数学分析A3 课堂笔记

原生生物

目录

历史回顾

† 微积分

在老师工作的基础下，为求函数在区间上的最值，**费马**构造差分，发明了导数。
三类初等函数微积分的历史：

1. 多项式函数

   牛顿将函数(事实上此处应为初等函数)视为幂级数展开$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，又引入**二项式定理**计算出$x^n$的微分与积分，从而只要掌握多项式微积分即可算出任何初等函数微积分。

   莱布尼茨将微积分看作满足一定计算规则的**计算方法**(Calculus) (如$(af+bg)'=af'+bg',(fg)'=f'g+fg',f(g(x))'=f'g(x)g'(x)$，其中第二条被称为**莱布尼茨公式**，推广到流形上有重要作用)。

   *此处微分上的公式通过同积分即可推广到积分上，莱布尼茨公式对应分部积分。此外，通过复合函数求导公式可推出反函数求导公式。通过莱布尼茨公式可**递推**出多项式函数的微分。

2. 三角函数

   欧拉用弧长定义弧度，进而定义角度，并给出了三角函数的定义与记号(重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$)。

   *和角公式$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$等出发可进行平面坐标上的旋转，由此亦可计算三角函数的导数，再结合反函数求导公式可推出反三角函数的导数。

3. 对数函数、指数函数

   对数函数出现先于指数函数，发明目的是将乘除变为加减($\log(a_1a_2)=\log(a_1)+\log(a_2)$)。

   “等差数列”与“等比数列”之间的对应即为某种意义上的对数函数与指数函数在整数上的取值。为获取中间的值，需要编制**对数表**。

   1617年，英国人**Briggs**编制了首张对数表(做法：通过二进制反复计算平方根逼近，组合出对应的小数次方)。

   *计算平方根方式：先找到逼近的值，再通过$(x+\Delta x)^2\approx x^2+2x\Delta x$计算。

   另一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+t)}{t}$，化为计算$\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$极限，由此出发定义**自然底数**$e$，进而得出对数函数的导数，而对数函数结合反函数求导公式可推出指数函数的导数。

费马：极值点导数若存在，必然为0，新问题：函数是否存在极值？(涉及连续性理论与实数)
牛顿-莱布尼茨公式联系了微分与积分，从求导出发即可进行一些积分的计算。

† 实数与连续性

正整数的构造 - 表达整数(十进制) **九章算术**前
负整数的构造 **刘徽**之前
加入零 公元7世纪
*加法与乘法满足**基本运算律**(交换、结合、分配等)
分数的构造 - (p,q)的等价类 将**单位**变小，仍可满足基本规则
实数的构造 - 任意小数(单位**无穷**减小)
*事实上是将实数看成了有理数的**极限**，由此可知仍满足基本规则
*实数可具有全序关系
实数的**完备性**(拓扑概念)：任一柯西列($\{a_n\},\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,|a_n-a_m|<\varepsilon$)必有极限

(证明：回顾实数完备性的六个等价定理)
*实数的其他构造方式：Dedekind分割、柯西列等价类等(注意**回到原始定义**证明的重要性)
由此出发可定义开集、闭集、聚点、连通性等(回顾A2中相关的点集拓扑基础)
*$\mathbb{R}$上的开集是可数个不交开区间的并(证明：对任何$a \in E$，考虑$\inf\limits_{t} t < a, (t,a) \subset E$与$\sup\limits_{t} t > a, (a,t) \subset E$即可)
连续函数等价定义：任意开集的**原象**是开集(可转化为$\varepsilon - \delta$语言，回顾连续等价条件)
连续函数性质：闭区间上有界、存在极值、介值定理(回顾连续相关性质)

一　数项级数

本质与数列等价(级数的**部分和**数列)
由此有直接的结论：若数项级数收敛，其**通项极限**必为0；级数增减**有限多**项不影响敛散性。
重要问题：判别敛散(判别法综合运用)。

† 正项级数

1. 积分判别法

   原理：比较**面积**可证明，单调下降且极限为0的函数$f(x)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$与$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$同敛散。

   例：$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$收敛的条件为$p<1$或$p=1, q<1$(利用$n$为比任何$(\ln n)^\alpha$高阶的无穷大)。

2. 比较判别法

   原理：正项级数对应**单调上升**数列，有界即收敛；若两不同正项级数的通项之比有界，则必然同敛散。

   判别法化为**极限形式**：回忆A1，利用$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geq n}\{a_m\}$，可将“存在无穷多个”与“至多有限多个”表示为上下极限。有时为方便使用，直接采取极限形式。

3. 柯西判别法

   原理：与**等比数列**比较，考虑$\sqrt[n]{a_n}$与1的大小关系。

   例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$收敛的条件为$-1 \leq x < 1$(柯西判别法处理$x$非负时情况，为负时须后续知识)。

4. 达朗贝尔判别法

   原理：与**等比数列**比较，考虑相邻项之比与1的大小关系。

   例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$必然收敛(此时用此判别法可规避斯特林公式)。

   与柯西判别法关系：效果更弱，但有时好用。

5. 拉贝判别法

   原理：与$\dfrac{1}{n^\sigma}$比较，考虑相邻项之比减一的无穷小情况。

6. △高斯判别法

   原理：与$\dfrac{1}{n(\ln n)^\sigma}$比较，考虑相邻项之比减一的无穷小情况。

† 任意项级数

*由数项级数而定义：收敛、发散点集

1. 柯西收敛准则

   原理：直接对部分和数列利用柯西收敛准则即得结果，是任意项级数收敛的**充分必要**条件。

   例：若某级数所有项取绝对值后得到的正项级数收敛，则此级数必然收敛(此时称此级数**绝对收敛**)；反之，若级数收敛但取绝对值得到的级数不收敛(如$(-1)^n\dfrac{1}{n}$)，则称此级数**条件收敛**。

2. 莱布尼茨判别法

   原理：类似积分判别的证明方式，估算交错级数部分和不同子列。

3. 迪利克雷判别法

   证明：利用**分部求和**公式改写和式，从而放缩知收敛。

   作用：考虑乘积是否收敛时可拆分判定。

   例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$，$x=0$时发散，否则令$a_n=\cos nx, b_n=\dfrac{1}{n}$，可计算出$\sum\limits_{n=1}^{k}a_n=\dfrac{\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$有界，因此原级数收敛。

4. 阿贝尔判别法

   原理：变形，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(b_k-b)+b\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$。
   与迪利克雷判别法关系：互有强弱，根据具体情况运用。

黎曼定理：条件收敛的特殊性质，安排顺序收敛到任意目标。
证明：取出其中的正项与负项，由条件知正项与负项的和均发散，从而可安排顺序构造出结果。
△其他内容：绝对收敛可交换次序、级数相乘、无穷乘积(取ln后化为求和，利用与1差距计算)

二　函数项级数

† 重要问题

若函数$S_(x)$为函数$S_n(x)$极限(可看作函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$)：
(由此出发须定义**一致收敛**)

1. $S_n(x)$连续，极限是否连续？

   反例：$S_n(x)=x^n, x\in[0,1]$

   加条件：$S_n(x)$一致收敛，则成立。

   证明：由定义估算。

2. $S_n(x)$可积，积分是否可与求和交换？

   反例：$S_n(x)=2n^2x\mathrm{e}^{-n^2x^2}, x\in(0,1)$

   加条件：$S_n(x)$一致收敛，则成立。

   证明：利用保连续，由不连续点零测集可数并零测可证明。

   另一种“加条件”做法：**黎曼可积**拓展为**勒贝格可积**

3. $S_n(x)$可导且导数连续，求导是否可与求和交换？

   反例：$S_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{x}},x\in\mathbb{R}$

   加条件：$S_n'(x)$一致收敛，且$S_n(x)$至少某一点收敛，则成立。

   证明：利用保积分，使用牛顿-莱布尼茨公式证明。

† 一致收敛判据

1. 柯西判别法

   原理：类似柯西准则，为充要条件。

2. △已知收敛结果f时，f_n在I上一致收敛等价于$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$。

   证明：利用柯西准则。

3. 魏尔斯特拉斯判别法

   原理：利用柯西判别法，与数列比较。

4. 迪利克雷判别法

   原理：类似数列的迪利克雷判别法，注意利用**一致有界**条件。

   例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n},x\in[\delta,2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$类似数列时利用迪利克雷判别法可判定一致收敛。

5. 阿贝尔判别法

   原理：类似数列的阿贝尔判别法(注意此时无法由迪利克雷判别法直接推得)。

6. Dini定理

   原理：类似证明闭集连续函数闭一致连续，利用有限覆盖，可控制全区间大小。

*证明一致收敛技巧：**分段**估计(若在两段均一致收敛则并集仍一致收敛)、注意两个**充要**条件

例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^{2n}}\sin(nx)$一致收敛，通过拆分为$[0,a]$(此段可放大为$a^n$)与$[a,1]$(此段$\sin(nx)$一致有界)两段可以说明。

*证明不一致收敛技巧：从原始**定义**出发、考虑边界处、利用**柯西准则**找反例

例：考虑$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n}$。对任何$N$，可以取$x=\dfrac{1}{N+1}$，第$N+1$项到第$2N$项均大于$\dfrac{\sin 1}{2N}$，因此和大于$\dfrac{\sin 1}{2}$，由定义知其不一致收敛。

† 幂级数

(复变函数中有重要推广)

考虑$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，利用柯西判别知$|x|<R=(\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$时收敛，大于则发散(等于时无法确定)。

*定义满足这样条件的R为级数的**收敛半径**(复变函数中成为圆)。

*对任何$0<r<R$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$[-r,r]$上一致收敛(**内闭一致收敛**)。

证明：将x放大为r，利用魏尔斯特拉斯判别法。

由此其满足之前所述的**保求和**、**保导数**、**保积分**等性质。

例：$\ln(x+1)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

*初等函数可用多项式逼近，因此其幂级数相当于**无穷阶泰勒展开**，回忆**中值定理**所推导出的几种**余项**形式(拉格朗日余项、柯西余项、多重积分余项)。
*记忆基本初等函数的幂级数展开形式。
△一般地说，无穷阶可导未必可以表示为幂级数展开，若可表示则称为**实解析函数**。
魏尔斯特拉斯逼近定理：闭区间上函数可用多项式一致逼近⇔函数连续。
证明：构造**伯恩斯坦多项式**，观察其性质，并估算、控制误差。
△ **Abel定理**与Tauber定理：判定幂级数在边界上的性质

† 特殊例子

*利用函数项级数可构造出一些特殊的映射

1. 存在处处连续，处处**不可微**的函数

   最早构造-魏尔斯特拉斯利用**三角函数**级数

   范德瓦尔登“化曲为直”，更直观构造。

   证明：级数的每项都是连续函数，利用魏尔斯特拉斯判别法可知一致收敛，从而极限处处连续。计算导数可发现极限可写为某个±1组成的级数，由于通项不趋向0，级数不可能收敛，故处处不可微。

2. 填充正方形的曲线

   存在线段到正方形的连续映射(**皮亚诺曲线**)

   证明：仍利用魏尔斯特拉斯判别法推出此映射连续。考虑正方形中某点的二进制表示，可构造合适的t_0收敛至此点。

△ 由于$\int_a^b f = \lim\limits_{A\to b^-}\int_a^A f$ (此处b可为∞)，反常积分可与级数类似方法处理

三　傅里叶分析

† 定义与计算

关心重点：**周期函数**(周期足够大可逼近任何函数)
一般函数用级数$f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\sin(n\omega t)+b_n\cos(n\omega t))$逼近
标准展开形式：$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\sin(n\omega t)+b_n\cos(n\omega t))$ (此处f以2π为周期)
性质：**正交性**

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases},\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x=0$$

由此可计算系数：$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\pi a_n,\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\pi b_n$ (注意对a_0亦成立)
例1：考虑函数$f(x)$在$[-\pi,\pi)$上为x，以2π为周期，计算可得$a_n=0,b_n=(-1)^{n-1}\frac{2}{n}$，可发现逼近的结果在$(-\pi,\pi)$上为$f(x)$，端点处为0，而$f(\pi)=-\pi$。
例2(**锯齿波**)：考虑函数$f(x)$在$[-\pi,\pi)$上为$|x|$，以2π为周期，此时$b_n=0,a_n=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi} & 2\nmid n\\ 0 & 2\mid n\end{cases},a_0=\pi$。
(考虑边界处可得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$)

例3：考虑函数$f(x)$在$[-\pi,\pi)$上为x^2，以2π为周期，此时$b_n=0, a_n=(-1)^n\dfrac{4}{n^2}, a_0=\dfrac{2\pi^2}{3}$。
(考虑边界处可得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$)
例4：$f(x)=\cos(ax), a\notin\mathbb{Z}, x\in(-\pi,\pi)$，计算可得$b_n=0, a_n=\dfrac{(-1)^n}{\pi}\dfrac{a^2}{a^2-n^2}\sin(a\pi), a_0=\dfrac{2}{a\pi}\sin(a\pi)$。
(考虑边界处可得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a^2}{\pi(a^2-n^2)}+1=\frac{a}{\sin(a\pi)}$)
*考虑边界处可发现**恒等式**

† 敛散性判别

*f分段可微，间断点有限，则傅里叶级数逐点收敛于$\begin{cases} f(x_0) & x_0\text{为连续点} \\ \dfrac{1}{2}(f(x_0^-)+f(x_0^+)) & x_0\text{为间断点}\end{cases}$
△ 黎曼-勒贝格引理证明：等分区间，由定义估算。
收敛性证明：利用三角恒等式代换为**迪利克雷积分**，将问题转化为积分的极限是否存在。

平方可积意义下的收敛性：若$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n-f|^2\mathrm{d}x=0$，则称为$S_n$积分意义下收敛于$f$。
(此处由完备性应采取**勒贝格积分**，目前先以黎曼积分讨论)
$S_n=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$，计算得$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n-f|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geq 0$，此即为**帕塞瓦尔不等式**。
由于$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$单调有界，极限必然存在，因此积分意义下只需说明极限不能大于0。
定理：黎曼积分下，f连续可推出此式极限为0 (勒贝格积分下：只需f可积且平方可积)。
证明：令$T_n=\dfrac{\alpha_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos(kx)+\beta_k\sin(kx))$，可发现$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T_n-f|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n-f|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n-T_n|^2\mathrm{d}x\geq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n-f|^2\mathrm{d}x$，也即$S_n$为$n$阶三角多项式下的**最佳逼近**。
由此，只要f可用三角多项式逼近(积分意义下)，即可说明结论。
*任何连续函数f可用三角多项式逐点逼近。
引理：连续函数的傅里叶级数在Cesàro意义上一致收敛于原函数(利用迪利克雷积分计算)。
由引理出发可以直接构造出逐点逼近序列。

† 傅里叶变换

*由于三角函数求导周期性，傅里叶级数展开在**微分方程**中有重要应用。
例：热传导方程$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0,x)=\varphi(x)$，写出$u$对$x$的傅里叶级数可算出解的级数表示。

*从$[-l,l]$上展开拓展到$(-\infty,+\infty)$上展开，由此得出傅里叶**积分公式**。
由**绝对可积**出发可说明此积分在有限时的和，趋向无穷时的收敛性可由**Dini定理**判别。
*绝对可积与广义左右导数存在可推出傅里叶积分收敛结果

由此得出傅里叶**正弦**、**余弦**变换公式，写为复数形式即得**傅里叶变换**公式。
*傅里叶展开可看作**离散形式**的变换
*傅里叶变换可将**卷积**化为乘积

四　含参变量积分

*按照常义积分与反常积分分别讨论

† 反常积分的一致收敛

定义：本质与函数项级数一致收敛相同
判别：

1. △ 关于$\eta(A)$的**充要条件**

   与函数项级数时充要条件类似，可以此直接计算说明是否一致收敛

2. 柯西收敛原理

   充要条件，常用于反例构造

3. 魏尔斯特拉斯判别法

   与连续函数的无穷积分比较，柯西收敛原理说明

   *条件**较强**，难以使用

4. 迪利克雷判别法

   利用积分**中值定理**分段放缩可说明

5. 阿贝尔判别法

   利用**分部积分**计算

   *当只有单个因子包含u时情况更加简化

† 重要问题

*重点观察：关于u的函数$\varphi(u)=\displaystyle\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$性质(可看作函数项级数处理)

1. $\varphi(u)$是否连续？

   对常义积分：二元函数f**连续**时，φ必然连续。

   △ 此处事实上可弱化为f在区间上**可积**(难证，利用可积函数由连续函数**逼近**说明)。

   对反常积分：添加一致收敛后连续成立(通过拆分逼近)。

2. $\varphi(u)$是否可导？

   对常义积分：f与$\dfrac{\partial f}{\partial u}$存在且连续时，可由定义直接计算导数

   *a,b为常数时，可直接交换求导，否则考虑**拆分为复合函数**可计算出导数

   对反常积分：求导后连续且一致收敛可推出求导与积分可交换

3. $\varphi(u)$是否可积？

   对常义积分：f连续时积分号可以交换顺序(A2知识)

   对反常积分：添加一致收敛，拆分逼近知对u常义积分可与广义积分交换

   △ 对u广义积分时，首先需对x,u分别的广义积分均一致收敛，再添加**绝对可积**条件

   △ 非负时，利用Dini定理可弱化条件

*积分计算

例：$I(\alpha)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，分部可算得$I'(\alpha)=-\frac{1+I'(\alpha)}{\alpha^2}$，由此直接积分有$I(\alpha)=-\arctan\alpha+\frac{\pi}{2}$。

特别地，$I(0)-\frac{\pi}{2}$。

† Γ函数与B函数

$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$

$s>0$时，$\Gamma(s)$收敛，可任意阶求导(**一致收敛**性)。

Γ函数性质：

1. $S>0$上恒正且$\Gamma(1)=1$
2. 分部积分可得递推$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，由此$\Gamma(n)=(n-1)!$
3. 利用**赫尔德不等式**可说明$\ln\Gamma(s)$为凸函数

△真正的性质在**复变函数**中

*与之相对，由此三条可**唯一确定**出Γ函数

$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$

分部积分知有递推$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q+1)$

两函数联系：$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (可通过分析三条性质或直接计算说明)

*可推出**斯特林公式**