数学分析 A1

作者：原生生物 QQ：3257527639

使用资料：任广斌老师讲义（下称讲义）、数学分析教程（上册）（下称教材）、谢惠民习题课讲义（上册）（下称谢惠民）

注意：

1、文档顺序按照讲义编排，定义均依照教材

2、无缩进的结论是个人认为可以直接使用的定义/定理，不太确定的均已缩进

3、结论能否使用最终解释权在老师与助教

一、数列极限

定义 1 实数完备性：全体无尽小数 $\Leftrightarrow$ 实数（教材 P3）

*可定义为此推出下方 6 条等价定义（定理）

*无穷递降法的应用

结论 1 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*,\ \forall \mathrm{m} \in \mathrm{Z},\ \mathrm{n} \neq \mathrm{m}^2 \Rightarrow \sqrt{\mathrm{n}} \notin \mathbb{Q}$（教材 P5）

证明思路 反证，考虑$\sqrt{n}$整数部分

定义 2 极限的 $\epsilon - \mathrm{N}$ 定义（教材 P9）

补充 可替换为 $\forall \epsilon \in (0\,,\,1)$ 或 $|a_n - a| < \mathrm{M}\epsilon$（M 为正常数）或 $|a_n - a| \leq \epsilon$

*此为唯一定义方式

*去掉有限项后近似常值

*适当放大法

结论 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$（谢惠民 P16）

证明思路 算术-几何均值放大为$1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$

*分类思想（讨论：有无最大，极限是否为无穷，极限是否为 0 等等）

结论 3 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{max_{i=1}^{n} a_i}{n} = 0$（教材 P12）

证明思路 分a_n有无最大值，有易证，无则先考虑 max 增大时子列，再放缩其余

定义 3 数列有界性（教材 P9）

定义 4 数列单调性（教材 P26）

补充 收敛数列性质（谢惠民 P17 起，均由定义证明）：

*极限唯一

*有界性

*保序性（蕴含保号性、夹逼定理）

（注意保序将严格大于小于变为不严格的大于等于小于等于）

（保序性经典用法：取某个数和极限的中点，都在此微小区域内）

结论 4 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{c} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$（谢惠民 P28）

证明思路 考虑 $\frac{c+1}{2}$

结论 5 收敛数列必含最大项或最小项（谢惠民 P18）
证明思路 任取两不等项考察

*保四则运算（注意除法条件）

定义 5 子列定义（教材 P14）
补充 数列收敛 $\Leftrightarrow$ 一切子列收敛
证明思路 左推右由定义，右推左任取一极限说明（讲义 2）
结论 6 若数列可被分划为有限个子列（即子列互相不交，并集为原数列），则数列存在极限 $\Leftrightarrow$ 这些子列存在相同极限
证明思路 右推左利用定义（教材 P14 类似证明）

定义 6 极限推广，无穷大与无穷小（教材 P24）
补充 无穷小相关定理（教材 P17）
*$a>1,\ t>0,\ \ln n \ll n^t \ll a^n \ll n! \ll n^n$（谢惠民 P53，实质是阶的概念）
*分段证明无穷小（以下三结论均可以使用此证明方式）

结论 7 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \mathrm{c} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \mathrm{c}$ （Cesàro 平均或柯西命题，教材 P18）

*此平均可改写为乘法形式

结论 8 $\mathrm{n,k} \in \mathbb{N}^*, t_{nk} > 0, \sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{a} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\, a_k = \mathrm{a}$（特普利茨定理，教材 P23）

结论 9 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \exists K,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n} |y_i| \le K,\ z_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_{n-i} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

（谢惠民 P58）
*特普利茨和 Stolz 定理应用范围有不少重合，但仍有其独特作用
*这类方法对涉及两个数列极限生成的无穷和式时尤其有用

结论 10 Stolz 定理（教材 P51，讲义 3）

$\frac{\infty}{\infty}$型 $b_{n+1} > b_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \mathrm{A} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \mathrm{A}$

$\frac{0}{0}$型 $b_{n+1} < b_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \mathrm{A} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \mathrm{A}$

证明思路 合分比不等式或特普利茨定理
*证明技巧：用定义取出一列数累加（与函数极限联系）
*一定要注意是否可以直接使用
*几乎是求极限题中最常用的技巧
*使用技巧：取对数

结论 11 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$

*使用技巧：用来去除 n（感觉不满足条件时可取倒数）（谢惠民 P274 第 3 题）

结论 12 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum_{i=1}^{n} a_n^2 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{3n}a_n = 1$（教材 P54）

证明思路 令 $\sum_{i=1}^{n} a_n^2 = S_n$ 后进行处理

*不要忘记基本的代数变形处理！

定义 7 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$（教材 P31）

证明思路 利用单调有界定理

*常利用此式与$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$放缩 e（如下方结论 33）

结论 13 $\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$（教材 P31）

证明思路 直接展开定义式

结论 14 $\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}$（教材 P33）

证明思路 反证法

*注意此两极限的精准程度差异巨大，第一个约为$\frac{3}{2n}$，第二个约为$\frac{1}{(n+1)!}$，证明可通过归纳等

定义 8 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}-ln(n+1)=\gamma$（教材 P35）

证明思路 仍然利用单调有界

结论 15 $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{ln\,n}}=\sqrt{2}$

证明思路 平方后利用 Stolz 将 ln n 转化为 n，再利用代数消去 n

实数完备性的六个等价定理

结论 16 单调有界数列存极限（教材 P26）

证明思路 （由完备性）写出实数的小数表示后上升

*证明有界性时可由估算或是猜测极限得到合理的界，如$\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots\sqrt{n}}}<2$

结论 17 闭区间套定理（教材 P28）

证明思路 （由单调有界定理）考虑区间两端点极限

定义 9 确界定义（教材 P41）

结论 18 有界实数集存在确界（教材 P41）

证明思路 （由闭区间套定理）二分法构造区间套

结论 19 有限开覆盖定理（教材 P43）

证明思路 （由确界原理）勒贝格方法，考虑上确界

补充 可改进为存在勒贝格数（谢惠民 P82）

结论 20 有界数列必有收敛子列（教材 P38）

证明思路 （由有限覆盖定理）反证，若否，任意数存邻域只有有限项，矛盾

补充 可改进为单调收敛

结论 21 柯西收敛准则（教材 P38）

证明思路 （由列紧定理）取出有界数列

*结论 15 可由柯西收敛准则推出，故此六定理等价

*事实上，此六定理之间均可互相推导

*连续函数的一些性质证明与实数完备直接相关

结论 22 $\exists A,B,\ \mathbb{R}=A\cup B,\ \forall a\in A,b\in B,a<b\ \Rightarrow \exists maxA,\nexists minB$或$\nexists maxA,\exists minB$（戴德金分割，谢惠民 P96）

证明思路 由确界可推得成立

*此定理亦与以上等价

迭代生成数列的性质（联系导数）

结论 23 压缩数列（柯西型压缩/收敛型压缩）必收敛（讲义 6）

证明思路 分别由柯西收敛准则与定义易得

结论 24 迭代生成数列只能收敛于不动点（第一律，谢惠民 P49）

证明思路 令递推公式两边趋于无穷

结论 25 迭代函数与数列单调性联系（第二律，谢惠民 P49）

证明思路 讨论一次/二次迭代下的函数

结论 26 迭代生成数列的蛛网工作法收敛规律（谢惠民 P51）

证明思路 由前两结论可推得

*若迭代函数连续，则只需相邻项之差极限为 0 便能收敛（谢惠民 P156）

结论 27 牛顿切线法求根（讲义 5，实际为导数部分内容）

证明思路 利用上述分析证明

结论 28 $A>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{x_n^2+3A}{3x_n^2+A}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}$（谢惠民 P53）

证明思路 注意到 $x_{n+1}-\sqrt{A}=\frac{(x_n-\sqrt{A})^3}{3x_n^2+A}$由压缩数列可得结论，或由迭代规律证明

定义 10 极限点、数列上下极限（教材 P45）

补充 上下极限具有对偶关系、亦有保号性（讲义 6、教材 P47、P50）

结论 29 上、下极限为数列极限点（教材 P46）

证明思路 任意小邻域内可取数列中的点

结论 30 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n}a_k$（教材 P48）

证明思路 分别说明大于等于、小于等于成立（注意取子列的方法，证明有界等结论时可应用）

结论 31 与上下极限相关的不等式（教材 P49、P50）

证明思路 由上个结论可以推得

*以极值思想看待上下极限

结论 32 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{f(n)}+ax_n\right)=\mathrm{A},\mathrm{f}(n+1)>\mathrm{f}(n),\mathrm{a}>1,\mathrm{x_n}$有界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{A}{a+1}$

证明思路 不妨设$A=0$，对x_n的任意极限点t，取出子列x_{k_n}，则$x_{f(k_n)}$亦为子列，极限点为$-at$，考虑$x_{f(f(k_n))}$，极限点为a^2t，若x_n不收敛，当t为最大时，可证$t>0$，代入知$x_{f(f(k_n))}$的极限更大，矛盾

*注意有界性条件的运用（极限点存在最大值）

*条件可加强为$f(n)$单射

*若$f(n)$于n充分大时在正整数中存在反函数则只需正数 a 不为 1（如$\mathrm{f(n)=n+t}$）

结论 33 $\forall m,\mathrm{n},a_{n+m}\leq a_n+a_m\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf\limits_{n\geq1}\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$（教材 P47、谢惠民 P90）

证明思路 仍考虑证明大于等于且小于等于

*以整体思想看待上下极限

结论 34 $x_n > 0 \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geq e$（谢惠民 P95，教材 P84）

证明思路 若否，某项后均小于 e，将 e 放缩推知矛盾

*存在无限多项满足的反面为某项之后均不满足

结论 35 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$（谢惠民 P63）

证明思路 两边取上下极限，得到两个方程求解

*以夹逼思想看待上下极限

结论 36 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$（谢惠民 P91）

证明思路 考虑一切收敛子列（此结论可通过乘积式得到关于$\frac{a_{n+1}}{a_n}$与$\sqrt[n]{a_n}$的结论）

二、函数极限

定义 1 集合的势（等价关系）（教材 P59）

补充 有限、可数、不可数定义，$\mathbb{Q}$可数，$\mathbb{R}$不可数

*康托对角线法思路的应用（应用举例：证明上极限为极限点）

结论 1 $f_n: (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ \forall n,\ \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \infty \Rightarrow \exists f,\ \forall n,\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f_n(x)} = \infty$（教材 P89）

证明思路 构造每段与一定个数f_n乘积相关的f

结论 2 可数个可数集并集可数（教材 P60）

证明思路 斜线行进法

定义 2 函数的运算、反函数、单调性、奇偶性（教材 P66）

补充 不动点与 n 周期点定义（教材 P67、P115）

结论 3 严格单调函数存严格单调反函数

证明思路 反证法，利用$f \circ f^{-1} = id$

定义 3 标准型函数极限$\epsilon - \delta$定义（教材 P68）

补充 仍可类似数列极限替换ϵ条件

*δ与N均为多值对应，不为ϵ函数

结论 4 f、g为周期函数，$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - g(x)\right) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$（谢惠民 P156、讲义 12）

证明思路 将极限式拆分为三项之和，用绝对值适当放大得结论

结论 5 海涅归结原理（数列极限与函数极限关系）（教材 P70、讲义 8）

证明思路 必要性易得，充分性通过逆否证明

*可方便地用于说明极限不存在

*条件可加强为单调数列（谢惠民 P122）

*可用数列极限说明函数极限性质：唯一、局部有界、保序（保号/夹逼）、保四则运算

*函数的柯西收敛原理（仍由归结原理说明）

*保复合性（注意条件!）

结论 6 f在$x>0$上单调递增，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1,a>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$（谢惠民 P123）

证明思路 利用夹逼定理

定义 4 迪利克雷函数与黎曼函数（教材 P71、P77）

补充 迪利克雷函数处处极限不存在，黎曼函数有理点不连续无理点连续，处处极限为 0，处处不可导

*很多反例都可以靠两个函数进行变形构造（如乘x）

定义 5 函数单边极限（教材 P76）

定义 6 函数上下极限（教材 P112、讲义 9）

补充 函数此点有极限⇔左右极限存在且相等⇔上下极限存在且相等

*函数上下极限存在类似数列上下极限性质（结论 28-30）（教材 P112-114）

结论 7 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$（教材 P76）

证明思路 几何+代数证明

结论 8 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}$（谢惠民 P120）

证明思路 先考虑 n 为 1 时，再分解为两极限之差

定义 7 极限推广，无穷大与无穷小及阶的概念、记号

补充 等价无穷小在乘积中可替换

*记忆 $x\backsim\sin x\backsim\tan x\backsim\frac{a^x-1}{\ln a}\backsim\ln(x+1)\backsim\frac{(1+x)^a}{a}$

*带记号o的等式实质并不是等价关系，而是序关系，如$o(x^2)=o(x),o(x)\neq o(x^2)$

结论 9 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{x}$（教材 P79）

证明思路 补充后替换，注意常数与极限数的区别

结论 10 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,a\in(0,1),\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(ax)}{x}=A\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\frac{A}{1-a}$（类似教材 P89）

证明思路 用定义表述此式，将等比数列累加（注意严谨性，不能直接极限表述）

定义 8 函数的多种类型极限与统一定义（讲义 10）（注意逻辑表述！）

结论 11 函数极限的 Stolz 定理（讲义 10、谢惠民 P123）（同样注意需求条件）

证明思路 可取出数列说明

*需求条件实质上稍弱于连续

*若想通过任意右端成立推左则需一致连续（见结论 19）

*常直接使用洛必达法则

定义 9 函数连续性（教材 P90）、上下左右连续（讲义 11）、开区间上连续（教材 P93）

定义 10 闭区间上连续（利用左右连续）（讲义 12）

补充 注意讲义 11 中连续性的多个等价定义（基本等价定义与振幅刻画、开集原象刻画）

定义 11 上半连续与下半连续（将单点向上提升不影响上半连续）（讲义 14）

补充 闭区间上的凸函数必然上半连续，连续⇔上半连续+下半连续

结论 12 若 f 定义在开区间上，每个开区间的像集仍为开区间，则 f 在区间上连续

证明思路 用类似闭区间套定理的方式构造区间套套住某个点

*初等函数（教材 P94）均为连续函数

*连续性保四则运算、复合、max、min（可反向考虑复合，即变量代换下的连续性）

*考虑黎曼函数知连续性为点概念（一致连续为区间概念）

*连续函数可以替换极限运算和函数的顺序

结论 13 $f(x)$无理点值有理，有理点值无理，则不连续（教材 P110）

证明思路 $f(x)+x$值域为无理数

定义 12 间断点与间断点类型（教材 P94）

结论 14 单调函数只有至多可数个跳跃间断点（教材 P95）

证明思路 先利用数列证明单侧极限存在（类似可证明凸函数每点存在左右导数）

*单调且值域联通必连续，严格单调且值域联通反函数必连续

结论 15 柯西法解函数方程（以下$f\in C\big(-\infty,+\infty\big)$）（教材 P97、谢惠民 P129）

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\Rightarrow f(x)=f(1)x$$

$$f(x+y)=f(x)f(y)\Rightarrow f(x)=f(1)^x \text{ 或 } \mathrm{f(x)=0}$$

$$f(xy)=f(x)+f(y)\Rightarrow f(x)=x^a \text{ 或 } f(x)=0$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}\Rightarrow f(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$$

证明思路 猜出函数后先归纳得整数满足，推出有理数满足，结合连续证明实数满足

结论 16 非常值连续周期函数必有最小正周期（讲义 12）

证明思路 先证明周期下界为 0，再推出常值

结论 17 利用连续性计算 1^{∞} 型极限（教材 P98）

证明思路 等价无穷小替换法

结论 18 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i^x)^{\frac{1}{x}}}{n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$

证明思路 利用上述方式计算

定义 13 一致连续性（教材 P102）

补充 利普西茨连续（教材 P106）（此条件若可导则与导函数有界等价）

证明思路 可直接通过定义说明

*善用定义说明一致连续

*注意一致连续的等价定义（谢惠民 P156）

*利普西茨连续的性质（教材 P106）

*一致连续为区间上概念（由公共δ体现）

结论 19 $\exists x_n,y_n,\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0,\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x_n)-f(y_n)\big)\neq 0\Rightarrow f$非一致连续

证明思路 可直接通过定义说明

结论 20 f在实数一致连续$\Rightarrow \exists a,b\geq 0,|f(x)|\leq a|x|+b$

证明思路 若否，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$

*一致连续函数可以被夹在一次函数之间

结论 21 f一致连续$,\forall x\in[0,1),n\in\mathbb{Z},\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$（教材 P106）

证明思路 利用一致连续性拆分$f(x)$为三段无穷小

*仅连续不能推出此结论，反例如$\frac{\sin \pi x}{1+x^2 \sin^2 \pi x}$

*实质是函数极限 Stolz 定理的逆定理

*将条件改为$\lim\limits_{n\to\infty} f(nx)=0$则只需$f$连续便能成立结论（谢惠民 P156）

有界闭区间上连续函数的性质

结论 22 有界闭区间上的连续函数必一致连续（康托定理，教材 P106）

证明思路 凝聚定理出发，利用反证法说明

*有界开区间一致连续⇔连续+端点存在有限极限

*连续+无限点存在有限极限⇒有界开区间一致连续（另一侧反例：$\sin x$）

*一致连续区间可以拼接

*有界的一致连续函数乘积仍一致连续

*注意以上推论证明过程中的严谨性（谢惠民 P141）

*感觉说不清楚时就用定义表述（此方式可行于大部分证明题）

结论 23 连续周期函数必一致连续（讲义 13）

证明思路 利用上方结论拼接连续区域即可

*此结论可反面使用，即连续非一致连续则无周期

结论 24 $f(a)=f(b), a<b, g(x)=\begin{cases} f(x) & x\le a \\ f(x+b-a) & x>a \end{cases} \Rightarrow g$保留$f$的连续/一致连续

证明思路 连续由定义，一致连续由拼接可立刻得

*直观地看，g即为从f上挖去一个区间后拼接

*此结论有时可用于归纳，如谢惠民 P155 第二题

结论 25 有界闭区间连续函数有最大值、最小值（教材 P108）

补充 此结论蕴含有界性

证明思路 反证有界，考虑趋向上界的点，列紧得成立

*若此点非边界且可导，则导数为 0（即 Rolle 定理的经典证法）

*两次使用有界性可推出最值（谢惠民 P135）

*在上一个推论的条件中，若此点有二阶导，则最大值处≤ 0，最小值处≥ 0

*也即，非边界处的最值点必为极值点

结论 26 连续函数的零值定理、介值定理（教材 P108）

补充 介值定理的另一个表述：区间上的连续函数值域为区间

证明思路 零值由实数完备多个等价定理可推得（谢惠民 P129），证明介值需构造辅助函数

*介值性质并不需要连续，即连续是更强的条件

*满足介值性的函数若存在趋向无穷的极限，则必为正或负无穷

*零值可直接说明根的存在性

*两零点处导函数符号相同可知中间存在零点（可看成零值定理弱化条件）

结论 27 $f\in C[a,b], f(a)=f(b)=0$，任两零点之间存在零点$\Rightarrow f(x)=0$

证明思路 先用确界定理说明任一子区间(m,n)上有f零点

*此结论即：连续函数存在不同零点，则某一子区间为 0 或能取出相邻零点

*此任一子区间上有f零点即为f零点稠密，与稠密性相关的另一重要结论：

结论 28 $x\notin\mathbb{Q}$，记$\{t\}=t-[t]$，则对$n\in\mathbb{Z}$，$\{nx\}$在$(0,1)$上稠密

证明思路 无理数不同倍数必然不等，考虑抽屉原理得可任意接近 0，作倍数得结论

*此结论在说明一些周期函数的性质时很有用（如谢惠民 P155 第 13 题）

结论 29 $f\in C(0,+\infty)$有界 $\Rightarrow\forall\lambda,\exists x_n\to+\infty,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\big(f(\lambda+x_n)-f(x_n)\big)=0$（教材 P111）

证明思路 反证，由恒大于正数（或小于负数）推出无界

结论 30 $f\in C(I),f(I)\subset I$或$I\subset f(I)\Rightarrow f(x)$存在不动点（谢惠民 P132、P148）

证明思路 构造$f(x)-x$，考虑定义域/值域的端点处

三、导数

定义 1 导数定义、左右导数、区间可导（教材 P125）、光滑函数（讲义 15）

补充 可导必连续，连续未必可导（存在连续处处不可导的连续函数），此结论亦可推出微分中的无穷小增量公式（谢惠民 P159、P161）

*导数是差商的极限（在分段函数表示时有时只能利用定义）

*导数最常用的几何观点：切线斜率，一阶导数是最准确的线性逼近（谢惠民 P160）

*可导是一点处的概念（仅一点可导：黎曼函数乘x）

*函数的左右导数具有保号性（本质是极限保号性）（谢惠民 P186）

结论 1 奇函数导函数为偶，偶函数导函数为奇（若 0 点存在则必为 0）

证明思路 由定义推得成立

*此结论可通过归纳推论出n阶导数的情况，也可说明泰勒公式中只含奇/偶项

结论 2 求导的链式法则（教材 P131）

证明思路 利用定义构造函数说明或利用无穷小增量公式

*链式法则亦可推广到n阶情况（讲义 16，实际应用很少）

*求导还有一些基础结论，如四则运算与导数混合、初等函数导数、反函数求导法则

*注意反函数求导法则使用时自变量的不同

结论 3 莱布尼茨公式（教材 P141）

证明思路 利用乘积求导公式归纳

结论 4 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则$f$在 0 处任意阶左导数为 0

证明思路 说明指数收敛速度高于任意阶多项式后归纳得结论

*此函数为任意阶可导但非实解析函数的典型案例（讲义 24），其泰勒多项式恒为 0

结论 5 n为奇数时$arctan^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$（$n$为偶数是 0 可由奇偶性推知）

证明思路 $y'=arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，可利用$(1+x^2)y'=0$使用莱布尼茨公式递推，或分解为$y'=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$直接计算$n$阶导数

*第二种思路的合理性需要由复变函数论说明，因此暂不适合写过程

*事实上，第一种解法更为本质也更为常用（谢惠民 P168 例题、P176 前三道练习题）

*注意拆项法的使用

*关于这个函数的n阶导数有不少可通过归纳得出的结论（教材 P143 第 4、5 题）

结论 6 隐函数与参数方程的求导法则（谢惠民 P171、P174）

证明思路 利用反函数求导法则与链式法则

微分学中值定理（范围：有界闭区间连续、有界开区间可导的函数）

定义 2 极值点、极大值、极小值（教材 P144）

补充 连续函数的严格极值点至多可数（谢惠民 P156 第 16 到 18 题）

证明思路 对于大小确定的邻域，大于邻域内所有其余点的点至多可数，取邻域大小为$\frac{1}{n}$，则可数个至多可数的并仍为至多可数

结论 7 极值点处可导则导数为 0（费马定理）（教材 P144）

证明思路 利用保号性推知成立

*关于函数极值的基本定理，中值定理的成立基础

*由此可知区间无极值⇔单调

定义 3 驻点（教材 P145）

补充 驻点涵义：函数值变化为自变量变化的高阶无穷小（微分看法）

结论 8 Rolle 中值定理（一些难题往往直接通过此定理构造）（教材 P145）

证明思路 利用费马定理说明（其实说明了必存在极值驻点）

*区间上的非端点最值必为极值

*事实上只需端点值相等

*定理亦可扩充为无穷区间（通过构造有限映射到无穷的函数即可说明）（讲义 17）

*萨缪尔森证明涵盖了非极值点的驻点（谢惠民 P189），例如$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$考虑包含 0 的含两零点区间

*此定理的几何意义为：两零点间存在水平切线

*注意此定理的归纳性使用（原函数的n个零点确定$n-1$阶导函数的一个零点）

*此定理常用于说明根的个数

结论 9 $Q(x)=x^n(1-x)^n\Rightarrow Q^{(n)}(x)$在$(0,1)$中存在$n$个互不相同根（教材 P145）

证明思路 n 次使用 Rolle 定理，注意每次的边界新增零点

结论 10 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\,e^{\lambda_k x}$至多有 n-1 个实根（教材 P152）

证明思路 注意到乘e^{cx}不改变根，故可将一项变为常数归纳

结论 11 拉格朗日中值定理（教材 P146）

补充 此定理可写为有限增量公式（谢惠民 P191），引出泰勒展开中的拉格朗日余项

证明思路 构造函数通过 Rolle 中值定理说明

*几何意义：函数割线斜率等于其中某点切线斜率

*此定理为利用导数研究函数时的常用工具

*割线斜率至少为切线斜率最小值，且若为最小，则切线斜率恒定

结论 12 $f(0)=0,c\neq 0,|f'(x)|\le|cf(x)|\Rightarrow f(x)=0$（谢惠民 P224）

证明思路 先利用构造无穷数列+单调有界定理说明$\left[0,\frac{1}{2|c|}\right]$上恒成立

*注意说明小区间恒成立后组合区间的技巧

*亦可通过对数构造函数以说明（更快捷且更本质的方法）（需利用下文结论 18）

*此结论可推广为贝尔曼不等式（讲义 21），证法为对数构造函数

*结合单调性，可由拉格朗日中值定理定理证明不等式，但一定注意是否可使用

结论 13 $\forall a>\mathrm{b}>0,\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}<\arctan a-\arctan b$

证明思路 将反三角函数通过变量代换变回三角函数直接变形为平凡结论

*变量代换仍为基本操作方式

结论 14 柯西中值定理（教材 P149）

证明思路 仍通过构造函数证明

*注意使用条件

*几何意义：参数方程形式曲线割线斜率等于其中某点切线斜率

*此定理亦可扩充至无穷形式

*此定理可通过行列式写出对n阶导成立的形式（实质是 n 次运用 Rolle）（讲义 17）

*三个中值定理实质上等价，其逆定理均不一定成立

结论 15 关于凑微分的一些恒等式

$$f(x)+cf'(x)=\frac{(e^{cx}f(x))'}{e^{cx}}$$

$$f'(x)+g'(x)f(x)=\frac{\left(e^{g(x)}f(x)\right)'}{e^{g'(x)}}$$

$$cf(x)+xf'(x)=\frac{(x^{c}f(x))'}{x^{c-1}}$$

$$f(x)+f''(x)=\frac{\left(f^2(x)+f'^2(x)\right)'}{2f'(x)}$$

$$f(x)-f''(x)=\left(e^{x}\left(f(x)-f'(x)\right)\right)'$$

*以及一些奇奇怪怪的形式（比如$f^2(x)-f'(x)=f^2(x)\left(\frac{1}{f(x)}+x\right)'$）

*注意待定函数法的运用

*可考虑直接利用类似积分的方式（拉格朗日定理与柯西定理均可靠此构造）

*积分方式的运用前提是需要凑微分的部分中不含$f(x)$

*凑与多项式相关的导数的技巧（谢惠民 P196 例题 7.1.3、P222 第 9 题）

*如果不知道怎么解决多阶导数叠合的问题，可以考虑试试 e

*仍然注意基本代数变形（教材 P152 问题 3.4 第 3 题）

*值得强调的变形：将绝对值看成两个不等式，分为两部分证明有时可大幅简化问题（谢惠民 P274 第一题（2）、教材 P169 第七题）

*存在多个变元时可考虑多次利用中值定理后叠加

结论 16 Darboux 定理（教材 P150）

补充 此定理说明了导函数具有介值性

证明思路 考虑最值点知满足零值，构造函数得介值成立，利用中值定理证间断点性质

*此定理中关于间断点的部分证明中即得单侧导数极限定理（谢惠民 P194）

*导数=导数的极限（若极限存在）

*需要运用此定理时一般都较为明显，但一定注意无法说明连续

结论 17 f二阶连续可导，$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c$（谢惠民 P224）

证明思路 先用初等数学说明$f'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f'(x)+f'(y)}{2}$，再说明导函数连续从而推出结论

结论 18 若开区间可导函数在边界附近无界，则其导函数亦无界

证明思路 拉格朗日中值定理可证明

*此结论为函数与导数有界性结论

*此结论反面并不成立（如$\sqrt[3]{x}$在 0 附近）

*若函数与其 n 阶导函数均有界，则小于 n 的任意阶导数亦有界（泰勒展开可证）

结论 19 二阶导在实数上恒不为 0 的函数无界（讲义 18）

证明思路 由 Darboux 不妨设为大于 0，则会恒在某直线上方

结论 20 可导函数导函数不变号⇔单调（教材 P153）

证明思路 定义与中值定理说明

*此结论可直接得出导函数恒为 0 必为常函数（由此可知不定积分必含常数C）

*严格单调性不受离散点处导函数为 0 影响

*此结论与以上推论在凸性中有完全对等的结论

*单调性亦可由右上/右下导数进行刻画（讲义 20）

*由单调性可推出函数自身的大小关系，从而证明不等式

结论 21 $x^{n+2}-2x^n-1=0$正根唯一（谢惠民 P237）

证明思路 研究函数单调性可知

*一般来说，一至二元不等式可以由单调性说明，多元往往依靠凸性

定义 4 严格极大值、严格极小值、最值（教材 P156）

补充 连续函数上左右导函数变号的点为严格极值点

证明思路 由单调性直接说明

*此结论未要求此点导数存在，只需去心邻域存在即足够

*严格极值点附近未必单调（谢惠民 P236）

*最大/小值若存在则唯一，而最值点未必唯一

*可导区间上最值点必在边界或驻点上

结论 22 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+a}$在$a\geq\frac{1}{2}$时在正数单调减，否则在 x 充分大时单调增（讲义 18）

证明思路 直接求导分析

*此结论可说明其与 e 的大小关系，因其极限必为 e

结论 23 极大值点若存在二阶导数，则其不大于 0

证明思路 利用局部保号性说明

*此结论说明了极值点二阶导数的性质，其推广见下方结论 31

*由此可说明，非常值的凸函数在内点无最大值（讲义 19）

定义 5 凸性、凸函数、严格凸函数（教材 P163）

补充 注意其多种等价表达

*原定义与三点定义法为最基本性质，往往可以通过此证明性质

*原定义的几何意义为函数两点连线段在函数同一侧

*三点定义的几何意义为任一点向右移动会导致割线斜率增大

*四点定义与三点定义本质相同

结论 24 f为恒正凸函数，则$\frac{1}{f}$为凹函数（谢惠民 P249）

证明思路 用原定义或三点定义写出定义式分析大小即可

*凸函数在加法、乘法、最大值组合下保持凸性，但不可复合（如x^2-1复合自身）

结论 25 琴生不等式（教材 P163）

证明思路 归纳可知结果

*琴生不等式可用于推证多个不等式，如谢惠民 P255-257 的经典不等式

*证不等式最常用的凸性为指数、对数与幂函数的凸性

结论 26 a_i为正且不全相等，λ_i为正且和为 1⇒ $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}$关于$x$单调增加（定义 0 处

为 0 处极限值）（类似教材 P167）

证明思路 对于$x_1 < x_2$，构造函数$x^{\frac{x_2}{x_1}}$后利用琴生不等式代入$a_i^{x_1}$

*此为完整的幂平均不等式
*虽然此貌似为单变量问题，但直接求导几乎不可做
*常数变易法将a_i看作变元从而更好解决问题

结论 27 开区间连续函数为凸函数只需任两点满足$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$（讲义 20）

证明思路 类似前文用柯西法进行说明
结论 28 凸函数存在递增左右导数，且每点左导数不大于右导数（教材 P171）
证明思路 利用单调有界定理从定义说明
*此为凸函数对导数的最基本性质，可导出一系列结论
*支撑线判别法与导数单调判别法均可由此证明
*由此可推知凸函数在其中任一闭区间均利普西茨连续
结论 29 开区间凸函数连续，闭区间凸函数有界
证明思路 利用左右导数的性质证明
*若开区间凸函数亦有界，则可扩充定义为闭区间凸函数
*将闭区间端点处的值增大不影响凸性
结论 30 可二阶导的函数具有凸性⇔二阶导数恒不小于 0（教材 P167）
证明思路 利用一阶导数的单调性证明
定义 6 拐点（教材 P180）
结论 31 设$n > 1$，若函数存在n阶导数，某点的n阶以下导数均为 0，n阶不为 0，则 n 为偶数时此为极值点，n大于 0 则为极小值，n小于 0 则为极大值；n为奇数时此为拐点，n大于 0 则右侧为凸函数，n小于 0 则左侧为凸函数（谢惠民 P239、P250）
证明思路 直接利用泰勒展开证明，或使用归纳法
*这个结论说明了极值点和拐点对应的奇偶性质
结论 32 曲率公式（讲义 20）
证明思路 通过二次泰勒多项式方程证明
*推广后即n阶导数提供了最准确的n次曲线逼近（若仅允许多项式则为泰勒多项式）
结论 33 若$f(x), f'(x), f''(x)$均不变号，则$f''(x)$与$f(x)$符号相同（谢惠民 P277 推广）
证明思路 不妨设$f(x) > 0$，讨论$f'(x)$符号后反证
*此结论可归纳至多阶情况

结论 34 洛必达法则（教材 P173）
补充 一定注意使用条件!
证明思路 利用柯西中值定理，结合定义证明
*洛必达法则右端的极限可为无符号无穷（第二部分结论 26 下推论）
*即为连续形式的 Stolz 定理，但注意条件区别
*可改进为上下极限夹逼而成的不等式（讲义 21）
*与泰勒展开密切相关
*一切不定型可利用对数、倒数等化为分式形式
*反向使用洛必达时务必更加注意条件

结论 35 $f, u \in C_1(R), u'(x) \neq 0, \lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) + \frac{u(x)}{u'(x)} f'(x)\right) = t \Rightarrow$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = t$（讲义 21）

证明思路 条件满足反向使用洛必达法则的要求，配凑微分即得证

*此处的t可为实数或正负无穷

*洛必达法则亦可连续多次使用

结论 36 $f^{(n)}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x_0+kh)}{h^n}$

证明思路 归纳或直接使用n次洛必达法则

*此即为n阶导存在时仅利用原函数的计算方法

*注意每次使用过后的条件变化

定义 7 渐近线与其计算公式（教材 P180）

*注意教材 P181 作图大致步骤

*函数图像可由参数方程合成（当前几乎不用）（谢惠民 P261）

四、泰勒展开

定义 1 微分定义（教材 P185）

补充 一阶微分的形式不变性

证明思路 直接从定义出发写出式子

*微分看作独立变量函数（讲义 23）

*微分记号dx并不需要为小量

*单变量情况，可微即为可导，计算微分与计算导数相同

*微分可方便地用于隐函数求导

*形式不变性在高阶微分不存在

*高阶微分记号（教材 P189）

*微分用于估计误差做近似计算（初等应用）

定义 2 泰勒多项式（教材 P192）

补充 泰勒多项式本身并不要求$x_0 \to x$

*注意条件仅需一点处n阶可导（与拉格朗日余项对比）

结论 1 函数减去泰勒多项式的余项在$x_0 \to x$时为次数的高阶无穷小（教材 P192）

证明思路 利用洛必达法则与归纳法

*事实上，泰勒展开的系数是由此计算的

*由此亦可看出泰勒展开唯一性

定义 3 皮亚诺余项、麦克劳林公式（教材 P193）

*泰勒展开本质为近似

*可用泰勒展开估计误差

*多项式泰勒展开在多项式次数后的项恒为 0

*奇偶函数的泰勒展开（第三部分结论 1）

结论 2 泰勒多项式为规定次数下的最佳近似（讲义 24、谢惠民 P207）

证明思路 任给相同次数多项式，产生的余项与皮亚诺余项之比趋向无穷

结论 3 带拉格朗日余项的泰勒公式（教材 P199）

证明思路 对余项使用拉格朗日中值定理

*此余项条件为邻域内$n+1$阶可导

*由泰勒展开证明结论时几乎均为用此余项

*拉格朗日余项亦可写为更强的形式，此时可估计极限（教材 P209 问题第 1 题）

*拉格朗日余项作低阶展开或任意阶展开均可证明问题

*在涉及有界性时会考虑低阶泰勒展开

*拉格朗日余项作低阶展开

结论 4 $f\in C^2(R), M_k=sup\left|f^{(k)}(x)\right|, M_0M_2<\infty\ \Rightarrow\ M_1^2<2\mathrm{M_0M_2}(k=0,1,2)$（教材 P210）

证明思路 作出$f(x+t)$的带拉格朗日余项的二阶泰勒展开，取适当t叠加两式可得结论

*此结论可用于估计导函数的界（讲义 26）

*写出增量形式的（即$f(x+t)$）泰勒展开式代入不同的值为常见证明方法

结论 5 f在$[0,1]$上有二阶导且最小值为-1，$f(0)=f(1)=0\Rightarrow\exists\xi\in[0,1], f''(\xi)\geq 8$（教材 P210）

证明思路 在最小值点写出带拉格朗日余项的二阶泰勒展开，代入 0、1 即得证

*最值点处因有导函数为 0 条件，为常见展开方式

*拉格朗日余项的任意阶展开（视为方程组）

*结论 4 在不顾及具体值时可作如下的弱化推广

结论 6 $f\in C^n(\mathbb{R}), M_k=\ sup\left|f^{(k)}(x)\right|, M_0M_n<\infty\ \Rightarrow\ M_k<\infty(k=0,1,2,\dots,n)$（谢惠民 P225）

证明思路 写出$f(x+t)$的n阶带拉格朗日余项的泰勒展开，取适当的$n-1$个t可得到关于$f(x)$的 1 到$n-1$阶导数的线性方程组，从而其均可以小于等于某M_0,M_n的线性组合，从而有界

结论 7 $f\in C^n[0,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)$存在有限$\Rightarrow k\in[1,n]$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$

证明思路 利用增量形式展开，与上题类似由适当的t组合，取极限得结果

*拉格朗日余项产生不等式

结论 8 $f\in C^\infty(a,b), f^{(n)}(x)\geq 0, |f(x)|\leq M\Rightarrow\forall x,y\in(a,b), f^{(n)}(x)\leq\frac{2Mn!}{|x-y|^n}$（谢惠民 P225）

证明思路 写出增量形式的、带拉格朗日余项的泰勒展开，只保留 0 与n两项即可

结论 9 $\mathrm{f}\in C^n(R), \mathrm{k}=0,1,\dots,n-1, f^{(k)}(0)=0, \mathrm{c}\geq 0, \left|f^{(n)}(x)\right|\leq c\sum_{k=0}^{n-1}\left|f^{(k)}(x)\right|\Rightarrow f(x)=0$

证明思路 先考虑一个 0 处足够小的邻域$[-t,t]$，其中$\left|f^{(n)}(x)\right|$上界为M，写出不等式右侧的带拉格朗日余项的麦克劳林展开，可得$M\leq c\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}M$，可取足够小的$t$使得右侧系数小于 1，故此区间内$M$为 0，组合区间即得结论

*此条件可进一步弱化为小于等于任意系数非负的线性组合（即c替换为c_k）

结论 10 带柯西余项的泰勒公式（教材 P199）

证明思路 由另一种构造使用中值定理

*在拉格朗日余项与柯西余项之间存在任意次数的广义柯西余项（讲义 24）

*拉格朗日余项与柯西余项为整体的泰勒展开，需要条件更强，结论也更强

定义 4 实解析函数（讲义 24）

补充 实解析函数的每一点均能写为泰勒多项式的极限

结论 11 任意阶导数存在且非负的函数必实解析（伯恩斯坦定理）（谢惠民 P225）

证明思路 由恒正可利用结论 7 估计，由定义证出结论

*仅任意阶导数存在不能推得实解析，如第三部分结论 4 所提到的函数

*由此，实解析函数的要求严格强于任意阶导数存在

初等函数泰勒展开的计算方式

*直接法：

*通过定义求任意阶导数

*记忆基础函数的泰勒展开式（三角函数、指数函数、对数函数、幂函数）（这些可直接通过n阶导计算得出）

*利用复合得到目标函数的泰勒展开式

结论 12 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\frac{1}{6}$

证明思路 用复合求出分母式子的四阶麦克劳林展开式，从而计算出结果

*间接法：

*待定系数法与方程的思想

*在求导后展开，通过类似积分的方式还原

结论 13 $\frac{x}{e^x-1}$麦克劳林展开的递推公式（0 点由极限定义）（谢惠民 P216）

证明思路 利用其倒数可写出完整展开，待定系数法得到系数递推式

*此思路亦可用于$\tan x$等可组合而成的函数

*这个递推的结果即为伯努利数

定义 5 欧拉数、伯努利数（谢惠民 P215）

*此即为由方程得到的一列特殊系数组

*可用于计算一些泰勒展开

定义 6 线性插值（教材 P201）

结论 14 $f(x)\in C^2(a,b), l(x)$为过$\big(a,f(a)\big),\big(b,f(b)\big)$的直线，$M=\sup\limits_{x\in(a,b)}f''(x)\Rightarrow$

$|f(x)-l(x)|\le\frac{M}{8}(b-a)^2$（线性插值误差估计）（教材 P202）

证明思路 利用任一点泰勒展开至二阶拉格朗日余项后代入a,b证明

结论 15 割线中值定理（教材 P202、讲义 26）

证明思路 由误差估计证明过程中出现的两式不直接求和，而由导函数介值性直接得到中值

定义 7 插值多项式（讲义 36）

补充 可以理解为不同点处的泰勒展开

*插值多项式与原函数在展开点处的值必相等

*由此，两函数差存在n个零点，故$n-1$阶导数存在零点

*再构造函数使得增添零点，即出现n阶导处中值结论

*插值多项式余项与泰勒展开余项非常接近
*亦可看成过n个指定点的$n-1$次多项式（讲义 45）
*构造方式：先考虑某一点处为 0，其他为 1 的构造，再线性组合n个式子（类似中国剩余定理）

五、不定积分
***此段几乎全为计算题，因此此处不放置例题性的结论**
定义 1 原函数、不定积分（教材 P211）
补充 利用此定义可由直接法求出函数积分
*注意$\ln x$中何时要加上绝对值
*可利用加减拆项简化运算
*记忆常用公式（包括基本公式与和平方有关的一些公式）
*积分导致次数增加
*用求导验证结果正确性
结论 1 分部积分公式（教材 P214）
证明思路 利用乘积求导法则逆运算
*分部积分常用于含指数函数、对数函数、幂函数、三角函数或是反三角函数时，特点为求导不会使式子更复杂
*利用分部积分有时可构造出方程组以得到希望结果（配对积分法，谢惠民 P285）
*利用分部积分有时可以构造出递推式
*因为不容易想起所以可率先尝试
结论 2 换元公式（教材 P217）
证明思路 利用复合函数求导法则逆运算
*依然记忆凑微分的常用公式
*三角换元与双曲换元的应用（根式情况）
*注意换元后补充导数一项进入乘积
*初等函数积分不一定为初等函数的原因之一即为积分无法复合
*十分依赖观察能力
结论 3 反函数积分公式（第二换元法）（讲义 28、谢惠民 P280）
证明思路 利用反函数性质分部积分
*如同反函数求导一样注意代换变量后区别

定义 2 有理函数、部分分式（教材 P223）
结论 4 有理函数可分解为规定形式（教材 P223）
证明思路 利用复分析知识（不要求掌握）
结论 5 任意有理函数存在初等原函数（教材 P227）
证明思路 两类分式一类直接积分，一类由分部积分得出递推，累加即得
*实际操作时注意运用换元技巧简化运算（教材 P235 第二题（10））
*由于高次方程不可解性，未必能找出分解，因此为理论可做
*寻找系数时可利用待定系数或极限技巧（刘维尔定理，讲义 29、谢惠民 P290）

结论 6 三角函数有理式化为有理函数（教材 P229）
证明思路 利用万能代换
*注意如果函数含奇偶性，会存在更方便的代换（讲义 30、谢惠民 P281）

*先进行降次是较常用的处理

结论 7 线性分式的根式化为有理函数（教材 P231）

证明思路 直接代换证明

*此代换有时会较为复杂，但基本可以通用，至少作为尝试

结论 8 根式函数的切比雪夫判别法（教材 P232）

证明思路 三类分别代换观察结果

*涵盖情况多，但容易复杂

*一般结论 7 足够使用

结论 9 欧拉变换（讲义 30、谢惠民 P293）

证明思路 同样代换后观察

*对二次根式型较通用的处理，较为方便简化

*仍注意观察和换元作为最本质的处理方法，通用往往意味着繁琐

六、定积分

***此段采用谢惠民的编排顺序，先讨论可积性**

***重要的积分不等式（讲义 34、39、41 部分内容）放入积分应用中**

定义 1 黎曼可积、黎曼积分、黎曼和（教材 P238）

补充 积分的极限定义与古典极限并不相同，可自由选取分割与介点集

*定积分可自然地看作曲边梯形的（有向）面积

*由介点集任意性，任意子区间都满足的性质可推出积分性质（即稠密的性质）

*同样由任意性，可积函数问题可通过等距分划转化为数列问题（尤其不等式上）

*同样，数列问题可看为积分

*积分时可去间断点可补充定义为连续点

*定积分的积分变量是哑标（结果与其无关，不定积分则不同）

结论 1 可积函数必然有界（教材 P244）

证明思路 由分划后存在极限可推证

*可积与原函数存在无关（注意$\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\frac{1}{x^2}\right)$为反例）（有界且原函数存在时可积）

定义 2 振幅、振幅面积（教材 P264）

补充 振幅亦与函数连续有关（讲义 11）

定义 3 Darboux 上下和、上下积分（教材 P265）

补充 利用上和下和证明本质是阶梯函数的夹逼

*添加分点后上和不增，下和不减，故存在某种单调性

*由此单调性结合有界知上下积分必然存在

结论 2 $f\in R[a,b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0 \Leftrightarrow \overline{I}=\underline{I}$（教材 P267）

证明思路 利用振幅估算上下和，夹逼可证

*此极限中的分划P任意性可改进为存在性（谢惠民 P301，第二充分必要条件）

*可进一步改进为振幅与区间长度二元控制（谢惠民 P301，第三充分必要条件）

*分两部分进行二元控制的方法有很多应用（见下方结论 27）

*两步改进后实质已非常接近勒贝格定理

结论 3 闭区间上的连续函数、单调函数均可积（教材 P268）

证明思路 直接利用振幅可判别（注意有界闭区间连续必然一致连续）

*此可推知闭区间凸函数单侧导函数可积

结论 4 $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \epsilon, \exists g, h,\ g \le f \le h, \int_a^b (g-h) < \epsilon$（教材 P269，谢惠民 P333）

（其中g,h可为阶梯函数、连续函数、连续可微函数）

证明思路 用上下和可构造阶梯函数，从阶梯出发用连续与可微逼近

*利用熟悉的函数逼近可积函数是常用的处理方式

结论 5 $f \in R[a-t,b+t], t>0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx = 0$（谢惠民 P333）

证明思路 利用上个结论中构造的连续函数，将极限写为定义后拆分绝对值

定义 4 零测度集、几乎处处（教材 P264、P277）

*至多可数个零测集并集零测

*零测集子集零测

结论 6 Lebesgue 定理（教材 P271）

证明思路 采用第三部分定义 2 处的证明思路，通过划分$\frac{1}{n}$从振幅出发证明

*此定理两方向证明都较复杂，需仔细阅读

*使用此定理可简化很多结论的证明，如可积区间可叠加、乘法保持可积性等

*由此定理亦可知，改变有限个点不影响积分

结论 7 $f \in C[c,d], g \in R[a,b] \to [c,d] \Rightarrow f\circ g \in R[a,b]$

证明思路 g的连续点必然为$f\circ g$的连续点

*若f可积则无法判定$f\circ g$是否可积（$R(R(x))$（R 为黎曼函数）为反例）

*若f,g不可积亦无法判定$f\circ g$不可积（$D(D(x))$（D 为迪利克雷函数）为反例）

结论 8 $f \in R[a,c] \Rightarrow \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$（可加性，教材 P245）

证明思路 写为积分和形式

*由此可定义$a \ge b$时的$\int_a^b f$

*积分还具有唯一性、线性性等基本性质

结论 9 $f \in R[a,b], f \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f \ge 0$；某连续点处非 0 $\Leftrightarrow \int_a^b f > 0$（教材 P245）

证明思路 左半边由定义，右半边写出非 0 点一个邻域即可

*此即为积分的保序性

*此式可产生一些自然的基本放缩，如$\int_a^b |f| \ge \left|\int_a^b f\right|$

结论 10 $i = 0,1,\dots,n-1, \int_0^1 x^i f(x)dx = 0 \Rightarrow f$在$[0,1]$上至少$n$零点（教材 P248）

证明思路 若否，则可组合出 n-1 次多项式与f乘积不变号

*说明零点个数的思路：中值定理、组合积分等

结论 11 上题条件下，$\int_0^1 x^n f(x)dx = 1 \Rightarrow \max_{[0,1]}|f| \ge 2^n(n+1)$（教材 P264）

证明思路 组合出$\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$与$f$乘积放缩

结论 12 $f\in C[0,1]\to[m,M]\Rightarrow\int_0^1 f\int_0^1\frac{1}{f}\le\frac{(m+M)^2}{4mM}$（教材 P269）

证明思路 构造函数$(f(x)-m)\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{M}\right)$，利用均值不等式

*积分问题时常要考虑构造适当的函数以控制（经常需要保证其正负性）

结论 13 $f\in C[a,b]$单调增$\Rightarrow\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f$（讲义 39）

证明思路 构造函数$\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\left(\mathrm{x}-\frac{\mathrm{a+b}}{2}\right)$

结论 14 $f\in C[a,b],g\in C[a,b]$不变号$\Rightarrow\exists\xi\in[\mathrm{a,b}],\int_a^b fg=f(\xi)\int_a^b g$（积分第一中值定理，教材 P246）

证明思路 控制大小后利用介值定理，或利用柯西中值定理

*可改进为$g\in R[a,b]$

*可改进为$\xi\in(a,b)$（谢惠民 P308）

*不可改进为$f\in R[a,b]$

*g不变号条件不可省略

*取g为 1 可得常用结论

*注意保留的为不变号的

结论 15 积分第二中值定理（讲义 33、谢惠民 P246）$f\in R[a,b],g$单调$,\exists\xi,$

$\int_a^b fg=g(a)\int_a^\xi f+g(b)\int_\xi^b f$

g非负单调增$\Rightarrow\int_a^b fg=g(b)\int_\xi^b f$

g非负单调减$\Rightarrow\int_a^b fg=g(a)\int_a^\xi f$

证明思路 利用阿贝尔变换得到阿贝尔引理后证明（不要求掌握）（讲义 33）

*注意闭区间单调函数必可积

*注意提取出的为单调的

*可利用第一中值定理证明弱化的第二中值定理（谢惠民 P327）

*两个积分中值定理的应用见结论 37

定义 5 变限积分（教材 P249）

补充 可积函数的变限积分必连续

证明思路 由可积函数有界，直接由定义推知

*事实上可积为区间性质，因此变现积分在区间连续

*若函数有一点处连续，则此点变限积分必可导

*当使用条件未必满足时，应回到定义或利用性质好的函数逼近

结论 16 $f\in R[a,b]$在x处连续$\Rightarrow\frac{d}{dx}\int_a^x f=f(x)$（微积分基本定理，教材 P251）

证明思路 由导数定义计算极限

*当f在区间连续时，变限积分区间可导，即为一个原函数

*不连续点处未必不可导（$\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt$在 0 处，结论 31）

结论 17 $f \in C[a,b]$，F为f原函数⇒ $\int_a^b f = F|_a^b$（牛顿-莱布尼茨公式，教材 P251）

证明思路 由结论 14 直接得到

结论 18 u, v, f可导，$g(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f \Rightarrow g'(x) = f\big(u(x)\big)u'(x) - f\big(v(x)\big)v'(x)$

证明思路 利用复合函数求导法则拆分

*将积分中的f替换为$f(x,t)dt$有更好的结论（讲义 34，利用全微分，不要求掌握）

结论 19 $f \in C^1[a,b] \Rightarrow \int_a^b |f'| \geq \underset{[a,b]}{\omega} f(x)$（ω为振幅，即最大值最小值差）

证明思路 设出最值点后放缩直接得到

*此结论常用于含绝对值时的放缩

*注意极值思想的应用

*利用极值与中值定理可提出指定项放缩

结论 20 $f \in R[0,a], g(x) = \frac{\int_0^x f}{x} \Rightarrow g$保持$f$的单调性

证明思路 利用换元统一积分限说明（讲义 39）

*此函数（称积分平均）保持极限，可从极限定义出发说明

*事实上g亦保持凸性，证明见第七部分结论 26

结论 21 分部积分公式（教材 P255）

证明思路 对乘积微分公式作积分

*可以将积分与导数建立更好的联系

*遇到多重积分时可以降低重数（见结论 33）

*利用分部积分保留某些性质（证明π是无理数，教材 P263 问题 6.4 第 4 题）

结论 22 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$（讲义 39）

证明思路 考虑$\int_0^1 (1-x^2)^n dx$直接计算与三角代换后分部积分计算

*可以从积分的角度考虑组合恒等式

*注意$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d(x-t)$，故在不同点分部有不同结果（相当于泰勒展开）

结论 23 换元公式（教材 P260）

证明思路 利用复合函数求导法则

*一定注意使用条件中的连续可导、端点一致等要求

*换元可用于调整积分限优化结构

*亦可用于统一积分内容（常遇到平移换元，即$t = x + a$）

*事实上条件可改变，不过实际运用不多（讲义 35）

*利用对称性可大量简化运算（当直接算无从下手时可尝试配对）

*基本公式（来自换元）$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

结论 24 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$（教材 P284）

证明思路 对称性配对后变量代换得到方程

*事实上此积分并非常义积分，但计算技巧值得关注

*利用换元和分部可以处理不少复杂的问题，结合放缩得到更多结果

积分与极限

*积分与极限同时出现时须注意运算顺序

*常用积分定义/极限定义直接处理

*极限计算积分与积分计算极限

结论 25 $\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx=4\pi\ln r$（泊松积分，谢惠民 P372）

证明思路 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$化简后，发现只需要证明 $r^2=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{r+1}{r-1}\prod_{k=1}^{2n}(r-\zeta_{2n}^k)}$，（$\zeta_{2n}$为$2n$次本原单位根）,根式中即为$\frac{(r+1)(r^{2n}-1)}{r-1}$)

*极限计算积分较少出现，但有基础性作用

结论 26 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{\pi}{n}}=\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^{\pi}$

证明思路 转化为积分，利用上一题结论可算得成立

*此类数列极限有自然的积分表示，但仍注意数列极限技巧的基础应用

结论 27 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}dt=\frac{1}{2}$（教材 P263）

证明思路 利用 Stolz 转化后三角变形得结论

*利用拆分处理极限

结论 28 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}dx=0$（谢惠民 P335）

证明思路 分为$\int_0^{\epsilon} f$与$\int_{\epsilon}^1 f$分别估计，调整ϵ,n取值使两段分别任意小

*亦可利用最值点为可数集合而构造区间估算

结论 29 f,g可积且g有周期$T\Rightarrow\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b f(x)g(px)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g\int_a^b f$（谢惠民 P335）

证明思路 可平移使g一个周期内积分为 0，以 g 每个周期作拆分，用阶梯函数逼近f

*舍弃无关部分的思想

结论 30 $f\in C[a,b]\to[0,+\infty)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\limits_{[a,b]} f$（教材 P249）

证明思路 只关注最值点附近，其余利用极限舍去

结论 31 $f\in C[-1,1],\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0)$（教材 P263）

证明思路 换元后只关注 0 附近部分的值，其余利用极限舍去

积分与导数

*核心部分，将微分积分联系起来

*积分余项的泰勒展开揭示了一元微分学的统一性

*有较多的方法与技巧

*注意先判定是否可导

*利用导数得到等式

结论 32 $\frac{d}{dx}\int_0^x\cos\frac{1}{x}dx=0$

证明思路 写为导数定义，利用分部移出部分后再使用洛必达法则

结论 33 泰勒公式积分余项（教材 P257）

证明思路 多次使用分部积分说明相等

*积分余项不含中值，为精确值

*可直接推出拉格朗日余项与柯西余项

*一阶时积分余项即为牛顿莱布尼茨公式

结论 34 $f\in C[0,+\infty]\Rightarrow\int_0^a\left(\int_0^x f\right)dx=\int_0^a f(x)(a-x)dx$（教材 P263）

证明思路 对a求导或在左侧内部使用分部积分（两方法本质相同）

*此式可递推得到多重积分的形式

*利用泰勒展开积分余项与此式可写出泰勒展开多重积分余项（讲义 34）

*将常数看作变量求导可以证明一些等式/不等式（讲义 39）

*积分等式的另一个常用证明思路是配凑对称

*利用导数控制不等式

结论 35 f可导,$f(a)=f(b)=0,f'(x)\in[\alpha,\beta],\alpha<0<\beta\Rightarrow\left|\int_a^b f\right|\le\frac{1}{2}\alpha\beta\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}$

证明思路 $f(x)$一定位于$\alpha x-a\alpha,\alpha x-b\alpha,\beta x-a\beta,\beta x-b\beta$围成的平行四边形之中

结论 36 $f\in C[\mathbb{R}]\to(0,+\infty),|f'(x)-f'(y)|\le|x-y|\Rightarrow\left(f'(x)\right)^2<2f(x)$

证明思路 反证，若否，不妨设此点导数为负，估计向后减少量直到函数值为 0

*导数的范围可使函数位于某些曲线上方或下方，从而估算积分

结论 37 f可导,$f'\ge m>0$,（谢惠民 P371）

1) f'单调增$\Rightarrow\left|\int_a^b\cos f(x)\,dx\right|\le\frac{2}{m}$

2) $|f|\le\pi\Rightarrow\left|\int_a^b\sin f(x)\,dx\right|\le\frac{2}{m}$

证明思路

1)首先利用$\cos f(x)=\frac{(\sin f(x))'}{f'(x)}$，接着由单调性用第二积分中值定理提取放缩

2)利用上述类似方法，讨论$\cos f(x)$是否存在零点，若存在必为唯一零点，故拆分后利用积分第一中值定理放缩

*注意中值定理使用条件!

*放缩为最大/最小后利用中值定理提出为常用处理（教材 P253 例 3）

*利用导数得到中值结果

结论 38 f可导,$\int_a^b f=0,|f'|\le M,x\in[a,b]\Rightarrow\left|\int_a^x f\right|\le\frac{M(b-a)^2}{8}$（谢惠民 P359）

证明思路 泰勒展开后提取中值

*实际与第四部分结论 14 完全相同

结论 39 $f\in C^2[a,b]\Rightarrow\exists\xi\in(a,b),\int_a^b f-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$

证明思路 在$\frac{a+b}{2}$处泰勒展开后写出a,b处表达式得结论

*还原为微分学中值问题为常用操作思路，且由于等价性一定可以得出结果

结论 40 $f\in C^2[a,b],f(a)=f(b)=0,|f''|\le M\Rightarrow\left|\int_a^b f\right|\le\frac{M(b-a)^3}{12}$（谢惠民 P359）

证明思路 利用分部积分（先中点后$(x-a)(x-b)$处分部）估算（讲义 41）

*直接利用积分特有的方式（如分部积分）亦有机会解决问题

*事实上上方题目均可用两种方式做出

*实质仍然一致（在某点处分部与泰勒展开一致）

*数值积分（与上方中值结果联系紧密）

结论 41 （矩形估计）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\frac{f(0)-f(1)}{2}$

证明思路 对小区间估计，利用$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)d(x-b)$

结论 42 （优化的矩形估计）$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\int_0^1 f-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right)=\frac{f'(1)-f'(0)}{24}$

证明思路 对小区间估计，利用$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)d(x-a)+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)d(x-b)$

结论 43 （梯形估计）$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\int_0^1 f-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)}{2}\right)=\frac{f'(0)-f'(1)}{12}$

证明思路 对小区间估计，利用$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)d\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$

*利用分部积分凑出想要的形状

*积分天生容纳中值，故含中值结果积分下可得确定结果（如结论 39 积分可直接推知结论 41）

定义 6 广义可积（教材 P279）、无穷积分、瑕积分（教材 P281）

*此处不讨论可积条件，仅含计算内容，故仍由之前定积分技巧计算（见结论 24）

*注意反常积分可以和常义积分互相转化（如利用$\tan x$换元等）

七、积分应用

***面积部分定理可运用分割求和取极限证明（但注意事实上我们并没有严格定义空间中的弧长与面积）**

***物理部分并不重要，考试亦未考过，故略过**

结论 1 平面图形面积 $S=\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(xdy-ydx)$（教材 P288，谢惠民 P337）

补充 后半部分的式子为参数方程形式，x,y均为t函数，对t积分

*后半部分的式子可直接推导出极坐标形式扇形公式（$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2d\theta$）

结论 2 $y^2-2xy+x^3=0$所构成封闭曲线面积是$\frac{8}{15}$（谢惠民 P337）

证明思路 代入$y=tx$写为参数方程形式，注意t取值范围为 0 到 2

结论 3 空间曲线弧长$L=\int_a^b\sqrt{x^2+y^2+z^2}dt$（教材 P293）

补充 此式令$x=t,z=0$可得出函数的弧长公式（$\int_a^b\sqrt{x^2+f'^2(x)}dx$）

结论 4 半轴长a,b的椭圆周长与$y=c\sin\frac{x}{a}$一个周期长度相同$\Leftrightarrow b^2=a^2+c^2$

证明思路 分别写出，换元后调整形式得到方程

结论 5 空间区域体积$V=\int_a^b g(x)dx$（$g(x)$为截面积）（教材 P295）

结论 6 质心坐标公式$x_c=\frac{\int_a^b xs(x)dx}{\int_a^b s(x)dx}$（$s(x)$为截线段长，$y,z$类似公式）（谢惠民 P341）

结论 7 旋转体体积公式$V_x=2\pi y_c S$（绕 x 轴旋转，2π可为任意角度）（谢惠民 P342）

证明思路 利用$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$，代入证明

*旋转体侧面积有类似公式（谢惠民 P342）

结论 8 旋转体侧面积公式$S=\int_a^b y\sqrt{x^2+y^2}dt$（教材 P296）

结论 9 长轴a短轴b椭圆绕长轴旋转所得椭圆面面积为$2\pi b\left(b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\right)$

证明思路 利用参数方程代入公式

*绕短轴则结果形式并不同

*椭圆绕长短轴形成椭球性质存在差异（如均匀带电线段等势面必为绕长轴旋转椭圆）

结论 10 递增与递减级数的积分估计（教材 P301-302）

证明思路 利用每个区间放缩为端点进行估计

*此结论可以说明存有限极限的单调函数级数与积分的差存在极限

*因此，此时无穷级数与无界积分敛散性一致

*此结论并不复杂，但可以判断不少情况

结论 11 $\int_a^b f^2\int_a^b g^2\geq\left(\int_a^b fg\right)^2$（柯西-施瓦茨不等式）（教材 P248）

证明思路 利用柯西不等式极限形式或利用$\int_a^b(tf-g)^2\geq 0$构造关于t的二次函数

*注意取等条件为f,g几乎处处线性相关

*柯西不等式在不等式题中应用极多

*从取等条件得到等式

结论 12 $f\in C[0,1],\int_0^1 f=1,\int_0^1 xfdx=a,\int_0^1 x^2fdx=a^2\Rightarrow f(x)=2x$（谢惠民 P334）

证明思路 直接利用柯西，故$f(x)$为x倍数，再由第一个式子算出结果

*拆分技巧

结论 13 $\int_a^b f=1,f\geq 0\Rightarrow\left(\int_a^b f\cos kx\,dx\right)^2+\left(\int_a^b f\sin kx\,dx\right)^2\leq 1$（谢惠民 P353）

证明思路 将$f(x)$拆为$\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(x)}$，组合后以柯西放缩

*当需要分离时可将函数拆分（为了运用非负条件）

结论 14 $f\in C^2[0,1],f(0)=f(1)=f'(0)=0,f'(1)=1\Rightarrow\int_0^1 f''^2\leq 4$（谢惠民 P374）

证明思路 分部可知$\int_0^1 f''=1,\int_0^1 xf''(x)dx=1$利用柯西有$\int_0^1 f''^2\geq\frac{\left(\int_0^1(x-c)f(x)dx\right)^2}{\int_0^1(x-c)^2dx}=\frac{3c^2-6c+3}{3c^2-3c+1}$，直接求出最小值，$c$取$\frac{1}{3}$即达到

*注意待定系数法的运用

*常用的放缩方式

*利用牛顿-莱布尼茨公式与绝对值放缩调整

结论 15 $f\in C^1[0,a],f(0)=0\Rightarrow\int_0^a|ff'|\le\frac{a}{2}\int_0^a f'^2$（谢惠民 P373）

证明思路 利用$|f(x)|\le\int_0^x|f'|$，令$g=\int_0^x|f'|$柯西放缩

结论 16 $f\in C^1[0,1],f(0)=0\Rightarrow\int_0^1 f^2\le\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)f'^2(x)dx$

证明思路 牛顿-莱布尼茨公式调整左侧后柯西拆分

*平方式还可选择求导处理

结论 17 f可导，$f'\in[0,1],f(0)=0\Rightarrow\left(\int_0^1 f\right)^2\ge\int_0^1 f^3$（教材 P254）

证明思路 将 1 变为参数t求导，整理后再求导

*当结论实质上与上限无关时可将上限看作变量处理

结论 18 Young 不等式（教材 P305）

证明思路 先说明取等时的情况，再分类证明

*函数连续的条件可以去掉（严格单调自然可积），此时需利用定义证明

*取等时产生的等式实际上即为反函数的积分公式

*注意拼接为矩形方法的应用

结论 19 $a,b,p,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$（离散形式，教材 P306）

证明思路 利用x^{p-1}与x^{q-1}互为反函数，积分证明

结论 20 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow\int_a^b|fg|\le\left(\int_a^b|f^p|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g^q|\right)^{\frac{1}{q}}$（赫尔德不等式，教材 P308）

证明思路 在结论 19 中代入$a=\frac{|f|}{\left(\int_a^b|f^p|\right)^{\frac{1}{p}}},b=\frac{|g|}{\left(\int_a^b|g^q|\right)^{\frac{1}{q}}}$，积分即得证

*此不等式可看作柯西不等式推广

结论 21 $\mathrm{p}\ge 1\Rightarrow\left(\int_a^b|f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b|f^p|\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g^p|\right)^{\frac{1}{p}}$（闵可夫斯基不等式，教材 P308）

证明思路 $|f+g|^p\le|f+g|^{p-1}|f|+|f+g|^{p-1}|g|$，两边积分后利用赫尔德不等式

*这些不等式都可以范数化表达（讲义 44），可在泛函分析中推广

*不等式可来自离散形式极限

结论 22 f,g单调增$\Rightarrow\int_0^1 fg\ge\int_0^1 f\int_0^1 g$（切比雪夫总和不等式）

证明思路 由排序不等式（或构造乘积）说明离散形式的总和不等式后取极限

结论 23 $f>0\Rightarrow\int_a^b f\ge e^{\int_a^b\ln f}$（均值不等式）

证明思路 由算术-几何平均不等式取极限而来

结论 24 Gronwall 不等式（讲义 39，谢惠民 P373 有弱化形式）

证明思路 求导证明$\frac{M(t_0)+\int_0^t f\varphi}{M(t_0)e^{\int_0^t \varphi}}$单调减后直接比较得结果（注意$M(t_0)$已为常数）

*注意此不等式条件

结论 25 f连续凸$\Rightarrow (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int_a^b f \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$（谢惠民 P344）

证明思路 写出每对对称点均满足的不等式后积分

*这个不等式亦有鲜明的几何意义（谢惠民 P345）

*这个不等式左右两不等号均为连续函数凸的充分必要条件（谢惠民 P373）

结论 26 $f \in R[0,a], g(x)=\frac{\int_0^x f}{x} \Rightarrow g$保持$f$的凸性（谢惠民 P353）

证明思路 由 g 连续只需证明满足琴生条件，利用f凸性放缩

结论 27 $f \in [m.M], \varphi$凸$, p \ge 0, \int_a^b p = 1 \Rightarrow \varphi\left(\int_a^b pf\right) \le \int_a^b p\varphi(f)$（琴生不等式，谢惠民 P346，讲义 41）

证明思路 $\varphi(f(x)) \le \varphi(c)+\alpha(f(x)-c), c=\int_a^b fp$，同乘$p(x)$后积分可消去$\alpha$

*琴生不等式很强，可证明包括均值在内的一系列不等式

*直接使用不多，一般运用特例

结论 28 Wallis 公式（教材 P309）

证明思路 利用三角函数次方的定积分结果使用夹逼原理

*注意证明中积分与夹逼的综合运用

结论 29 $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$（斯特林公式，教材 P311）

证明思路 利用不等式估计$\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$极限

*教材 P311 上实际给出了一个余项估计（$e^{\frac{t}{4n}}, t \in [0,1]$）

*事实上用更好的不等式能得到更精确的估计（$e^{\frac{t}{12n}}, t \in [0,1]$，讲义 41）

*此式可估算组合数的阶

*有时需要与组合恒等式综合运用（教材 P312 问题 7.4 第 2 题）

结论 30 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$（教材 P312）

证明思路 利用范围内$1-x^2 \le e^{-x^2}, e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$由$e^{-nx^2}$作出估计，并使$n$趋向无穷，夹逼得结论

*此即为用极限计算积分的例子

感谢阅读！