}\int A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu$$

高斯单位制下，$\Phi(x),\vec{A}(x)$ 具有相同量纲，四矢量可写为 $A^\mu(x)=(\Phi(x),\vec{A}(x))$，将作用量写为对某参考系下 $\mathrm{d}t$ 的积分后即可知

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}-e\Phi$$

由此，同前定义 $\vec{p}=m\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$，则有正则动量与哈密顿量为

$$\vec{P}=\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A},\quad H=\vec{v}\cdot\vec{P}-L=\sqrt{m^2c^2+c^2\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}+e\Phi$$

§7.3　运动方程与规范不变性

高斯单位制下电场强度、磁感应强度满足

$$\vec{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\quad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

由此列出拉格朗日方程组，可化为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=e\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B}$$

再结合相对论能量、动量关系即得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=e\vec{v}\cdot\vec{E}$$

* 为算出下式，对能量、动量关系两边求导可得 [第二个等号是代入了包含 $\vec{v}$ 的形式]

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{c^2\vec{p}}{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

再代入即可。

* 注意到拉格朗日方程组不显含矢势与标势，电磁势作规范变换**不改变运动方程**，于是运动方程具有规范对称性。
* 事实上运动方程形式与洛伦兹力直接得到的形式完全相同，也即考虑相对论不改变其形式。

与之前类似，可直接对 S 变分进行推导，仍然固定世界线的起点终点，类似利用分部积分得到

$$\delta S=mc\int\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}\delta x^\mu\,\mathrm{d}s-\frac{e}{c}\int(\partial_\nu A_\mu\delta x^\nu\,\mathrm{d}x^\mu-\partial_\nu A_\mu\,\mathrm{d}x^\nu\delta x^\mu)$$

因此，记 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$，其成为电磁场的**场强张量**，运动方程即为

$$mc\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu$$

根据场强张量的定义，其可以写为矩阵

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&E_1&E_2&E_3\\-E_1&0&-B_3&B_2\\-E_2&B_3&0&-B_1\\-E_3&-B_2&B_1&0\end{pmatrix}$$

* 由此，场强张量也满足规范不变性，于是方程仍然在规范变换下不变。(事实上，考虑量子力学时此结论并不成立。)
* 根据 $\eta^{\mu\nu}$ 的定义与二阶协变、逆变张量的要求，记 [任何二阶张量上下标改变都满足此关系式]

$$F^{\alpha\beta}=\eta^{\alpha\mu}F_{\mu\nu}\eta^{\nu\beta}$$

其矩阵表示即为电场部分取负号，磁场部分不变。

* 利用电磁场场强张量，可看出狭义相对论下事实上电磁场是统一的。

§7.4　电磁场的作用量与电动力学的协变性

* 注意介质影响麦克斯韦方程组本质是影响了 ρ 与 $\vec{J}$，因此只要验证真空中麦克斯韦方程组成立即可。

由逆变四矢量要求，对应二阶逆变张量可得洛伦兹变换下 [也可利用电场四矢量直接计算]

$$F'^{\mu\nu}=\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

若洛伦兹变换仅含有推促，利用矩阵乘法直接计算出

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})\vec{\beta}$$

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\vec{\beta} \cdot \vec{B})\vec{\beta}$$

* 这代表不同参考系下 $\vec{E}, \vec{B}$ 会相互转化。
由 $F_{\mu\nu}$ 的定义，可知

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0$$

用矩阵表达式写出发现，此即为麦克斯韦方程组不涉及 $\rho, \vec{J}$ 的后两个方程，它们通过场强张量的反对称性自然得出，称为**比安基恒等式**。
* 另一构造方法为定义对偶张量 $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$，这里 ϵ 即为完全反对称张量，类似之前的 ϵ_{ijk}，计算可发现 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ 即为将 $F^{\mu\nu}$ 电磁场位置互换，用它写出比安基恒等式即为 $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$。

为了得到麦克斯韦方程组剩下两个方程，我们需要电磁场自身的作用量，这样才能推导出其运动方程。
由于作用量需要洛伦兹不变，从场强张量出发事实上可得到两个作用量，分别是正比于 $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ 的 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 与正比于 $\vec{E} \cdot \vec{B}$ 的 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$，但由于后者在空间反射 [宇称变换] 下符号改变，不符合实际，因此作用量最终写成

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi c}\int \mathrm{d}^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

* 系数事实上与单位制有关，这里对应高斯单位制的情况。
考虑到空间存在电荷，作用量还需要增加一项，对应带电粒子与磁场的相互作用，回顾带电粒子作用量，在某参考系下，作用量写为带电粒子作用量第二部分对 ρ 的积分，计算可得

$$S_{int} = -\iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\rho}{c}\int A_\mu \mathrm{d}x^\mu = -\frac{1}{c^2}\int A_\mu \rho \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}^4x$$

记 $J^\mu = \rho\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}$，可发现其恰为 $(c\rho, \vec{J})$，而电荷守恒方程即可写为 $\partial_\mu J^\mu = 0$。记作用量为 $S = S_{em} + S_{int}$，根据最小作用量原理计算可知运动方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\nu$$

这恰为麦克斯韦方程组的前两个方程。
由此，我们验证了电动力学的协变性，即对不同惯性系一致。

§7.5 运动物体中的电磁场

* 由于宏观物体的运动速度远低于光速，一般考虑相对论效应引起的一阶修正即可。

运动电介质

利用 $\vec{D}$ 与 $\vec{H}$ 的定义，将 $\vec{D}$ 与 $\vec{H}$ 替换真空情况的 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$，可得到二阶反称张量 $H_{\mu\nu}$，若电介质中无自由电流与电荷，对应的麦克斯韦方程组后两个方程即为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

考虑以速度 $\vec{v}$ 运动的电介质，对应有 $\vec{\beta}$ 与 γ，由于对介质静止的参考系中本构关系为 $\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \vec{H} = \vec{B}/\mu$，利用四速度的定义，洛伦兹变换后本构关系化为

$$H^{\mu\nu}u_\nu = \epsilon F^{\mu\nu}u_\nu, \quad F_{(\mu\nu}u_{\lambda)} = \mu H_{(\mu\nu}u_{\lambda)}$$

这里三个指标上的小括号表示轮换求和，类似 $F_{\mu\nu}$ 表示的比安基恒等式的形式，写成三维矢量的形式即

$$\vec{D}+\vec{\beta}\times\vec{H}=\epsilon(\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B}),\quad \vec{B}-\vec{\beta}\times\vec{E}=\mu(\vec{H}-\vec{\beta}\times\vec{D})$$

作一次近似，将第二式 $\vec{B}$ 代入第一式，忽略 $\vec{\beta}$ 的高阶项即得

$$\vec{D}\approx\epsilon\vec{E}+(\epsilon\mu-1)\vec{\beta}\times\vec{H}$$

类似得

$$\vec{B}\approx\mu\vec{H}-(\epsilon\mu-1)\vec{\beta}\times\vec{E}$$

对边界条件，由于介质中无自有电荷，因此对法向 [$\vec{n}$ 指垂直界面的单位矢量] 仍有

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=0,\quad \vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$

对切向，仍利用静止情况作洛伦兹变换发现一阶近似下

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\beta_n(\mu_2-\mu_1)\vec{H}_t,\quad \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=-\beta_n(\epsilon_2-\epsilon_1)\vec{E}_t$$

这里 $\beta_n=\vec{\beta}\cdot\vec{N}$ 为法向速度，$\vec{H}_t=\vec{n}\times\vec{H},\vec{E}_t=\vec{n}\times\vec{E}$ 表示切向的电磁场。
* 这里切向的电磁场无需考虑是哪个介质中，因为边界面切向电磁场相差为一阶小量，其差别代入右侧成为二阶小量。
例：考虑真空匀强磁场 $\vec{B}$ 内半径 a，角速度 $\vec{\omega}$ 的匀速**旋转介质球**，介电常数 ϵ、磁导率 μ，考虑其生成的电场。
由于此为相对论效应，磁场分布的修正为小量，可假设其与静止时一致，由第三章对球壳的计算，取内半径为 0，外半径为 a，可知高斯单位制下内部 $\vec{H}_{in}=\frac{3}{\mu+2}\vec{B}$。
但对电场，由于静止时并无电场，因此首项即为一阶小量，需要考虑。引入静电势 Φ，电场 $\vec{E}=-\nabla\Phi$，球外方程即 $\nabla^2\Phi_{r>a}(\vec{x})=0$，球内由 $\nabla\cdot\vec{D}=0$，代入一阶修正的 $\vec{D}$，再代入 $\vec{\beta}=\frac{1}{c}\vec{\omega}\times\vec{x}$ 即得

$$\nabla^2\Phi_{r<a}(\vec{x})=\frac{2(\epsilon\mu-1)}{c\epsilon}\vec{\omega}\cdot\vec{H}_{in}$$

由此，球内等效有一个常电荷密度，而球外电荷密度为 0，考虑近似到电四极矩张量 D_{ij} [回顾第二章静电多极展开]，利用边界条件可解出

$$\Phi_{r>a}(\vec{x})=\frac{1}{6}D_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}$$

$$\Phi_{r<a}(\vec{x})=\frac{r^2}{2a^5}D_{ij}n_in_j+\frac{\mu\epsilon-1}{3c\epsilon}(r^2-a^2)\vec{\omega}\cdot\vec{H}_{in}$$

$$D_{ij}=-\frac{3a^5(\epsilon\mu-1)}{(3+2\epsilon)(2+\mu)\big(B_i\omega_j+B_j\omega_i-\frac{2}{3}\delta_{ij}\vec{\omega}\cdot\vec{B}\big)}$$

运动导体

考虑以速度 $\vec{v}$ 运动的电介质，对应有 $\vec{\beta}$ 与 γ，根据上节 $\vec{E},\vec{B}$ 相对论变换的表达，一阶近似下导体感受到的电场为

$$\vec{E}_e=\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B}$$

于是利用欧姆定律得电流密度为

$$\vec{J}=\sigma(\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B})$$

假设磁场为准静态，即忽略位移电流，此时 μ 为常数，$\vec{B}=\mu\vec{H}$，于是利用麦克斯韦方程组可得磁场满足

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\nabla\times(\vec{v}\times\vec{H})=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\nabla^2\vec{H}$$

例：考虑真空匀强磁场 $B\vec{e}_3$ 内半径 a，角速度 $\omega\vec{e}_3$ 的匀速**旋转导体球**，电导率 σ、磁导率 1，考虑其生成的电磁场。
稳态时**导体参考系**下导体中电场必然为 0，不然会产生耗散，利用上方公式也即 $\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B}=0$。
与上个例子类似，磁场 $\vec{B}$ 可不用考虑相对论效应，全空间为 $B\vec{e}_3$，从而球坐标系下计算可知

$$\vec{E}_{r<a}=-\frac{\omega Br}{c}\sin\theta(\vec{e}_r\sin\theta+\vec{e}_\theta\cos\theta)$$

根据高斯单位制下麦克斯韦方程组，事实上体电荷密度为常值

$$\rho=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\omega B_0}{2\pi c}$$

* 可计算得到总体电荷，为使导体球保持电中性，球上必然还有面电荷分布，它们与体电荷共同产生全空间电场。面电荷分布也是导体内电场并不球对称的原因。
为计算球外的电场，引入静电势 Φ，由 ϕ 方向对称性与无穷远处边界条件可知静电势能球外展开成

$$\Phi_{r>a}(r,\theta)=\sum_{l=0}\frac{A_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

* 即为球谐函数展开，利用了 $m=0$ 时退化为勒让德函数。
由于球内 $\vec{E}$ 已经写出，可知 [常数 ϕ_0 待定]

$$\Phi_{r<a}(r,\theta)=\phi_0+\frac{\omega B_0r^2}{3c}(1-P_2(\cos\theta))$$

由于介质极化，内外包含的 l 应相同，于是外部也仅包含 $l=0,2$，结合边界条件即得

$$\Phi_{r>a}(r,\theta)=\left(\phi_0+\frac{\omega B_0a^2}{3c}\right)\frac{a}{r}-\frac{\omega B_0a^5}{3cr^3}P_2(\cos\theta)$$

考虑此电势计算出的 $\vec{E}$，法向 $\vec{E}_n$ 存在跃变，于是面电荷密度为

$$\Sigma(\theta)=\frac{1}{4\pi}\big(E_r(a^+)-E_r(a_-)\big)=\frac{\phi_0}{4\pi a^2}+\frac{\omega B_0a}{12\pi c}(3-5P_2(\cos\theta))$$

将其对表面积分得到总面电荷 $\phi_0a+\omega B_0a^3/c$，其与总体电荷和为 0 即解出

$$\phi_0=-\frac{\omega B_0a^2}{3c}$$

* 事实上由于外部 $l=0$ 的项对应内部总电荷，不应存在，由此可以直接得到 ϕ_0 的表达式，于是最终有

$$\Phi_{r<a}(r,\theta)=-\frac{\omega B_0a^2}{3c}+\frac{\omega B_0r^2}{3c}(1-P_2(\cos\theta)),\quad \Phi_{r>a}(r,\theta)=-\frac{\omega B_0a^5}{3cr^3}P_2(\cos\theta)$$

§7.6 均匀静电磁场中带电粒子的运动

考虑静止质量为 m，所带电荷为 e 的粒子，运用三维形式运动方程计算。

均匀静电场
设场强 $\vec{E}_0$，此时代入运动方程可知

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=e\vec{E}_0,\quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=e\vec{v}\cdot\vec{E}_0$$

于是 $\vec{p}$ 匀速增加，足够长时间后 [可忽略 $\vec{p}(0)$ 时]$\vec{p}$ 与时间正比，也即能量增加速度大致随时间正比。
* 为考虑到相对论效应时加速器基本原理。

均匀静磁场

设场强 $\vec{B}_0$，这时能量不随时间变化，从而速度大小不随时间变化，因此 γ 不随时间变化，速度与动量比例恒定，可将动量方程写为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times \vec{\omega}_{\vec{B}}, \quad \vec{\omega}_{\vec{B}} = \frac{e\vec{B}}{\gamma mc} = \frac{ec\vec{B}}{E}$$

这里 $\vec{\omega}_{\vec{B}}$ 称为**回旋频率**。

设 $\vec{B} = B\vec{e}_3$，回旋频率大小 ω_B，给定初始速度，可发现平行磁场方向分量与垂直磁场方向分量的大小均恒定不变，记作 $v_\parallel$ 与 $v_\perp$，并记对应的 $p_\perp = \gamma m v_\perp$，可直接写出解

$$\vec{v}(t) = v_\parallel \vec{e}_3 + \omega_B a(\vec{e}_1 - \mathrm{i}\vec{e}_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_B t - \phi)}, \quad a = \frac{cp_\perp}{eB}$$

这里 ϕ 为相位参数，由初始速度确定，a 称为**回旋半径**，再对 t 积分即可得到轨迹为螺线，与经典结果完全相同。

* 与之前相同，此处复物理量取实部表示真实值。

均匀正交电磁场

对 $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ 的情况，回顾之前 $\vec{E} \cdot \vec{B}$ 与 $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ 为洛伦兹不变量，因此可期望将其洛伦兹变换为静电场或静磁场。

假设原本在 K 系中。$|\vec{B}| > |\vec{E}|$ 时取参考系 K' 的速度

$$\vec{u} = c\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{B}|^2}$$

计算即得磁场 $\vec{B}' = \vec{B}/\gamma$，静电场为 0；$|\vec{B}| < |\vec{E}|$ 时取参考系 K' 的速度

$$\vec{u} = c\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E}|^2}$$

计算即得磁场 $\vec{E}' = \vec{E}/\gamma$，静磁场为 0。

这样就化为了之前讨论过的情况。

一般均匀经典磁场

这时更简单的形式可利用四速度形式的运动方程。回顾其为

$$mc\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu$$

记 $F^\alpha_\nu = \eta^{\alpha\mu}F_{\mu\nu}$，对应矩阵为 $\mathbf{F}$，四速度 u^μ 看作四维矢量 u，上式两边左侧同乘 $\eta^{\alpha\mu}$ 后对 μ 求和即可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{mc}\mathbf{F}u$$

由于此为线性方程组，可直接得

$$u(\tau) = \exp\left(\frac{e\tau}{mc}\mathbf{F}\right)u(0)$$

矩阵的 exp 由幂级数定义，由此即得世界线的参数方程。

* 严格来说，F^α_ν 应为 $F^\alpha{}_\nu$，与 $F_\mu{}^\alpha = F_{\mu\nu}\eta^{\nu\alpha}$ 区分。

八 运动带电粒子的辐射

§8.1 李纳-谢维尔势

回到四维协变形式的麦克斯韦方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\nu$$

采用洛伦茨规范，有 $\partial_\mu A^\mu = 0$，代入计算可知即为

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

为对其求解，直接考虑其对应的四维格林函数

$$\partial_\mu \partial^\mu D(x, x') = \delta^4(x - x')$$

其可利用傅里叶变换展开为

$$D(x, x') = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-x')}$$

这里 k 为四矢量。

* 注意四矢量内积定义为 $\eta^{ij} k_i x_j$，与通常不同。对傅里叶变换而言，这只相当于改变了 k 对应分量的符号，并不影响变换成立，因此仍可如此书写，下方计算同理，但注意左侧求导的 ∂ 符号也需要对应调整，具体数学细节较复杂。

利用 δ 函数傅里叶变换可得 $\tilde{D}(k) = -\frac{1}{k^2}$，这里 $k^2 = k \cdot k$，从而可写出积分

$$D(x, x') = -\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-x')}}{k^2}$$

记 $k = (k_0, \vec{k})$，由于分母 $k_0^2 - \vec{k}^2$ 可能为 0，事实上最终对 k_0 的积分需要采取对复平面某围道积分的定义 [假设对 $\vec{k}$ 分量的积分可直接进行，只通过 k_0 在复平面处理奇点]。考虑在上半平面绕过奇点 $\pm|\vec{k}|$ 的积分，利用柯西积分定理可以发现，这与

$$D^+(x, x') = -\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-x')}}{(k_0 + \mathrm{i}\epsilon)^2 - \vec{k}^2}, \quad \epsilon > 0$$

完全相等，这里 D^+ 即为**推迟格林函数**。

* 推迟体现在当时间 $x_0 < x_0'$ 时，计算可得到 $D^+(x, x') = 0$。若在下半平面进行积分，会得到 ϵ 变为 $-\epsilon$ 的 D^-，但其为超前格林函数，不符合物理。

对推迟格林函数进一步计算可得到显式表达

$$D^+(x, x') = \frac{\delta(x_0 - x_0' - R)}{4\pi R} = \frac{\theta(x_0 - x_0')}{2\pi} \delta((x - x')^2)$$

这里 R 为 (x_1, x_2, x_3) 的模长，θ 表示大于 0 时为 1，小于 0 时为 0 的函数，在后一个形式中用于舍弃 $x_0 = x_0' - R$ 的解。

* 对比可发现此形式与第五章的推迟格林函数完全一致。

由此即可得到洛伦茨规范下电磁势的解为

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int \mathrm{d}^4 x' D^+(x - x') J^\mu(x')$$

对运动的带电粒子，设其世界线为 $r^\mu(\tau)$，设带电量 e，则利用 $J^\mu = (c\rho, \vec{J})$ 可得到

$$J^\mu(x') = ec^2 \int \mathrm{d}\tau u^\mu(\tau) \delta^4(x' - r(\tau))$$

在 A^μ 中代入格林函数与 J^μ 的表达式，由于总共进行了五次积分，其中恰有五次 δ 函数，最终的 A^μ 必然为某个点的值的贡献，分析可得

$$A^\mu(x) = \frac{e u^\mu(\tau_0)}{u(\tau_0) \cdot (x - r(\tau_0))}$$

这里 τ_0 为满足 $r_0(\tau_0) = x_0 - R$ 的点。

* 从几何上来看，满足 $r_0 - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = x_0 - R$ 的点构成 x 出发的下半个光锥 [这里将 x_0 看作纵轴]，而 $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} - r_0 = x_0 - R$ 的点构成上半个光锥，两者结合即成为所有满足不变间隔 $(r - x)^2 = 0$ 的

x 的类光点。由于粒子的运动轨迹 $r(\tau)$ 一定为 t 的某个函数 [假设不考虑产生湮灭，对任何 t 存在唯一 $\vec{x}$ 对应]，其必然会与分割 x_0 的下半光锥、上半光锥各有一个交点，与下半光锥的交点即为符合因果律的解 $r(\tau_0)$，存在唯一。
代入回四速度与四矢量势三维分量形式，可得到

$$\Phi(\vec{x},t)=\frac{e}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R}\bigg|_{ret},\quad \vec{A}(\vec{x},t)=\frac{e\vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})}\bigg|_{ret}$$

下标 ret 表示在 $r(\tau_0)=(ct_0,\vec{r})$ 的时空点计算，而 $\vec{n}$ 即为 $\vec{x}-\vec{r}$ 的方向单位矢量。这就称为**李纳-维谢尔势**。

电磁场计算

由于推迟效应，很难对 $\Phi,\vec{A}$ 直接微分计算电磁场，因此需要考虑其他方式。由前得到显式积分形式的四矢量势 [这里将 θ 函数改写为积分限]

$$A^\mu(x)=2ec\int_{x^0>r^0(\tau)}u^\mu(\tau)\delta((x-r(\tau))^2)\mathrm{d}\tau$$

其对 x^μ 的梯度 ∂^μ 计算涉及 δ 函数的导数，我们先利用复合函数求导公式作替换

$$\partial^\mu\delta((x-r(\tau))^2)=-\frac{(x-r)^\mu}{u\cdot(x-r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta((x-r(\tau))^2)$$

再利用分部积分即可计算得值，进一步计算有

$$F^{\mu\nu}(x)=\frac{ec}{u\cdot(x-r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{(x-r)^\mu u^\nu-(x-r)^\nu u^\mu}{u\cdot(x-r)}\right)\bigg|_{ret}$$

写为三维形式可得

$$\vec{E}=\left(\frac{e(\vec{n}-\vec{\beta})}{\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3R^2}+\frac{e}{c}\frac{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3R}\right)\bigg|_{ret},\quad \vec{B}=(\vec{n}\times\vec{E})\big|_{ret}$$

* 关于 δ 函数与其导数的严谨定义需要泛函分析，可证明这里利用分部积分能够正确计算。
* 这里 $\dot{\vec{\beta}}$ 为其对时间导数，也即为 $\frac{1}{c}\dot{\vec{v}}$，对应粒子加速度。

洛伦兹变换思路

考虑匀速运动的的电荷 q，假设观测点坐标为 $(0,b,0)$，观测到其运动方程为 $(x,y,z)=(vt,0,0)$。
设与带电粒子一同运动的参考系为 K'，取时间 t' 与 t 零点相同，则由于 K' 系中观测点以速度 v' 反向运动，可知

$$\vec{E}'=\left(-\frac{qvt'}{r'^3},\frac{qb}{r'^3},0\right),\quad \vec{B}'=(0,0,0)$$

这里 $r'=\sqrt{b^2+(vt')^2}$，此方程即静止电荷产生的电场 (高斯单位制下)。
利用两个系中观测时空点坐标的关系知只需代换 t' 为 γt [这是由于观测点坐标的 $x=0$]，再洛伦兹变换 K' 到 K，即得到 K 系中

$$E_1=-\frac{q\gamma vt}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}},\quad E_2=\frac{q\gamma b}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}},\quad B_3=\beta E_2,\quad E_3=B_1=B_2=0$$

* 此计算方法用于推导李纳-谢维尔势是错误的，因为无法处理**加速度**项。
* 若用之前得到的公式，需要处理推迟点的具体位置，这里粒子固有时即为 t'，由此直接利用洛伦兹变换公式可解出 t_0'，最终得到的形式与上方相同。

§8.2 拉莫尔公式与汤姆孙散射

拉莫尔公式

考虑非相对论情形，之前的电磁场表达式中 $\vec{\beta}$ 近似为 0，γ 近似为 1，去除 $\frac{e\vec{n}}{R^2}$ 这项点电荷产生的电场，辐射电场即为

$$\vec{E}=\left(\frac{e}{c}\frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}})}{R}\right)\Big|_{ret}$$

由于 $\vec{B}=(\vec{n}\times\vec{E})\big|_{ret}$ 仍满足，由定义，点电荷在 $\vec{n}$ 方向辐射的功率为 [由于考虑的是某时刻辐射出的功率，取 $R\to 0$ 可知无需下标 ret，注意为高斯单位制]

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}=\frac{cR^2}{4\pi}\vec{n}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\frac{e^2}{4\pi c^3}|\dot{\vec{v}}|^2\sin^2\theta$$

这里 θ 为 $\dot{\vec{v}}$ 与 $\vec{n}$ 夹角，积分可得到总功率为

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\dot{\vec{v}}|^2$$

这就称为拉莫尔公式。

为进行相对论推广，注意到 $\dot{\vec{v}}=\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$，其对应洛伦兹不变的推广应为

$$P=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\gamma^6\big((\dot{\vec{\beta}})^2-(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2\big)$$

第二个等号利用洛伦兹变换得到的 $\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\tau$ 与 $\vec{\beta},\gamma$ 的定义直接计算即得 [注意上标的点表示对观测所在参考系中的 t 求导]，此公式称为**李纳公式**。

汤姆孙散射

考虑频率 ω 的电磁波入射到自由电子，入射波电场为

$$\vec{E}=\vec{e}_0E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_0\cdot\vec{x}-\mathrm{i}\omega t}$$

于是自由电子获得的加速度即为 $\frac{e}{m}\vec{E}$，利用第五章微分散射截面的公式计算可得到

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\vec{n},\vec{e};\vec{n}_0,\vec{e}_0)=\frac{e^4}{m^2c^4}|\vec{e}^*\cdot\vec{e}_0|^2$$

进一步地，考虑 $\frac{\mathrm{d}\sigma_\parallel}{\mathrm{d}\Omega}$ 与 $\frac{\mathrm{d}\sigma_\perp}{\mathrm{d}\Omega}$，两者之和称为**非极化**的微分散射截面，计算得为 [这里 θ 仍表示 $\vec{n}_0$ 与 $\vec{n}$ 夹角]

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta)=\frac{e^4}{m^2c^4}\frac{1+\cos\theta}{2}$$

于是积分可得电子对电磁波的总非极化散射截面

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}$$

* 此公式仅对低频电磁波成立，高频时必须考虑量子效应，例如著名的**康普顿散射**实验。

§8.3 相对论性加速电荷的辐射

考虑相对论效应，与之前类似，$\vec{E}$ 表达式第二项看作辐射，可知

$$(\vec{S}\cdot\vec{n})\big|_{ret}=\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\vec{n}\Big|_{ret}=\frac{e^2}{4\pi cR^2}\left|\frac{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\right|^2\Bigg|_{ret}$$

由此，考虑粒子在 T_1 到 T_2 时间辐射的总能量，代入 ret 表达式 $t=t'+R(t')/c$ 可知

$$E=\int_{T_1+R(T_1)/c}^{T_2+R(T_2)/c}(\vec{S}\cdot\vec{n})\big|_{ret}\mathrm{d}t=\int_{T_1}^{T_2}(\vec{S}\cdot\vec{n})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t'$$

考虑到粒子运动轨迹可知 $\frac{\mathrm{d}R(t')}{\mathrm{d}t'}=\vec{n}\cdot\vec{v}$，于是对 $t=t'+R(t')/c$ 两边微分可知 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}t'(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})$，于是代入即可知单位立体角内辐射功率为

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=R^2(\vec{S}\cdot\vec{n})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}=\frac{e^2}{4\pi c}\frac{\left|\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})\right|^2}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^5}$$

应用例

1. **直线加速**

   这时 $\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}=0$，不妨设在 z 轴运动，假设观测点与其夹角 θ，计算可知

   $$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

   $\beta\approx 0$ 时情况即回到拉莫尔公式，但相对论时计算发现功率达到即极大的 $\theta_{\max}$ 满足

   $$\cos\theta_{\max}=\frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}$$

   也即 v 越大，辐射越集中于向前的方向。

   * 对角度积分可得李纳公式。

2. **圆周运动**

   这时 $\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}=0$，设 $\vec{\beta}$ 沿 z，$\dot{\vec{\beta}}$ 沿 x，考虑球坐标系下则有

   $$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left(1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right)$$

   * 高速时仍有向前辐射的特性。

利用李纳公式，类似上方讨论，对粒子加速器，直线加速时粒子辐射功率为

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

而圆周运动时功率为

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\gamma^2\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

都与受力平方正比，但圆周辐射会有额外因子 γ^2，意味着加到相同速度会需要更多外场能量。

§8.4 粒子辐射的频谱

利用上节讨论，在 t 时刻观测到的粒子辐射功率角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2}{4\pi c}\left|\frac{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\right|^2\Bigg|_{ret}$$

记右侧为 $|\vec{A}(t)|^2$，注意这里使用探测者的时间，因为频谱按探测者时间度量。单位立体角中总能量应为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=\int|\vec{A}(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

记对应傅里叶变换与逆变换为

$$\vec{A}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\vec{A}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\quad \vec{A}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\vec{A}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

利用**帕塞瓦尔等式**，$\int|\vec{A}(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int|\vec{A}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$，又因 $\vec{A}(t)$ 为实数由定义可知 $\vec{A}(-\omega)=\vec{A}(\omega)^*$，其模长相等，因此有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\omega,\quad \frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega}=2|\vec{A}(\omega)|^2$$

* 此处 $\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega}$ 即为**频谱角分布**。

将 $\vec{A}(t)$ 的表达式代入，并利用 t 与 t' 的关系，即知

$$\vec{A}(\omega)=\sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2c}}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t'+R(t')/c)}\frac{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2}\mathrm{d}t'$$

下面假设辐射粒子的运动在坐标原点附近，而观测点非常遥远，这时 $\vec{n}$ 近似为常矢量，回顾之前近似 $R(t')\approx|\vec{x}|-\vec{n}\cdot\vec{r}(t`)$，其中 $\vec{r}$ 代表粒子的轨迹，由此，由只和模长有关忽略常数相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega|\vec{x}|/c}$，可得到 [将积分变量 t' 重新记为 t]

$$\vec{A}(\omega)=\sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2c}}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\vec{n}\cdot\vec{r}(t)/c)}\frac{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta}(t))\times\dot{\vec{\beta}}(t))}{(1-\vec{\beta}(t)\cdot\vec{n})^2}\mathrm{d}t$$

* 由此，只要轨迹方程已知即可通过 $\vec{A}(\omega)$ 计算出频谱角分布。

利用

$$\frac{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta}(t))\times\dot{\vec{\beta}}(t))}{(1-\vec{\beta}(t)\cdot\vec{n})^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta}(t))}{1-\vec{\beta}(t)\cdot\vec{n}}$$

并分部积分可得到化简的表达式

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c}\left|\int(\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta}(t)))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\vec{n}\cdot\vec{r}(t)/c)}\mathrm{d}t\right|^2$$

周期情况

若粒子运动完全周期，设其角频率 [**基频**] 为 ω_0，则辐射电磁波频率应为基频整数倍。此时由傅里叶级数作展开

$$\vec{A}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\vec{A}_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0t},\quad \vec{A}_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\vec{A}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0t}\mathrm{d}t$$

这里 T 即为周期 $2\pi/\omega_0$，这时平均功率可写为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|\vec{A}(t)|^2\,\mathrm{d}t=|\vec{A}_0^2|+2\sum_{n=1}^{\infty}|\vec{A}_n|^2$$

利用傅里叶级数的帕塞瓦尔等式，且仍由定义 $\vec{A}_{-n}=\vec{A}_n^*$，可知第二个等号成立。

与之前完全类似算出记第 n 个倍频的平均功率角分布

$$\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\Omega}=2|\vec{A}_n|^2=\frac{e^2n^2\omega_0^2}{2\pi cT^2}\left|\int_{-T/2}^{T/2}(\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta}(t)))\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0(t-\vec{n}\cdot\vec{r}(t)/c)}\right|^2$$

* 考虑半径 a 速度 v，**匀速圆周运动**，可从频谱角分布的公式取 $\omega=n\omega_0$，积分限定在一个周期，并乘相邻频率间隔 $\omega_0=v/a$ 与周期的倒数 $v/(2\pi a)$，即可得到立体角功率

$$\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{v^2}{2\pi a^2}\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega}\bigg|_{\omega=n\omega_0}$$

这与之前的结果一致。

§8.5 同步辐射的频谱

相对论性带电粒子作周期性圆周运动 [设半径为 a] 的辐射称为**同步辐射**。

定性分析

回到公式

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left(1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right)$$

定性分析可知 $\beta\to1$ 时粒子在 $\theta\approx0$ 周围很小的角度，估计可得集中区域 $\Delta\theta\sim\gamma^{-1}$。由于辐射方向性，能够被探测辐射的时间内，粒子只在圆周上行进了很短距离 $d=a\Delta\theta$，时间间隔 $\Delta t=d/v$，这段时间波前的行进距离为 $D=c\Delta t$，因此波前泊位在空间的间隔

$$L=D-d\sim\frac{a}{\gamma}\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\sim a\gamma^{-3}$$

对观测者而言，其观测到的电磁脉冲持续时间约为 $L/c\sim(a/c)\gamma^{-3}$，也即电磁脉冲时间为周期的 γ^{-3} 倍量级。利用傅里叶变换的性质，周期性脉冲频谱的展宽除以基本频率为此因子的倒数，也即

$$\omega_c\sim\omega_0\gamma^3$$

这里 ω_c 为临界频率，ω_0 为粒子回旋频率。

定量分析

利用

$$\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\Omega}=2|\vec{A}_n|^2=\frac{e^2n^2\omega_0^2}{2\pi cT^2}\left|\int_{-T/2}^{T/2}(\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta}(t)))\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0(t-\vec{n}\cdot\vec{r}(t)/c)}\right|^2$$

考虑轨迹为 $\vec{r}(t)=a(\cos\omega_0t,\sin\omega_0t,0)$，这时可知归一化速率 $\beta=v/c=\omega_0a/c$，由对称性可不妨设观测点在 xz 平面内，$\vec{n}=(\sin\theta,0,\cos\theta)$，记 $\phi=\omega_0t$，这时可利用贝塞尔函数的性质

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi-z\cos\phi)}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=-\frac{1}{z}J_n(nz),\quad\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi-z\cos\phi)}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi=\mathrm{i}J_n'(nz)$$

算出

$$\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\Omega}(\theta)=\frac{e^2n^2\omega_0^2}{2\pi c}\big(\cot^2\theta J_n^2(n\beta\sin\theta)+\beta^2{J_n'}^2(n\beta\sin\theta)\big)$$

* 由此可计算得到 $\Delta\theta\sim\gamma^{-1}$ 的结论。

这称为 **Schott 公式**。对其积分，经过较复杂的数学计算可知

$$P_n=\frac{2e^2\omega_0^2}{v}\left(n\beta^2J_{2n}'(2n\beta)-\frac{n^2}{\gamma^2}\int_0^\beta J_{2n}(xn\xi)\mathrm{d}\xi\right)$$

对 $\beta\to1$ 的极端相对论情况，这时 $n\gg1$ 的项起主要作用，利用贝塞尔函数在 $n\gg1$ 时的展开式

$$J_{2n}(2n\xi)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}n^{1/3}}\Phi(n^{1/3}(1-\xi^2)),\quad\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\mathrm{d}\xi\cos(\xi^3/3-\xi t)$$

可将辐射功率写为

$$P_n=-\frac{2e^2\omega_0^2n^{1/3}}{\sqrt{\pi}c}\left(\Phi'(u)+\frac{u}{2}\int_u^\infty\Phi(u)\mathrm{d}u\right)$$

这里 $u=n^{2/3}\gamma^{-2}$，Φ 称为 **Airy 函数**。

对 $1\ll n\ll\gamma$，令 $u\to0$ 得到

$$P_n\approx0.52\frac{e^2\omega_0^2}{c}n^{1/3}$$

对 $n\gg\gamma$，令 $u\to\infty$，利用 Airy 函数的渐近展开得到

$$P_n\approx\frac{e^2\omega_0^2}{2\sqrt{\pi}c}\sqrt{\frac{n}{\gamma}}\exp\left(-\frac{2}{3}n\gamma^{-3}\right)$$

* 频谱随 $n^{1/3}$ 增大，在 $n\sim\gamma^3$ 左右达到极大，再随 n 指数减小。对极端相对论粒子 γ 很大，因此频谱非常宽，与定性结果一致。

§8.6　切连科夫辐射

之前的讨论都在真空中，考虑介质中运动 [假设 $\mu=\mu_0$]，标势矢势满足的波动方程 (高斯单位制) 为

$$\nabla^2\Phi-\frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\epsilon}\rho,\quad \nabla^2\vec{A}-\frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

考虑看作四矢量的傅里叶变换 [这里内积为四矢量内积，对其他量类似]

$$\Phi(\vec{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^4}\Phi(\vec{k},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$$

对介质匀速运动的粒子，电荷密度、电流密度为

$$\rho(\vec{x},t)=e\delta^3(\vec{x}-\vec{v}t),\quad \vec{J}(\vec{x},t)=\vec{v}\rho(\vec{x},t)$$

利用 δ 函数的傅里叶变换可知

$$\vec{J}(\vec{k},\omega)=2\pi e\vec{v}\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v})$$

由此得到 [这里 $\epsilon(\omega)$ 为原本 $\epsilon(t)$ 的傅里叶变换结果，类似第一章]

$$\vec{A}(\vec{k},\omega)=\frac{8e\pi\vec{\beta}}{\vec{k}^2-\omega^2\epsilon(\omega)/c^2}\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v})$$

由此作傅里叶逆变换，写回三维形式，假设 $\vec{v}=v\vec{e}_3$，$\vec{x}_\perp=(x_1,x_2,0)$，$\vec{k}_\perp=(k_1,k_2,0)$，得到

$$\vec{A}(\vec{x},t)=4\pi e\vec{\beta}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3(x_3-vt)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_\perp\cdot\vec{x}_\perp}}{k_3^2(1-\beta^2\epsilon(k_3v))+\vec{k}_\perp^2}$$

* 若 $\beta^2\varepsilon>1$，积分存在奇点，与本章开头讨论完全类似，此积分存在奇点，需要在满足推迟条件的围道上积分，再趋于实轴。

以 z 轴为轴构造锥体，顶点为粒子位置 $(0,0,vt)$，假定**粒子运动速度高于介质中光速** $c/\sqrt{\epsilon}$，电磁波波前的运动方向与粒子运动方向间的夹角即为

$$\theta_C=\cos^{-1}\frac{c}{v\sqrt{\epsilon}}$$

以此角作为顶角，就得到切连科夫辐射对应的**切连科夫锥**。

* 对切连科夫锥外部的所有点，电磁势为 0，事实上对应力学中的**马赫锥**，即类似超声速时产生的激波。

对内部的点，假设 ϵ 为常数，考虑合适围道后积分可得到

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{2e\vec{\beta}}{\sqrt{(x_3-vt)^2-(\beta^2\epsilon-1)\vec{x}_\perp^2}}$$

* 此公式只是近似公式，算出的磁场在锥面发散，这是由于未考虑 ϵ 的频率依赖。

* 利用此锥的形式可制造探测器，通过角度进行速度选择。

§8.7　辐射阻尼

辐射阻尼即带电粒子辐射对自身运动的影响，事实上不考虑量子时无法完美解决此问题。

亚伯拉罕-洛伦兹方程

考虑非相对论粒子，对应辐射功率为拉莫尔公式，在某时间尺度 τ，由其加速运动，这个时间尺度内获得动能 [假设速度为小量] $\Delta E_k\sim m(a\tau)^2$，这里 a 为加速度。若获得动能与辐射能量相当，就需要考虑辐射阻尼，这时利用拉莫尔公式得到

$$m(a\tau)^2=\frac{2e^2a^2}{3c^3}\tau$$

于是可知特征时间尺度为

$$\tau = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}$$

若考虑的时间尺度 $T \gg t$，可忽略辐射阻尼的效应，否则必须考虑。

* 此特征时间约为 $10^{-24}\mathrm{s}$ 量级。

将辐射阻尼等效为力 $\vec{F}_{rad}$，则其应满足一段时间内做功等于能量耗散，即

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{v}}\mathrm{d}t$$

利用对右侧分部积分 [这里假设产生的 t_1、t_2 差值项为 0] 可知可以取

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{v}} = m\tau\ddot{\vec{v}}$$

由此运动方程为

$$m(\dot{\vec{v}} - \tau\ddot{\vec{v}}) = \vec{F}_{ext}$$

这里右侧为电磁场作用力，此方程即为亚伯拉罕-洛伦兹方程，其即使对无外力的情形也存在发散解 [随时间指数增加]，这里假设辐射阻尼充分小，且不考虑非物理的发散解。

辐射阻尼下受迫振动

考虑质量 m、电荷 e，固有频率 ω_0 的带电振子，在频率 ω 的电磁波中，且具有阻尼系数 Γ'，并需要考虑辐射阻尼，这时方程可写为

$$\ddot{\vec{x}} + \Gamma'\dot{\vec{x}} - \tau\dddot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = \frac{e}{m}\vec{e}_0 E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

* 由于右侧对 t 导数为 $\mathrm{i}\omega$ 倍，可将左侧再进行一次处理得到四次常系数线性微分方程，从而通过本征值算得通解，再结合不允许发散与原方程得到此方程的全部解，此处简化考虑，取出一个特解

$$\vec{x} = \frac{e}{m}\frac{E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\Gamma_t(\omega)}\vec{e}_0,\quad \Gamma_t(\omega) = \Gamma' + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\Gamma,\quad \Gamma = \omega^2\tau$$

与汤姆孙散射完全类似可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^4}{m^2c^4}|\vec{e}^* \cdot \vec{e}_0|^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma_t^2}$$

* 最后一项前即为汤姆孙散射表达式，而最后一项在 ω 相比 ω_0 很小时正比于 ω^4，接近偶极散射的行为。

* 若总振子宽度 $\Gamma_t(\omega)$ 很小，ω 接近 ω_0 时会出现强烈的共振，趋于 0 时频谱几乎都在 ω_0 处。

电子自能

亚伯拉罕与洛伦兹假设带电粒子的动量本质是电磁的，也即其动量实际上为其产生电磁场的动量。考虑带电粒子在外电磁场运动，称为**亚伯拉罕-洛伦兹模型**。

由于总动量守恒 [即洛伦兹力密度体积分为 0]

$$\int \mathrm{d}^3x\left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B}\right) = 0$$

这里 $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_s, \vec{B} = \vec{B}_e + \vec{B}_s$，下标 e 表示外加，下标 s 表示粒子产生的电磁场，要求带电粒子的运动方程符合牛顿力学 $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_e$ 的形式，再由洛伦兹力公式可得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = -\int \mathrm{d}^3x\left(\rho\vec{E}_s + \frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B}_s\right)$$

假定电荷分布存在尺度 a 内，且球对称；其具有刚性，于是 $\vec{J} = \rho\vec{v}$。选择某带电粒子在其中瞬间静止，$\vec{J} = 0$ 的参考系，考虑粒子产生电场 $\vec{E}_s, \vec{B}_s$ 对应的电磁势 $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}^3x\rho(\vec{x},t)\left(\nabla\phi(\vec{x},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t}\right)$$

回顾本章开头 A^μ 用 D^+ 表示的解，利用推迟的写法可得

$$A^\mu(\vec{x},t)=\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x'\frac{J^\mu(\vec{x}',t')\big|_{ret}}{R}$$

* 注意这里 J^μ 对不同 $\vec{x}'$ 的推迟时间 t' 不同。

但是，由于假设电荷分布尺度 a 较小，推迟时间很小，且 $R=|\vec{x}-\vec{x}'|$ 可视为常数，在 t 将其泰勒展开 [利用 $t'=t-R/c$]

$$J^\mu(\vec{x},t')\big|_{ret}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{R^n}{c^n}\frac{\partial^n}{\partial t^n}J^\mu(\vec{x},t)$$

将此表达式代入 A^μ，再代入 $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ 表达式，通过刚性条件、球对称性、电荷守恒、分部积分等复杂的计算可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^{n+2}}\frac{2}{3n!}\frac{\partial^{n+2}\vec{v}}{\partial t^{n+1}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\ \rho(\vec{x},t)\rho(\vec{x}',t)R^{n-1}$$

注意到 $n=0$ 的项为 [上标 em 表示电磁场]

$$\frac{4U_s^{em}}{3c^2}\dot{\vec{v}},\quad U_s^{em}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\frac{\rho(\vec{x},t)\rho(\vec{x}',t)}{R}$$

此即为自身静电能的贡献，由刚性可知 U_s 与时间无关，由此可以定义带电粒子的**电磁质量** $m^{em}=U_s^{em}/c^2$。

对 $n=1$ 的项，计算可发现其恰为辐射阻尼的表达式

$$-\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}}$$

高阶项在 $a\to 0$ 时为小量，因此仅考虑前两项贡献即得

$$\frac{4}{3}m^{em}\dot{\vec{v}}-\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}=\vec{F}_e$$

这与之前的亚伯拉罕-洛伦兹方程形式一致，但质量被替换成了电磁质量。

* 这里的讨论均为非相对论，利用相对论性可精确确定系数 $\frac{4}{3}$ 应为 1。

* 虽然 $a\to 0$ 为小量的近似是自然的，但这时 $U_s^{em}\sim e^2/a$ 会发散，经典电动力学无法解决，这事实上需要在量子电动力学中利用**重整化**解决。