线性代数习题解答

原生生物

作者 QQ：3257527639

对应讲义：王新茂老师讲义 (下载地址：mcm.ustc.edu.cn/xxds) 2021 年 9 月 6 日版

使用资料：个人解题为主，答案来源包括助教的习题课讲义、同学解出的难题或网络上的论文与解答等。

目录

习题分级

* 答案暂缺：4.1 - 9,12(1)、4.2 - 6、5.1 - 15(2-4)、7.2 - 7(4)、7.3 - 2,8,9,14

* 习题解答中，引用定义、定理、例题或习题若未标注节数则默认在本节中

容易 (难度分级中未提及的题目)：在完成本讲基础知识的学习后应该做出。

中档：在基础知识上结合一定的思考，尽量独立解决。

困难：复杂的拓展与提升，有不少结论值得熟悉。存在极困难的题目，建议及时查阅答案，不宜死磕。

难算 (独立于难度级别)：有较为繁杂的计算或需要的技巧集中在计算部分。

1.2 难算 5,6

2.1 中档 6(3,6),7(3,5,6,8),9,11(1,3),13,16、困难 7(7),15,17,18、难算 6(6),7(7)

2.2 中档 3-6、难算 1,8(4)

2.3 中档 3,8,9

2.4 中档 3(2-8),7,9,10,12、困难 13,14、难算 3(6)

3.1 中档 5(4,5,7,8,10,14,15)

3.2 中档 3,5-7,9,11、困难 4,10,12-14、难算 4,5

3.3 中档 1,2,4-9、困难 10-12

3.4 中档 2-5、难算 2

4.1 中档 5-7,8(1-5)、困难 8(6),9-13

4.2 中档 2,7-9,12、困难 5-6,10

4.3 中档 2,3-5,8-10

5.1 中档 3(7,8),4(3,4),5-7,9,12,13、困难 11(2-4),14,15(2-4),16(1,2,4)、难算 14

5.2 中档 3,5,7、困难 9,10

5.3 中档 3,10,11、困难 4-9,12

5.4 中档 1(5-10),3,5-10、难算 1(9,10)

5.5 中档 2,3,5,11,12、困难 4,6,7,9,10、难算 10(2,3),12

6.1 中档 4,7(2),9、困难 3,12

6.2 中档 4,6、困难 5,8,9

6.3 中档 2,4,5,6(1-4),7,9(1,3)、困难 3,6(5,6),8,9(2),10、难算 7(2)

6.4 中档 2,5、困难 11-13、难算 4

7.1 中档 5(3),6,7、难算 5(3),6

7.2 中档 3,5(3),6,7(1),8(3,4),9(1),13(2)、困难 5(2),7(2-4),9(2-4),10(2,3),12,14

7.3 中档 1,3,4,7,11、困难 2,5,8-10,12-14

8.1 中档 6

8.2 中档 3,8,9

8.3 中档 5,6,9,10

8.4 中档 5、困难 7-10

8.5 中档 6,7(2,3),8(2,3),9、困难 3、难算 1

8.6 中档 3,5,9,10

8.7 中档 2-4,6,7、困难 5

9.1 中档 2(10),7(1-3)、困难 7(4,5)、难算 5(2)

9.2 中档 4-8

9.3 中档 3-6

9.4 中档 4(2,3),5(1),6(2),8,9、困难 3,5(2),6(1),7,10

9.5 中档 5,6,7(1-4)、困难 4,7(5)

9.6 中档 3,7,8(1,2),10(2)、困难 8(3)

9.7 中档 1(1),2(2,3),3,4、困难 1(2),2(1),5,6
10.1 中档 3(1,2),4-6、困难 3(3),8
10.2 中档 2(2,3),9(1,2)、困难 2(1),5,7,8,9(3),10
10.3 中档 2,4、困难 5(3,4)
10.4 中档 8(1-3),9(2),10(1)、困难 8(4),9(3),10(2,3)
10.5 中档 6
10.6 中档 2,4,6、困难 5

第一章　线性方程组

§1.1　消元解法

1. 设 f, g 为 $x_1, x_2, x_n \ldots$ 的一次多项式，$f = 0, g = 0 \Rightarrow \lambda f = 0, g - \lambda f = 0$，故解不减少

   交换两个方程的位置，其逆变换为再次交换此两方程；

   将某个方程替换为其非零常数 λ 倍，其逆变换为将此方程替换为其 $\dfrac{1}{\lambda}$ 倍；

   将某个方程替换成它与另一方程的常数 λ 倍之和，其逆变换为将此方程替换它与对应方程的 $-\lambda$ 倍之和；

   故，对于其中的任意操作，可通过其逆操作将其变回，故解亦不增加。综上可知此三操作不改变线性方程组的解。

2. (1) $x_1 = \dfrac{5}{13}, x_2 = \dfrac{7}{13}, x_3 = -\dfrac{1}{13}, x_4 = \dfrac{2}{13}$

   (2) $x_1 = -2t, x_2 = t, x_3 = 0, x_4 = t$，$t$ 为任意实数

   (3) $x_1 = \dfrac{2-t}{3}, x_2 = 0, x_3 = \dfrac{5t-1}{3}, x_4 = -3t, x_5 = t$，$t$ 为任意实数

   (4) 无解

   (5) 无解

   (6) $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = -1$

3. 初等变换后将方程组化为定理 1.2 中的阶梯形，由变换特点知最右侧必然仍全为 0，且左侧含未知数最少的行至少含有 $n - m + 1 \geq 2$ 个未知数。将除了此行第一个未知数 x_m 外的数全取为 1，代入可知此时必有解，此即为一个所需的非零解。

§1.2　矩阵表示

1. A1 - A4 由各 xx 分量加法运算律知成立；

   M1 - M2 计算分量数乘，由乘法运算律知成立；

   D1 - D2 计算分量情况，由加法乘法分配律知成立。

2. 注意增广矩阵变换后如何对应线性方程组不同的解的情况。

3. 设其为 $ax + by + c = x^2 + y^2$，代入成为线性方程组，解得其为 $x^2 + y^2 - \dfrac{25}{7}x - \dfrac{23}{7}y + \dfrac{18}{7} = 0$。

4. 待定系数解出三点所在平面为 $6x + 3y + 2z - 6 = 0$，任取一过三点的球，由几何可知与平面交线即为此圆，一切这样的球为 $x^2 + y^2 + z^2 - tx - \dfrac{t+4}{2}y - \dfrac{t+9}{3}z + t = 0$，$t$ 为任意实数。

5. 由线性方程组解出一特解 $f_0(x) = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{30}x^3$，若 f_1, f_2 均为解，作差可知 $1, 2, 3, -1, -2, -3$ 均为 $f_1 - f_2$ 的根，故令 $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x+1)(x+2)(x+3)$，则一切满足要求的 f 为 $f_0(x) + h(x)g(x)$，其中 $h(x)$ 为任意多项式。

6. 由线性方程组解出一特解 $f_0(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{8}$，若 f_1, f_2 均为解，作差，由泰勒展开可知 1 与 -1 均为 $f_1 - f_2$ 的至少三重根，故令 $g(x) = (x-1)^3(x+1)^3$，则一切满足要求的 f 为 $f_0(x) + h(x)g(x)$，其中 $h(x)$ 为任意多项式。

7. 矩阵形式变换为 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$，当 $\lambda \neq 0$ 时可变换为 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 4 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$，当 $\lambda \neq \pm 2$ 时，解得 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda + 2}$；当 $\lambda = 2$ 时，解得 $x_1 = c, x_2 = \frac{1}{2} - c, x_3 = c, x_4 = \frac{1}{2} - c$，$c$ 为任意实数；当 $\lambda = -2$ 时无解；当 $\lambda = 0$ 时，解得 $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = 1 - a, x_4 = 1 - b$，$a, b$ 为任意实数。

8. 行初等变换后，增广矩阵可化为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-b \end{pmatrix}$，故有解条件为 $b = 4$，有唯一解条件为 $b = 4$ 且 $a \neq -1$，此时解为 $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1$；当 $a = -1$ 时，解为 $x_1 = t, x_2 = t - 1, x_3 = t, x_4 = 1 - t$，$t$ 为任意实数。

第二章　矩阵运算

§2.1　基本概念

1. 两题均考虑对应分量的值并化简求和即可证明。

2. $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, ABC = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 8 & 7 \\ 8 & 19 & 13 & 8 \\ 8 & 15 & 11 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3. $b_{ij} = \begin{cases} a_{i+j-2}\mathrm{C}_{i+j-2}^{i-1} & i+j \leq n+2 \\ 0 & i+j > n+2 \end{cases}, c_{ij} = \begin{cases} a_{i+j-1} & i+j \leq n+1 \\ 0 & i+j > n+1 \end{cases}$，直接验证可知其对称。

4. (1) 由定理 2.2-5，$B = B^T \Rightarrow ABA^T = (A^T)^T B^T A^T = ABA^T$，因此成立。

   (2) 与上一问类似知 $ABA^T = -ABA^T$，设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$，第 k 个对角元 $\sum_{j=1}^{n} (AB)_{kj}(A^T)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij} \right) a_{kj} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ki}a_{kj}b_{ij}$，由 B 反对称可知其为 0。

5. 设 A 为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$；

   第一个方程为 $\begin{pmatrix} 2ab & bc+ad \\ bc+ad & 2cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，解为 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ m & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$，$m$ 为非零实数；

第二个方程为 $\begin{pmatrix} 0 & bc-ad \\ ad-bc & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，只需 $\det A = 1$ 即可。

6. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) 将 A 看成以 $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ 为转轴的 180° 旋转 (具体变换为三阶列向量 $x \to Ax$)，则自上向下看顺时针 90° 的旋转为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(A^3 = A \Rightarrow (-A)^3 = -A)$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$(将 B 看作置换)

(6) 将 B 看成 $x = y = z$ 为转轴的自上而下顺时针 120° 旋转 (具体变换为三阶列向量 $x \to Bx$)，故作以此为转轴的右手 80° 旋转，由下方算法可得结果。

求正交阵一个方根的一般方法：

步骤 0：预备知识

正交阵即满足 $AA^T = A^TA = I$ 的方阵，均可看作过原点的转轴的旋转。因此，作出对应旋转后便能通过控制角度得到方根。以下讨论均在三阶正交阵 (看成过原点直线为转轴的旋转) 中进行。设此方阵为 M，目标方阵为 X，x, α, β, γ 均为三阶列向量。

步骤 1：确定转轴与角度

转轴即为不动点集，解方程 $Mx = x$，解出的 x 构成一条直线，即所求转轴。

若无法直接看出旋转角度，可任取不在转轴上的一点 α，连接 α 与 $M\alpha$，作垂直平分线，交转轴于 β，这三点构成的等腰三角形顶角即为旋转角度。

一般化地，接下来寻找过直线 a 作角度为 θ 的右手旋转对应的矩阵 X。

步骤 2：正交基的确定

在转轴上取一个单位方向向量 α(事实上可任取 α 再作 $\alpha^* = \dfrac{\alpha}{|\alpha|}$)，作出与 α 垂直的平面 $x\alpha^T = 0$，在平面上任取单位方向向量 β，再待定系数得平面上与 β 垂直，且可由 β 右手旋转 90° 得到的单位向量 γ (若首次求出的 γ 不符合要求，则取 $\gamma^* = -\gamma$)，此时 α, β, γ 构成了三维空间的一组标准正交基，由矩阵乘法的线性性，只需确认三个基的像便可以得到任意点的像，反之，利用这三个基已足以构造方程。

步骤 3：几何得出任意点的像

α 在旋转下的像显然仍为 α，而 β 与 γ 均在与转轴垂直的平面上，故退化为平面旋转的情况，可得出 $X\beta=\cos\theta\beta+\sin\theta\gamma, X\gamma=-\sin\theta\beta+\cos\theta\gamma$，故作出任意点在 α,β,γ 表示下的坐标即可由线性组合得到像，即 $t=\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma\Rightarrow Xt=\lambda_1\alpha+(\lambda_2\cos\theta-\lambda_3\sin\theta)\beta+(\lambda_2\sin\theta+\lambda_3\cos\theta)\gamma$ (事实上，这可以看成把原本的坐标系变换成 α,β,γ 下的新坐标系的过程)。

步骤 4：矩阵的确定

最后，由任意点的像可以确定矩阵。注意到上一部分中 $\lambda_1=\alpha^Tt,\lambda_2=\beta^Tt,\lambda_3=\gamma^Tt$(事实上，这是内积的表示，此处可以看成把新坐标系变换回原本坐标系的过程)，代入可得：

$$X=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^T\\ \beta^T\\ \gamma^T\end{pmatrix}$$

* 对于上方的题目，可解出一组 $\alpha=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$ 取 $\theta=80^\circ$，即可计算出结果。

补充 另一种思路

利用特征值可将正交矩阵利用相似对角化，再求对应对角阵的次方根，亦可得到对应结果 (此方式的合理性将在第六章中解释，主要计算量在于三次方程的求解)。

7. (1) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 阶为 6 循环

(2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 阶为 2 循环

(3) $2^{m/2}\begin{pmatrix}\cos\frac{m\pi}{4} & -\sin\frac{m\pi}{4}\\ \sin\frac{m\pi}{4} & \cos\frac{m\pi}{4}\end{pmatrix}$

(4) $\begin{cases}2^{m/2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} & m\equiv 1 \mod 2\\ 2^{m/2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & m\equiv 0 \mod 2\end{cases}$

(5) $\begin{pmatrix}1 & m & \frac{m(m-1)}{2} & \frac{m(m-1)(m-2)}{6}\\ 0 & 1 & m & \frac{m(m-1)}{2}\\ 0 & 0 & 1 & m\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1 & m & \frac{m(m+1)}{2} & \frac{m(m+1)(m+2)}{6}\\ 0 & 1 & m & \frac{m(m+1)}{2}\\ 0 & 0 & 1 & m\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(7) $A^m=\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right)^m$，因可交换，设其为 $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&a&b&c\\c&d&a&b\\b&c&d&a\end{pmatrix}$，由组合数则

有 $\begin{cases}(1+\mathrm{i})^m=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}\\(1-\mathrm{i})^m=(a-c)+(d-b)\mathrm{i}\\(1+1)^m=a+b+c+d\\(1-1)^m=a-b+c-d\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{(1+\mathrm{i})^m+(1-\mathrm{i})^m+2^m}{4}\\b=\dfrac{(1+\mathrm{i})^m-(1-\mathrm{i})^m+2^m\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}\\c=\dfrac{2^m-(1+\mathrm{i})^m-(1-\mathrm{i})^m}{4}\\d=\dfrac{(1-\mathrm{i})^m-(1+\mathrm{i})^m+2^m\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}\end{cases}$

(8) 原矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3&b_4\end{pmatrix}$，由 $\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3&b_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)$，使用结合律得 $A^m=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^{m-1}A$

8. (出现的字母未作说明即为任意实数)

(1) $\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&d\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&a&b&c\\c&d&a&b\\b&c&d&a\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\c&d&a&b\\g&h&e&f\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\0&a&b&c\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}a&0&0&d\\0&b&2c&0\\0&3c&b&0\\4d&0&0&a\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\h&g&f&e\\d&c&b&a\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\e&f&e&g\\c&b&a&d\\h&i&h&j\end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\\e&f&g&h\\f&e&h&g\end{pmatrix}$

9. (1) 考虑上题 (1)(2) 类似构造知为 aI，I 为单位阵，a 为任意实数 (复数)。

(2) 考虑上题 (1)(3)(8) 类似构造知为 aI，I 为单位阵，a 为任意实数 (复数)。

(3) 二阶时为 $\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$，大于等于三阶时考虑 $a_{ij}=1,a_{ji}=-1$，其余为 0 的矩阵知只能为 aI，I 为单位阵，a 为任意实数 (复数)。

10. (1) 展开可消去交叉项，即得结果。

(2) 直接展开即可。

(3) 利用 (2) 的结论，比较左右 B^n 项的系数即可。

(4) A,B 对称 $\Leftrightarrow(AB)^T=AB\Leftrightarrow B^TA^T=AB\Leftrightarrow BA=AB$。

11. (1) 左：将 a_{11} 至 a_{mn} 按先行后列排序为 a_1 至 a_k，B 同理排序，计算得 $\operatorname{tr}(AA^H)=\sum_{i=1}^k|a_i|^2,\operatorname{tr}(AB^H)=\sum_{i=1}^k a_i\overline{b_i}$，左式 $\geq\sum_{i=1}^k|a_ib_i|\cdot\sum_{i=1}^k|a_ib_i|\geq\left|\operatorname{tr}(AB^H)\operatorname{tr}(BA^H)\right|$，故成立。

右：$AB^H=(BA^H)^H\Rightarrow\operatorname{tr}(AB^H)=\overline{\operatorname{tr}(BA^H)}$ 因此中式 $=\left|\sum_{i=1}^k a_ib_i\right|^2\geq 0$。

(2) 由 $\mathrm{tr}(AA^H)=\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2$ 可发现需 A 所有元素模长为 0，即全部为 0。

(3) 由习题 10 类似，B 视为 A^H，由 (1) 左式的取整条件得结果。

12. (1) 直接计算系数知上三角下部仍为 0。

(2) 由上问知可乘，与可加性结合知成立。

13. (1) 由于 AB 中的每项均为两项乘积的和，按系数展开即得结论。

(2) 未必可交换，$\begin{pmatrix}0 & x^2\\ x & 0\end{pmatrix}$ 即为反例。

14. (1) 验证可发现 $i\neq j$ 时，AA^T 中，第 i 行第 j 列的值为 i,j 两条线交点数，A^TA 中，第 i 行第 j 列的值为 i,j 点所共的线数，由此知式 2.3 成立。(2) 验证知 k_i 为每条线过点数，d_i 为每点属于的线数。

步骤一：证明所有 k_i 相等，记其为 λ。任取两条线 e_1,e_2，分情况讨论：

若存在一个点 v 同时不在 e_1,e_2 上，则对于过 v 的每一条线 e，考虑 e 和 e_1 唯一确定的交点 $\pi(e)$，由唯一确定知此映射为单射。由于每个 e_1 上的点都与 v 确定一条线，此映射为满射。因此，此映射为过 v 的线到 e_1 上的点的双射。由此可类似构造过 v 的线到 e_1 上的点的双射，因此 e_1,e_2 上的点个数相等。

若这样的点不存在，由条件一可知，除 e_1,e_2 的交点外，所有的点可分为在 e_1 上而不在 e_2 上与在 e_2 上而不在 e_1 上两类。取条件三中的四点 a,b,c,d，由条件三知三点不共线，不妨设 a,b 在 e_1 上而不在 e_2 上，c,d 在 e_2 而不在 e_1 上。若 a,c 确定线 x，b,d 确定线 y，若 x,y 的交点在 e_1 上，则由条件一知 a,d 都是它们的交点，因此矛盾；同理可知其交点不在 e_2 上，与不存在同时不在 e_1,e_2 上的点矛盾，由此命题得证。

步骤二：证明所有 d_i 亦均为 λ。若所有线交于一点 v，由条件三取出四个点，由于 ab,bc,cd 交于 v，由条件一知 $b=c=v$，因此矛盾。由此对每一点 v 都存在不过其的线 e，利用映射 π 可构造过 v 的线到 e 上的点的双射，故由每条线上有 λ 个点知过每个点有 λ 条线。

步骤三：利用定理 2.2-6 可得 $m\lambda=\mathrm{tr}(AA^T)=\mathrm{tr}(A^TA)=n\lambda\Rightarrow m=n$。再计算边的条数。$n$ 个顶点两两确定一条边，共 C_n^2 条，而由每条边被算了 C_λ^2 次可知 $\mathrm{C}_n^2=m\mathrm{C}_\lambda^2$，由 $m=n$ 解得 $n=\lambda^2-\lambda+1$。

15. (1) 解法一：归纳。由条件可知 $Q_n=\dfrac{(Q_{n-2}^2-1-Q_{n-3})(Q_{n-2}^2-1+Q_{n-3})}{Q_{n-2}Q_{n-3}^2}$，由 $Q_{n-1}=\dfrac{Q_{n-2}^2-1}{Q_{n-3}}$ 知分母整除 Q_{n-3}^2，由 $Q_{n-4}=\dfrac{Q_{n-3}^2-1}{Q_{n-2}}$ 知分母整除 Q_{n-2}，辗转相减即可证 $\gcd(Q_{n-2},Q_{n-3})=1$，故其为整系数多项式。

解法二：变形递推式可得 $\dfrac{Q_{n+1}+Q_{n-1}}{Q_n}$ 为常值，由此代入前三项知 $Q_{n+1}=xQ_n-Q_{n-1}$，故其为整系数多项式。

(2) 由解法二 $\begin{pmatrix}Q_{n+1}\\ Q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_n\\ Q_{n-1}\end{pmatrix}$，故 $Q_n=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}$。

16. (1) $\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\\ \vdots\\ x_{n-k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_k\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ x_{n-2}\\ \vdots\\ x_{n-k}\end{pmatrix}$

故 $x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{n-k} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$

(2) 令 $x_n = \dfrac{y_n}{z_n}$，有 $\begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$，故设 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$，有 $x_n = \dfrac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$。

17. 将递推写为 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & c_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$，其中 c_{n-1} 由 b_{n-1} 所确定，值为 ± 1。

由 $\begin{pmatrix} b_k & c_{k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k-1} & 1 \\ c_{k-1} & 0 \end{pmatrix}$,

结合 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 可将原通项改写为 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ c_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。

令 $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ c_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n u_n + v_n \\ u_n \end{pmatrix}$，通过分四类归纳可证明，$b_{n-1} = 1 \Rightarrow u_n \geq 1, v_n \geq 1, u_n + v_n \geq n; b_{n-1} > 1 \Rightarrow u_n \geq n, v_n \leq 0, u_n + v_n \geq 1$，故原结论成立。

18. 解法一：可直接归纳证明 $u_n = \sum\limits_{i=0}^{[n/2]} \sum\limits_{j_{k+1} - j_k \geq 2, j_i \leq n-1} a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_i}$，利用对称性推出 $u_n = v_n$。

解法二：

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_{k+1} - u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_k & -a_k \\ a_k & -a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ u_k - u_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{k+1} & v_{k+1} - v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_k & v_k - v_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + a_{n-k} & -a_{n-k} \\ a_{n-k} & -a_{n-k} \end{pmatrix}$$

利用以上两式展开递推可立刻得结果。

解法三：写出 u_n, v_n 以矩阵乘积形式表示的递推公式，可得

$u_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，且有

$v_n^T = v_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

而 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，由此可化为相同。

§2.2　分块矩阵

1. 均直接书写分量验证即可。

2. (1) $X_1 A_1 Y_1 + X_2 A_3 Y_1 + X_1 A_2 Y_2 + X_2 A_4 Y_2$

(2) $\begin{pmatrix} X_1 A_1 Y_1 + X_2 A_2 Y_3 & X_1 A_1 Y_2 + X_2 A_2 Y_4 \\ X_3 A_1 Y_1 + X_4 A_2 Y_3 & X_3 A_1 Y_2 + X_4 A_2 Y_4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} A_1 + X A_3 & A_2 + X A_4 - A_1 X - X A_3 X \\ A_3 & A_4 - A_3 X \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} A_1+XA_3+A_2Y+XA_4Y & A_2+XA_4 \\ A_3+A_4Y & A_4 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{cases} \begin{pmatrix} (XY)^k & O \\ O & (YX)^k \end{pmatrix} & m=2k \\ \begin{pmatrix} O & (XY)^k X \\ (YX)^k Y & O \end{pmatrix} & m=2k+1 \end{cases}$

(6) $\begin{pmatrix} X^m & O \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1} X^k Y X^{m-1-k} & X^m \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^m \otimes X^m$

(8) $\begin{pmatrix} X^m & mX^{m-1} & \mathrm{C}_m^2 X^{m-2} \\ O & X^m & mX^{m-1} \\ O & O & X^m \end{pmatrix} (m \geq 2)$

3. 先设其为 $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}$，每部分为 3 阶方阵，可得其中某些存在 $X_i = AX_jA^{-1}$ 的关系，整理化简后得结果为 $\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ A^{-1}ZA & A^{-1}XA & A^{-1}YA \\ AYA^{-1} & AZA^{-1} & AXA^{-1} \end{pmatrix}$，其中 X, Y, Z 为任意三阶方阵。

4. 观察可得为 $I_m \otimes P_n + P_m \otimes I_n$，其中 I_k 为 k 阶单位阵，P_k 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$(与主对角线相邻的两条对角线为 1，其余为 0 的 k 阶方阵)。

5. 设 G_1 有 m 个顶点，G_2 有 n 个顶点，且排序方式为 $(1,1), \ldots, (1,n), (2,1), \ldots, (m,1), \ldots, (m,n)$，则由定义可发现 $G = I_m \otimes G_2 + G_1 \otimes I_n$，且将结果中所有 2 改为 1。

6. 设 2^n 个点时为 P_n，可递推出 $P_{n+1} = \begin{pmatrix} P_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & P_n \end{pmatrix}$。

7. 按照 B, D 分块，利用分块矩阵乘法知成立。

8. (1) 利用分块矩阵加法知成立。

   (2) 同 (1)。

   (3) 利用分块矩阵转置知成立。

   (4) 计算左式结果后用张量积提出左侧 A 知剩余为 $B \otimes C$。

9. (注意按列与按行展开的区别)

   (1) $y = (I_n \otimes A)x$

(2) $y=(B^T\otimes I_m)x$

(3) $y=(B^T\otimes A)x$

(4) $y=(I_n\otimes A-B^T\otimes I_m)x$

§2.3　初等方阵

1. 直接验证可得结果。

2. 由 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$，$S_{ij}$ 利用 $\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}$
(其余位置取 0) 可以构造。D_{ij} 与单位阵相减为仅有一个对角元的方阵，直接构造。T_{ij} 亦仅剩一个元素，直接构造。

3. $(I+\alpha\beta^T)u=v\Leftrightarrow\alpha(\beta^Tu)=v-u$，$u,v$ 不共线则 $u,v-u$ 不共线。直接取 $\alpha=v-u$，则 α,u 不共线。只需证明存在 β 使得 $\beta^Tu=1,\beta^T\alpha=0$，由不共线，$\beta$ 至少为二阶列向量，由第一章知识得此方程组必有解。

4. (1) 由定义直接计算验证即可。

   (2) 归纳。一阶时显然成立，若 $n-1$ 阶时成立，n 阶时可通过一次交换使第 n 行第 n 列处为 1，由此化为低阶情况。

5. 此题相当于说明置换方阵在左乘时为重排 A 的行，右乘时为重排 A 的列，直接验证可知成立。由习题 4(1)，可发现当 $Q=P^T=P^{-1}$ 时，产生的是对行列一同置换，即为此题最后一行结论。

6. * 需至少为三阶方阵

   通过初等变换可得 $T_{ij}(\lambda)=T_{ik}(\lambda)T_{kj}(1)T_{ik}(-\lambda)T_{kj}(-1)$，任取与 i,j 不同的 k 即可。

7. 可以说明，任意某些 n 阶的 S_{ij} 乘积为 n 阶置换方阵。对 m 使用数学归纳法：

   $m=1$ 时，若全为零则满足，若 $a_{1j}\neq 0,D_1(\dfrac{1}{a_{ij}})AS_{1j}$ 即符合要求。

   若 $m=k$ 时可以满足，当 $m=k+1$ 时，先取变换使得第 1 至 k 行成为满足要求的形状。然后左乘 $T_{k+1,1}(-a_{k+1,1})T_{k+1,1}(-a_{k+1,r})\dots T_{k+1,r}(-a_{k+1,r})$ (也即将第 $k+1$ 行的前 r 列均行变换为 0)，此时若第 $k+1$ 行全为 0 则已经结束，否则设 $a_{k+1,t}\neq 0$ $(t>r)$，

   左乘 $T_{1,r+1}(-a_{1,r+1})T_{2,r+1}(-a_{2,r+1})\dots T_{r,r+1}(-a_{r,r+1})P_{r+1}\left(\dfrac{1}{a_{k+1,t}}\right)S_{r+1,k+1}$，右乘 $S_{r+1,t}$ (也即靠初等变换将第 $r+1$ 行整理为目标形式)，即使得左上角部分变为 I_{r+1}，符合要求。

8. 解法一：此题几乎完全等价于第一章线性方程组的阶梯化。

   解法二：单位下三角初等阵只能为部分 T 阵，且注意到，$S_{ij}T_{ab}(\lambda)=T_{ab}(\lambda)S_{ij}$ $(i,j,a,b$ 互不相同，否则将 a,b 作对应交换仍可找到符合要求的 T^* 使 $ST=T^*S)$，再注意到，T 为下三角意味着左乘 T 使下方的行减去上方行的某个倍数，只要保持这点不变，利用这些 T,S 按一定顺序相乘即可化为满足题目要求的形式。

   自上而下执行操作：

   对第一行不进行操作，接下来，对第 t 行操作时，若 $a_{11},a_{22},a_{rr}\neq 0$ $(r<t),a_{r+1.r+1}=0$ 或不存在，则这次操作中左乘 $S_{t,r+1}T_{tr}(\lambda_r)\dots T_{t2}(\lambda_2)T_{t1}(\lambda_1)$，每个 T_{ti} 使得 a_{ti} 被变换成 0。可以验证，这样的操作符合前述要求，可实现，并能将其变换为上三角阵。

9. (1) 直接验证得结果。

   (2) 由几何关系或直接解方程可得 $\theta_2=\theta_1+\theta_3=\dfrac{\pi}{2}$。

   (3) 考虑单位正交基在列向量下的旋转。几何理解为：先将 e_x 的像通过 z 轴旋转至 xz 平面上，再通过 y 轴旋转至 x 轴上。接着，将 e_y 的像通过 x 轴旋转至 xy 平面上，这个旋转不会改变已在 x 轴上的 e_x 的像，故满足题意。

   由此作以下三步证明：

   步骤一：对任意 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，方程 $(P_3(\theta)A)_{21}=0$ 有解。

   这个方程即为 $\sin\theta a_{11}+\cos\theta a_{21}=0$，讨论易得有解，取解为 θ_3

   步骤二：对任意 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $a_{21}=0$，方程 $(P_2(\theta)A)_{31}=(P_2(\theta)A)_{21}=0$ 有解。

   这个方程组即 $-\sin\theta a_{11}+\cos\theta a_{31}=0$，讨论易得有解，取解为 θ_2

   步骤三：对任意 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $a_{21}=a_{31}=0$，方程 $(P_2(\theta)A)_{31}=(P_1(\theta)A)_{21}=(P_1(\theta)A)_{32}=0$ 有解。

   这个方程组即为 $\sin\theta a_{22}+\cos\theta a_{32}=0$，讨论易得有解，取解为 θ_1。

   经历三步后所得的结果显然满足题目要求。

   (这意味着，除了初等方阵外还有其他的“初等”矩阵可用于消元，6.1 节对此有叙述)

§2.4　可逆方阵

1. 定理 2.6 直接相乘验证即可证明。

   定理 2.7 对相乘后的结果归纳证明。

   定理 2.8 利用例 2.15 与 2.3 节中的定理 2.5 分解即可得出。

2. 均为通过分量计算直接验证即可。

3. 由定理 2.8 可知，乘一个可逆方阵不影响原方阵的可逆性。同时，又因为初等矩阵均可逆，对矩阵做行/列初等变换不会影响可逆性。另一方面，可以证明由一行或一列是 0 的方阵必然不可逆 (因为左乘/右乘必然仍会有一行/列为 0)，因此说明不可逆只需说明可在初等变换后出现某行或某列为 0。

   (1) $\begin{pmatrix}0&0.5&0.5&0\\1&-1&-1&-1\\1&0&-1&0\\0&0.5&0.5&1\end{pmatrix}$

   (2) $\begin{pmatrix}0.5&-0.5&0.5&-0.5\\0.5&0.5&-0.5&0.5\\-0.5&0.5&0.5&-0.5\\0.5&-0.5&0.5&0.5\end{pmatrix}$

   (3) $\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\-1&0&1&0\end{pmatrix}$

   (4) 设矩阵为 A，有 $A^TA=(a^2+b^2+c^2+d^2)I$，故 a,b,c,d 不全为 0 时可逆，$A^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}A^T$ (此题实际为四元数的矩阵表示，转置即为共轭)。

(5) $\begin{pmatrix} 0 & a & e & a \\ -a & 0 & f & e \\ -e & -f & 0 & a \\ -a & -e & -a & 0 \end{pmatrix}$ 其中 $a=-\dfrac{b}{b^2+bd-c^2},e=\dfrac{c}{b^2+bd-c^2},f=-\dfrac{d}{b^2+bd-c^2}$

(6) 见 3.2 中例 3.8 的四阶情况。

(7) 作列变换可使第一列为 0，故不可逆。

(8) 作列变换可使第一列为 0，故不可逆。

4. 不妨设其为上三角矩阵。若对角元全不为 0，可先将每行减去最后一行的倍数消去最后一个分量，再以此归纳，最终变换为对角元非零的对角阵，故可逆。若否，则由抽屉原理必有相邻两行左起的 0 个数相同。找到满足此要求的最低的两行，仍以此操作，将使上面一行均变为 0，即得证不可逆。

(或利用第三章知识直接计算行列式得结果)

5. (1) 与上题相同消元办法，利用增广矩阵求逆可知逆仍为对应三角阵。

(2) 对称阵：$A^T=A\Rightarrow(AA^{-1})^T=(A^{-1})^TA^T=(A^{-1})^TA=I^T=I\Rightarrow(A^{-1})^T=A^{-1}$

反对称阵：$A^T=-A\Rightarrow(AA^{-1})^T=(A^{-1})^TA^T=-(A^{-1})^TA=I^T=I\Rightarrow(A^{-1})^T=-A^{-1}$

(3) 直接将上一问的 T 替换为 H 即可。

6. 直接代入计算可得 (注意两个方阵若都可以写成方阵 A 的多项式，则可以交换)。

7. (1) 注意到 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$，直接验算得结果。

(2) 当：利用第一问结论直接代入验算得结果；

仅当：当 $\lambda=0$ 时，可以利用行变换直接将 B 第二行变换为 0，故不可逆；当 $\lambda=\mu$ 时，由第一问有 $B^2=\mu B$，若 B 可逆，同乘逆得 $B=\mu I$，故 A 为零矩阵，但此时 $\mu=0$，矛盾。

8. 当 $m\neq n$ 时，利用行列变换可将此矩阵中的 A,B 均变换为 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 的形式，但此时由于 $r_A,r_B\leq\min(m,n),r_A+r_B<m+n$，故其中必有全为 0 的行/列，故不可逆；

当 $m=n$ 时，对矩阵作题中相同分块 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$，相乘有 $AA_1=I,AA_2=O,BA_3=O,BA_4=I$ 。由一四两式知 A,B 均可逆时才可能有解，且此时解出 $A_1=A^{-1},A_4=B^{-1},A_2=A_3=O$。

综上可知，M 为可逆方阵当且仅当 $m=n$ 且 A,B 均可逆，$M^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$。

9. 当：利用 2.3 节习题 6 直接代入验证即可；

仅当：若 A 不可逆，则可行列变换使 A 某行为 0，将 B 看作整体对 $A\otimes B$ 作相同变换 (即每次操作从一行/一列变成 B 的行数/列数) 得出某行 0，故其不可逆；若 B 不可逆，则可行列变换使 B 某行为 0，对 $A\otimes B$ 中的一列 B 块作相同变换，可使此行仍为 0，故其不可逆。

10. 当：直接代入验证即可；

仅当：乘以可逆方阵不影响可逆性，故 $A+BC$ 可逆等价于 $I+BCA^{-1}$ 可逆，由 3.2 节例 3.12(取 $x=1$，例中的 A 此处为 $-B$，例中的 B 此处为 CA^{-1})，$\det(I_m+BCA^{-1})=\det(I_n+CA^{-1}B)$，由可逆与行列式不为 0 等价，其可逆即等价于 $I+CA^{-1}B$ 可逆。

(亦可考虑矩阵 $\begin{pmatrix} A & -B \\ C & I \end{pmatrix}$ 对 A 和对 I 的两个 Schur 补)

11. 由 2.1 节习题 15，$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}A^{-1}+A\dfrac{\mathrm{d}(A^{-1})}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}(AA^{-1})}{\mathrm{d}x}=O$，变形得此题结论。

12. 若有非零解 $b_1,b_2\dots b_n$，设 $\max\limits_{1\le i\le n}|b_i|=|b_t|>0$，则 $|a_{tt}b_t|>\sum\limits_{j\ne t}|a_{tj}b_t|\ge\sum\limits_{j\ne t}|a_{tj}b_j|$，故 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_{tk}b_k\right|\ge$ $|a_{tt}b_t|-\left|\sum\limits_{j\ne t}a_{tj}b_j\right|\ge|a_{tt}b_t|-\sum\limits_{j\ne t}|a_{tj}b_j|>0$，矛盾。

13. 可以发现 A 与 A^{-1} 均为主对角线全为 1 的下三角方阵，验证知乘积上半三角 (除主对角线) 均为 0，主对角线均为 1，接下来只需验证 AA^{-1} 的下半三角部分 (即 $i>j$ 时) 符合要求。

此时，乘积的第 i 行第 j 列为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\mu\left(\dfrac{k}{j}\right)a_{ik}a_{kj}$，当 $j\mid i$ 时方可能不为 0。设 $t=\dfrac{i}{j}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$(由其不在主对角线知 n 至少为 1)，则所求即为 $\sum\limits_{d\mid t}\mu(d)=\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=(1-1)^n=0$(其中，$(-1)^r\mathrm{C}_n^r$ 指的是所有含有 r 个不同素因子的 t 的因数的莫比乌斯函数之和)。

14. 首先，我们来复习 2.1 节中关于图的矩阵表示的部分，并加以一定改进：

对于 n 个点构成的有向图 (两点之间可能存在有向的箭头)，我们可以通过一个 n 阶非负方阵来表示它。若 $a_{ij}>0,i\ne j$，则表示存在 i 指向 j 的边，反之则不存在。我们将自己指向自己的边称之为自环，若 $a_{ii}>0$，则代表第 i 个点存在自环，反之则不存在。此外，可验证本题涉及的不可约与本原均与元素大小无关，因此为了方便，可直接将大于 0 的元素记为 1。

(1.1) 本原 $\Rightarrow$ 不可约

线代证法：

只需证明其逆否命题 (可约则不为本原) 即可。对于置换方阵 P，利用 2.3 节习题 4(1) 知 $P^TP=I$。由于 $P^TAP=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$，利用 $P^TP=I$ 可归纳证明 $P^TA^nP=(P^TAP)^n=\begin{pmatrix} A_{11}^n & * \\ O & A_{22}^n \end{pmatrix}$。由于置换方阵只改变元素分布，不改变元素本身，$A^n$ 中必仍存在 0，故不为本原。

图论证法：

首先，观察 P^TAP 与 A 对应的有向图的关系，可发现其实际上相当于行列一同置换，因此只改变了每个顶点对应的编号，没有改变连接的方式。

其次，所谓“可约”，$P^TAP=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$。设 A_{11} 为 s 阶方阵，A_{22} 为 t 阶方阵，则代表着，可以将这个有向图分为两部分，一部分 s 个点，一部分 t 个点，不存在第一部分指向第二部分的边。如果我们把能顺着边前往称为**到达**，则可以有更简洁的说法：从第一部分的某一个点出发，无法到达第二部分的点。

与之相对，如果矩阵不可约，则意味着其对应的图不能分为这样的两部分，这时，从图的任何一个点出发，都可以到达另一个点。我们将这样的有向图称为**强连通图**。由刚才的讨论，一个非负矩阵不可约等价于它所对应的有向图是一个强连通图。

接下来，我们考察对于 m 阶非负方阵 A，A^n 中非零元与零元素的含义。

先考察 A^2，其中第 i 行第 j 列的元素是 $\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}a_{kj}$，只要其中一组 a_{ik},a_{kj} 同时为正，这个元素就为正。为了详细说明这表示什么，我们自然地引入**步**的概念：从一个点到达另一个点，走过的边数就是

步数。特别地，我们规定每个点走 0 步能且只能到达自己。有了步的概念，A^2 中第 i 行第 j 列的元素大于 0，也就是指 i 可以两步到达 j。值得注意的是，可以一步到达时未必可以两步到达。

同理可以归纳证明，A^n 中第 i 行第 j 列的元素非 0，也就是指 i 可以 n 步到达 j。当 $n=0$ 时，幂的结果为单位阵，与规定的 0 步情况相符。

由此，非负矩阵本原，即 A^n 中的元素均大于 0，也就是指存在某个步数使得任两点间都可以通过这个步数到达，此时，当然每个点都可以到达另一个点，即这个图强连通，因此对应矩阵不可约。

接下来两问，我们先给出严谨的代数说明，再以图论作形象的解释性证明。

(1.2) 存在 $\lambda \Rightarrow$ 不可约

仍考虑逆否命题：若 A 可约，则对任何使逆存在的 λ，逆中都含 0。

$P^T(\lambda I-A)P=\lambda I-P^TAP$，由此不妨设 A 已被置换为 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ 的形式。可以发现，这时 $\lambda I-A$ 依然是 $\begin{pmatrix} B_{11} & -A_{12} \\ O & B_{22} \end{pmatrix}$ 的形式。

事实上，与上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵类似，我们可以证明其逆若存在，必为 $\begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & B_{12} \\ O & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}$。

(可采用伴随矩阵讨论，亦可将其逆分块为 $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$，利用左右乘有：$M_1B_{11}=I, B_{22}M_4=I, B_{22}M_3=O$。前两式可得 M_1, M_4 的值，又因 B_{22} 可逆，对应线性方程组只有 0 解，故 M_3 只能为零矩阵。)

由此，无论 λ 如何取值，只要逆存在，逆中必含有 0。

(1.3) 不可约 $\Rightarrow$ 存在 λ

先引入矩阵列收敛的定义：如果一个矩阵列的每一个分量都收敛，则其收敛。

定义 $\max M$ 为矩阵 M 元素绝对值的最大值，容易看出，$\lim\limits_{n\to\infty}\max(A_n-B)=0$ 即是 A_n 收敛于 B 的等价表述。

由乘法定义可以推出，A, B 均为 m 阶方阵时，$\max AB \le m\max A\max B$，因此归纳得 $\max(A^n) \le m^{n-1}(\max A)^n$。

由此可以证明，取 $\lambda > 2m\cdot\max A$ 时，$I+\dfrac{A}{\lambda}+\left(\dfrac{A}{\lambda}\right)^2+\dots$ 收敛于 $\lambda(\lambda I-A)^{-1}$ (由于每个分量均单调有界)。

下面即证明，此时目标矩阵 $B=(\lambda I-A)^{-1}$ 没有 0 项。我们从反面说明，若有零项，则矩阵可约。

若此矩阵有零项，其必在一切 A^n 中均为 0。在置换矩阵调换后，不妨设左下角的 b_{m1} 为 0。此时，若其所在的行或列恒全为 0，则已满足可约，若否，用置换矩阵调换后可不妨设 b_{11} 与 b_{mm} 不为 0，且第 n 行的 0 集中在前侧，后方均正。设 $b_{m1}, b_{m2}\dots b_{mu}$ 为 0，后方均为正，则可以证明 $b_{u+1,1}, b_{u+2,1}\dots b_{m1}$ 均为 0。此时，对 A 作幂次时，第 m 行与第 1 列的 0 均不会再增加。

因此，我们现在得到的置换后的矩阵 A 的左下角 $(a_{ts}, t>u, s\le u)$ 子矩阵中，最左边一行与最下方一列已经全为 0 了，下面只要证明剩余元素均为 0 即可得到可分的结论。

若此子矩阵中的某元素 $a_{ts}>0$，则由于 $t>u$，有 $a_{nt}a_{ts}>0$，因此 A^2 中第 n 行第 s 列的元素不为 0，因此 $b_{ns}>0$，但 $s\le u$，与假设矛盾。

(我们实质上说明了比题设更强的结论，即，对充分大的 λ，$(\lambda I-A)^{-1}$ 全为正数。)

(1.4) 1.2 与 1.3 的图论证明

以上的代数证明较为繁琐。下面给出图论的理解。

首先，A 不可约 $\Leftrightarrow$ 有向图强连通 $\Leftrightarrow$ 等价于任意两点 s,t 可通过某步数达到 $\Leftrightarrow \forall 1\le s,t\le m, \exists n\ge 0, A_{st}^n>0$ (此处暗含结论，m 个点组成的有限图，任意两点若可达到，必可通过有限步达到。事实上，归纳容易证明步数不可能超过 $m-1$。)

接下来，仿照 1.3 中矩阵极限相关的构造即可得出 1.2 与 1.3 的结论 (乘正数 λ 不会影响元素的非零性)。

(2) 代数证明：

用第二数学归纳法：当矩阵阶数 $m=1$ 时显然满足。若 k 阶前均满足。考虑 k 阶时：

如果 A 不可约，A 本身即满足。

如果 A 可约，$P^TAP=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ O & A_{22}\end{pmatrix}$，其中 A_{11},A_{22} 阶数均小于 k。由归纳假设，A_{11},A_{22} 可用置换矩阵调整为符合要求的矩阵形式 (注意分别调整时不会影响到)，容易发现此时 A 已经变成了符合要求的形式。

图论证明：

这个结论也就是说，对一个有向图，总可以将其中的点划分为若干个组，并编号为 $1,2,3\ldots s$ 使得：

第一，每个组里的点可以互相到达，也即构成一个强连通子图。

第二，每个组无法到达编号小于它的组 (至于能否到达大于它的组，这里并不关心)。

这两条中，第一条也就代表着每个对角块均不可约，第二条也就代表着下半三角的部分均为 0。

想要证明这个结论，可以分为两步。

第一步，选出一个点，将所有与它能**相互**到达的点 (含本身) 编为一组 (注意这里的相互，指的是它能到达另一个点，另一个点也能到达它；能这样分组其实暗含了结论：相互到达是一个等价关系，如果两个点均与它可以相互到达，这两个点之间也可以相互到达)。若已不存在其他点则停止，若存在，则从中任取一个点，重复操作，直到每个点均属于某一组。

在这一步完成后，我们已经获得了若干个强连通的分组，接下来，我们调整分组的序号。

由于不可能有两个分组之间可以相互到达 (否则在分组时它们应该在同一组中)，分组之间的到达实际上构成了一个序关系。

首先论证，这个序关系的意义下存在一个极小元，也就是，存在一个组无法到达任何其他组。

如果不存在，我们从某个组出发，找到它能到达的另一个组，再找到另一个组能到达的一个组，以此重复进行。由于每个组均有能到达的其他组，这个过程会无限进行下去，但组的个数是有限的，这意味着，其中必然会有某个组出现两次。但是，假如存在这样的链条：$A\to B\to C\to\cdots\to A$，可以发现，$A$ 可以顺着链条前往 B，B 也可以顺着链条前往 A，因此，AB 之间是可以相互到达的，与不同组之间不能相互到达矛盾。

由此，我们证明了存在无法到达其他组的组。将这个组编号为 s(最后一组)，从图中删去。剩下的组中，必然又存在无法到达其他组的组，将它编号为 $s-1$。重复这个过程，直到所有组均被编号，则此时，我们已经获得了一个满足要求的分组，由此，原结论得证。

(可以发现，这一问的代数证明反而相较图论证明更为简洁，而图论证明有着非常明显的操作性。因此，不同工具间的综合是重要的。)

我们将一条从自己出发到自己的路径称为一个**环**，而某个路径的步数称为这条路径的**长度** (由此，我们也定义了环的长度)。

在第一问中已经证明了，若一个矩阵本原，则其必然不可约。而接下来则说明，一个不可约矩阵为本原矩阵，等价于这个矩阵对应的有向图中所有环的长度的最大公因数为 1。(若两个点可以互相到达，则必然存在过这两个点的环，也即先从第一个点走到第二个点，再走回第一个点。由此，强连通图中一定存在环，故这个最大公因数是存在的。)

在详细证明前，我们先来具体观察一下这个结论。

所有环其实是一个有些奇怪的概念。例如，当一个图中有自环，其中便含有任意长度的环，最大公因数当然是 1。由此即得，只要一个不可约矩阵对应的有向图存在自环 (对角元素不全为 0)，便一定本原。

此外，我们还可以发现另一个结论，这个结论也是证明的关键：

如果一个不可约矩阵不是本原阵，且其对应的有向图中所有环长度的最大公因数是 d，则有，任取两点 i 和 j，从 i 到 j 的所有可能的路径长度一定模 d 同余。

这个结论的证明如下：

如果 i 到 j 有两条长度为 k_1 与 k_2 的路径，那么任取一条 j 到 i 的路径 (由不可约，这样的路径存在)，设其长度为 k，则从 i 到 i 有两个长度分别为 k_1+k 与 k_2+k 的环。由所有环长度的最大公因数为 d，k_1+k, k_2+k 必然都是 d 的倍数，所以 k_1, k_2 模 d 同余。现在，我们采取图论方式来证明原本的命题，以下设 A 为不可约且非本原的 m 阶矩阵，且已经作出了对应的有向图。

步骤一：若 ab 互素，$n > ab-a-b$，则存在非负整数 x, y 使得 $ax+by=n$。

由裴蜀定理，当 $0 \le x \le b-1$ 时，必存在 y 的整数解，若这个解不为非负整数，则 $y \le -1$，此时 $ax+by \le a(b-1)+b(-1) = ab-a-b < n$ 矛盾，故解必存在。

步骤二：此有向图中任意两个环长度不互素。

若否，不妨设存在一个过点 i 的长度为 a 的环，过点 j 的长度为 b 的环，a, b 互素。

对任意两点 s, t，设 $s \to i \to j \to t$ 的某条路径长度为 m_{st}，由于存在 $s \to i \to i \to \dots i \to j \to j \to \dots j \to t$ 的路径，s 到 t 的路径长度可以是 $ax+by+m_{st}$，其中 x, y 为非负整数。这时，取 M 为所有 m_{st} 的最大值，$n > M+ab-a-b$，可知对于任两点都可以解出合理的 x, y，即任两点都存在长度为 n 的路径，故 A 为本原矩阵，矛盾。

步骤三：若正整数 $a_1, \dots, a_n$ 有 $\gcd(a_1, \dots, a_n) = 1$，对任何正整数 l，存在非负整数 $b_1, \dots, b_{n-1}$，使得 $a_1b_1 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nl$ 与 a_n 互素。

由裴蜀定理可证若 $\gcd(a_1, \dots, a_n) = 1$,则必存在 $b_1, \dots, b_{n-1}$ 使 $\gcd(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_{n-1}b_{n-1}, a_n) = 1$，又因为在左侧增加 a_ia_n 与 la_n 均不影响互素，可使得所有 b 为非负，并添加 a_nl 项，即得满足条件结论。

步骤四：此有向图中所有环长度最大公因数为 d, 则 $d > 1$。

取一个经过所有点 (未必不重复，但不能遗漏) 的环，由已证，这个环的长度与任何其他环都不互素。而且，设这个环长度为 l，某个环长度为 t，将另一个环添加进这个环中即可得到长度为 $l+t$ 的环 (此处添加，是指将原来环中的某个 i 拆分成 $i \to i$)。因此，若某些环的长度 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 互素，由上一部分证明构造 $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nl$，这个长度的环必然存在 ($a_nl$ 由 l 添加自身获得)，即与 a_n 互素，与任两环不互素矛盾。由此，所有环长度均不互素，则存在最大公因数 $d > 1$。

步骤五：任取两点 i 和 j，从 i 到 j 的所有可能的路径长度一定模 d 同余。

这个结论的证明在之前讨论时已经完成。

步骤六：存在满足题目条件的置换。

任取一个点为 1，对所有点，可以按照前往 1 的路径长度模 d 的余数分为 $0,1,2,\ldots,d-1$ 共 d 类 (特别地，由已证，1 自身属于 0 这类)。利用置换矩阵将这些点的排列变为 $0,1,2,\ldots,d-1$ 的顺序。此时，每一类的点在一步后必然进入下一类 (最后一类将进入第一类)，即满足题目中所述的要求。

第三章　行列式

§3.1　行列式的定义

1. (1) 由每项都是线性，和仍然保持线性。

   (2) 由一次对换可使逆序数奇偶性改变得结论。

   (3) 直接代入验证即可，此时完全展开式中仅有一项。

2. (1) 21 (2) 28 (3) 18 (4) 12
   (5) $\dfrac{(k-1)k}{2}$ (6) $\dfrac{k(k+1)}{2}$ (7) $(k-1)k$ (8) k^2

3. $\det(S_{ij})=-1,\det(D_i(\lambda))=\lambda,\det(T_{ij}(\lambda))=1$(这也意味着三种操作后行列式值改变对应倍数)

4. 由 2.1 节习题 14 知其仍为三角方阵，归纳可得对角元素为 $f(a_{ii})$，结合三角方阵行列式完全展开仅一项得结果。

5. (1) 2 (2) 2 (3) 1

   (4) $(be-cd-af)^2$

   (5) $a^2f^2+b^2e^2+c^2d^2-2abef-2acdf-2bcde$

   (6) $a(b-a)(c-b)(d-c)$

   (7) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

   (8) 由循环方阵行列式 (3.2 节例 3.10) 知为 $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}(a+bi^k+ci^{2k}+di^{3k})$，化简有

   $\big((a+c)^2-(b+d)^2\big)\big((a-c)^2+(b-d)^2\big)$

   (9) 由范德蒙德行列式 (3.2 节例 3.8) 知为 $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

   (10) 在其上增添 $1,-1,-1,-1,-1$，左侧增添一列 0，利用行变换行列式不变得

   $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&-1\\1&a&a^2&a^3&a^4\\1&b&b^2&b^3&b^4\\1&c&c^2&c^3&c^4\\1&d&d^2&d^3&d^4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&a&a^2&a^3&a^4\\1&b&b^2&b^3&b^4\\1&c&c^2&c^3&c^4\\1&d&d^2&d^3&d^4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&a&a^2&a^3&a^4\\1&b&b^2&b^3&b^4\\1&c&c^2&c^3&c^4\\1&d&d^2&d^3&d^4\end{pmatrix}$ 由于三个矩阵只相差第一行，由行列式线性性知可加减，利用范德蒙德行列式计算结果为

   $\big(2abcd-(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\big)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$。

   (11)(12) 均可列变换为 0

   (13) 在列变换后知为 (9) 结果的 108 倍

   (14) 行变换得 $\begin{pmatrix}0&1&2&\cdots&n-1\\1&-1&-1&\ddots&\vdots\\1&1&-1&\ddots&-1\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&-1\\1&\cdots&1&1&-1\end{pmatrix}$，继续变换得 $\begin{pmatrix}0&1&2&\cdots&n-1\\1&0&0&\ddots&\vdots\\1&2&0&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\1&\cdots&2&2&0\end{pmatrix}$，故结果为

$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$

(15) 可以通过变换直接计算，或观察到此矩阵为 $xI_n - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$，则可利用 3.2 节例 3.12 得到行列式为 $x^{n-2}\det\left(xI_2 - \begin{pmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2} & -n \\ \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} & -\dfrac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}\right)$，结果为 $x^n + \dfrac{n^4-n^2}{12}x^{n-2}$

(16) $(-1)^{\prod_{1\le i<j\le p} r_i r_j}\prod_{i=1}^{p} a_i^{r_i}$ (-1 的指数即为逆序对的个数)

§3.2 Binet-Cauchy 公式

1. $\overline{\det(M)} = \det(M^H) \Rightarrow \det(M)\det(M^H) \ge 0$，由此将 $\det(AA^H)$ 分解为 C_n^m 个方阵行列式乘积之和，每项均不小于 0，和亦不小于 0。

2. 使用两次 Binet-Cauchy 公式即可 (第一次将 BC 看作整体)。

3. (1) 首先归纳证明 $\cos n\theta$ 可以写成 $\cos\theta$ 的 n 次多项式，且首项系数为 2^{n-1}：采用跨度为 2 的第二数学归纳法，由于 $\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$，可以得出结论。因此，原行列式通过列变换可变为范德蒙德行列式乘系数的形式，结果为 $2^{(n-2)(n-1)/2}\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j - \cos\theta_i)$

   (2) 每行同乘对应 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 后三角变换，可知原行列式化简为下一问结果的 $\dfrac{1}{2^n\prod_{i=1}^n \sin\frac{\theta_i}{2}}$ 倍，化简为 $2^{(n-1)n/2}\prod_{i=1}^{n}\cos\dfrac{\theta_i}{2}\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j - \cos\theta_i)$

   (3) 与 (1) 类似可证明，$\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ 可以写成有关 $\cos\theta$ 的 $n-1$ 次多项式，且首项系数为 2^{n-1} 故提取后可知结果为 $2^{(n-1)n/2}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j - \cos\theta_i)$

   (4) 每行提取出 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 后利用 $\dfrac{\sin\frac{2n-1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2\cos k\theta$ 与列变换共同化简，可得结果为 $2^{(n-1)n/2}\prod_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\theta_i}{2}\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j - \cos\theta_i)$

   (5) 直接代入循环阵 (例 3.10) 公式即可。

   (6) 其可以看作范德蒙德矩阵与其转置之积，结果为 $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)^2$

   (7) 原方阵 $C = f(Z), f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i, Z = \begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ -1 & O \end{pmatrix}$，有 $Z^n = -I$。令 $\Omega = \left(\omega^{(i-1)(2j-1)}\right)$ (ω 为 $2n$ 次单位根)，则 $Z\Omega = \Omega\,\mathrm{diag}(f(\omega), f(\omega^3), \dots, f(\omega^{2n+1}))$，值为 $\prod_{k=1}^{n} f(\omega^{2k-1})$

   (8) 将组合数写为阶乘从行列中分别提取出 $\dfrac{\prod_{i=1}^n (p+i)!}{\prod_{i=1}^n (q+i)!}$，则剩余为 $\left(\dfrac{1}{(p-q+i-j)!}\right)$，从每行中同除以第一列，提取出 $\dfrac{1}{\prod_{i=0}^{n-1}(p-q+i)!}$，其余通过类似多项式的列变换方式，可化为 $(p+q+i-1)^{j-1}$，由范德蒙德行列式得值为 $\prod_{i=0}^{n-1} i!$，故最终为 $\prod_{i=1}^{n}\dfrac{(i-1)!\,(p+i)}{(p-q+i-1)!\,(q+i)!}$

4. 此矩阵 $A=\lambda I+2K+2\alpha\alpha^T$，其中 $\lambda=(1-a^2-b^2-c^2), K=\begin{pmatrix}0 & c & -b\\ -c & 0 & a\\ b & -a & 0\end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$。由于 $K\alpha=O$，有 $A=(\lambda I+2K)(I+2\lambda^{-1}\alpha\alpha^T)$，计算即可。

5. $\Omega\Omega^T$ 可以写成习题 3(6) 的形式，题中 $x_i=\omega^i$。直接计算可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega^{kc}$ 在 $n\mid c$ 时为 n，否则为 0，故此式即 $\begin{pmatrix}n & & & \\ & & & n\\ & & \iddots & \\ & n & & \end{pmatrix}$。因此 $\det\Omega\det\Omega^T=\det\Omega^2=(-1)^{(n-2)(n-1)/2}n^n$，由此知 $|\Omega|=n^{n/2}$，接下来确定辐角。三角变换得 $\omega^a-\omega^b$ 辐角为 $\dfrac{2a+2b+n}{2n}\pi\,(a\neq b)$，计算知辐角为 $\sum\limits_{0\le a<b\le n-1}\dfrac{2a+2b+n}{2n}\pi=\dfrac{(3n-2)(n-1)}{4}\pi$

6. (1) 原式为 $I_n+\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$，由例 3.12 知 $\det A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i+1$，对应代数余子式 $A_{ii}=\sum\limits_{k\neq i}a_kb_k+1$，$A_{ij}(i\neq j)$ 可以直接由初等变换消元，得 $A_{ij}=-a_{ji}$，由此写出伴随方阵即知逆。

(2) 原式为 $I_n+\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ b_1 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$，由例 3.12 知 $\det A=\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)-n\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$，对应代数余子式 $A_{ii}=\left(1+\sum\limits_{k\neq i}a_k\right)\left(1+\sum\limits_{k\neq i}b_k\right)-(n-1)\sum\limits_{k\neq i}a_kb_k$，$A_{ij}\,(i\neq j)$ 可以直接由初等变换消元。以计算 A_{12} 为例，变换得 $A_{12}=-\begin{vmatrix}a_2+b_1 & b_3-b_1 & \cdots & b_n-b_1\\ a_3+b_1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n+b_1 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$，写出完全展开式可知其为 $-(a_2+b_1)+\sum\limits_{k\neq 1,2}(b_k-b_1)(a_k+b_1)$ 类似得 $A_{ij}=-(a_j+b_i)+\sum\limits_{k\neq i,j}(b_k-b_i)(a_k+b_i)$，由此写出伴随方阵即知逆。

7. (1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

8. (1) 左 $=\det\begin{pmatrix}A+B & B\\ B+A & A\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A+B & B\\ 0 & A-B\end{pmatrix}=\det(A+B)\det(A-B)$

(2) 左 $=\det\begin{pmatrix}A+\mathrm{i}B & B\\ \mathrm{i}A-B & A\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A+\mathrm{i}B & B\\ 0 & A-\mathrm{i}B\end{pmatrix}=\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)$

9. 当 n 为奇数时，$A^T=-A, \det A^T=(-1)^n\det A$，又因其相等，故 $\det A=0$。

当 n 为偶数时，利用二重归纳，$n=2$ 验证即可。若 $n=2k-2$ 时满足，将 $2k$ 阶反对称行列式的每列减去第二列的倍数，消去 $a_{1i}(i\geq 3)$，再用每行减去第二行的倍数，消去 $a_{i1}(i\geq 3)$，此时行列式变为

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2,2k} \\ 0 & -a_{23} & c_{11} & \cdots & c_{1,2k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{2,2k} & c_{2k-2,1} & \cdots & c_{2k-2,2k-2} \end{vmatrix}$$，记 $C=(c_{ij})$，由 Laplace 展开知此行列式为 $a_{12}^2\det(C)$。可直接计算得 $c_{ij}+c_{ji}=0$，故 C 为 $2k-2$ 阶反对称阵，由归纳假设可知结论。

10. V 可以列变换为 $\left((j-1)!\mathrm{C}_{a_i}^{j-1}\right)$，因此 $\det V=\det U\det\left(\mathrm{C}_{a_i}^{j-1}\right)$，由此知整除。

11. 更换集合顺序可以视为 QAQ^{-1}，其中 Q 为置换阵，不影响行列式，因此不妨设其子集以字典序排列。设 n 元时对应矩阵为 M_n，$M_1=(1)$，通过分析可以得到 $M_{n+1}=\begin{pmatrix} M_n & 0_{(2^n-1)\times 1} & M_n \\ 0_{1\times(2^n-1)} & 1 & 1 \\ M_n & 1 & 1 \end{pmatrix}$，1 代表此块全为 1。由列变换得
$$\det M_{n+1}=\det\begin{pmatrix} M_n & 0 & M_n \\ 0 & 1 & 1 \\ M_n & 0 & 0 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} M_n & 0 & M_n \\ 0 & 1 & 0 \\ M_n & 0 & 0 \end{pmatrix}=(-1)^{2^n-1}\det\begin{pmatrix} M_n & 0 & M_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & M_n \end{pmatrix}=-\det M_n^2$$
归纳即得要证的结论。

12. (1) 直接计算 $\begin{pmatrix} f_1(y) & \cdots & f_n(y) \end{pmatrix}V$ 的第 k 个分量为 $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^{k-1}\prod_{j\neq i}\frac{y-x_j}{x_i-x_j}$，其为关于 y 的不超过 $n-1$ 次的多项式，且注意到，$y=x_t$ 时其值为 x_t^{k-1}(求和中只有 $i=t$ 这项不为 0)，其已经被 n 个不同点处的值唯一确定 (类似 1.2 节习题 5)，而 y^{k-1} 满足要求，因此其只能为 y^{k-1}。

(2) 直接计算 $\begin{pmatrix} g_1(y) & \cdots & g_n(y) \end{pmatrix}V$ 的第 k 个分量为 $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^{k-1}\prod_{j\neq i}\frac{1-x_jy}{x_i-x_j}$，其为关于 y 的不超过 $n-1$ 次的多项式，分类讨论。当 x_t 中不含有 0 时，$y=\dfrac{1}{x_t}$ 时其值为 $\dfrac{x_t^{k-1}}{x_t^{n-1}}$(求和中只有 $i=t$ 这项不为 0)，其已经被 n 个不同点处的值唯一确定 (类似 1.2 节习题 5)，而 y^{n-k} 满足要求，因此其只能为 y^{n-k}。若有某个 $x_i=0$，可考虑取极限逼近 0 或额外计算发现 $y=0$ 时其余分量为 0，最后一个分量为 1。

(3) 直接代入可发现第一个等号成立。设 $A=(x_i^{n-j})$，由 (2) 分每行考虑可知 $(g_j(x_i))=AV^{-1}$，由 $A=V\begin{pmatrix} & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，由 2.1 节定理 2.2-6 知 $\operatorname{tr}=(g_j(x_i))=\operatorname{tr}(AV^{-1})=\operatorname{tr}(V^{-1}A)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，因此 n 为奇数时为 1，为偶数时为 0。

(4) 类似 (3)，原式 $=(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(f_j(-x_i))$，类似构造 A 知 $(f_j(-x_i))=V\operatorname{diag}(1,-1,1,-1,\dots)V^{-1}$，由此原式 $=(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(\operatorname{diag}(1,-1,1,-1,\dots))$，因此 n 为奇数时为 1，为偶数时为 0。

13. * 题目结论有误，第一问中 u,v 与 m,n 应对调

(1) 法一：由行变换可不妨设 $f_m=g_n=1$，此时 $f(x)=\displaystyle\prod_{i=1}^m(x-u_i)$ 所求式右边即为 $\displaystyle\prod_{i=1}^n f(v_i)$。记 $S(f,g)$ 为所求行列式值。

当 g 为一次函数时时，由 Laplace 展开类似 3.3 节例 3.15 知 $S(f,g)=f(-g_0)$。当 $g(x)=\displaystyle\prod_{i=1}^n(x-v_i)$ 时若成立，当 $g(x)=(x-t)\displaystyle\prod_{i=1}^n(x-v_i)$ 时：

若 $t=0$，则 $g_0=0$，第一列只有 f_0 一项，展开后直接得 $S(f,xg)=f_0\cdot S(f,g)$，满足要求；

若 $t\neq 0$，由对称，不妨设 f 次数小于等于 g，行变换可得 $S(f,g)=S(f,g-af)$，若 $f_0=0$，与上方情况类似可展开化为低阶的情况，若 $f_0\neq 0$，$S(f,g)=S\left(f,g-\dfrac{g_0}{f_0}f\right)$，即化为之前情况，因此 $S(f,g)=\prod\limits_{i=1}^{m}f(c_i)$，$c_i$ 为 $g-\dfrac{g_0}{f_0}f$ 的 m 个根 (包括 0)。

至此只需证明，所求的 $\det S$ 表达式的等号右侧亦满足 f 次数小于等于 g 时 $S(f,g)=S(f,g-af)$，由于其可表示成 $(-1)^{mn}\prod\limits_{i=1}^{m}g(u_i)$，而 $f(u_i)=0$，故结论成立。

法二：考虑结式矩阵乘 $\begin{pmatrix}1\\x\\\vdots\\x^{m+n}\end{pmatrix}$ 后的结果，构造 $\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&\cdots&1\\u_1&\cdots&u_m&v_1&\cdots&v_n\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\u_1^{m+n}&\cdots&u_m^{m+n}&v_1^{m+n}&\cdots&v_n^{m+n}\end{pmatrix}$ 与原矩阵相乘 (此处假设根均不同，若相同通过极限等处理)，利用乘积结果可直接计算出行列式值。

(2) 由 (1)，两复多项式互素等价于无公共根，故结论成立。

14. (1) $b_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{\min(n-i+1,j)}(f_{k+i-1}g_{j-k}-g_{k+i-1}f_{j-k})$，直接对比系数可知结论成立。

(2) $\begin{pmatrix}f_n&&\\\vdots&\ddots&\\f_1&\cdots&f_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_n&&\\\vdots&\ddots&\\g_1&\cdots&g_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_n&&\\\vdots&\ddots&\\g_1&\cdots&g_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_n&&\\\vdots&\ddots&\\f_1&\cdots&f_n\end{pmatrix}=\left(\sum\limits_{k=1}^{i-j+1}f_kg_{i-j+2-k}\right)$。所求式的右侧前后 n 行对换 (提出负号) 为 $(-1)^{(n-1)n/2}\begin{vmatrix}f_n&&&f_0&\cdots&f_{n-1}\\\vdots&\ddots&&&\ddots&\vdots\\f_1&\cdots&f_n&&&f_0\\g_n&&&g_0&\cdots&g_{n-1}\\\vdots&\ddots&&&\ddots&\vdots\\g_1&\cdots&g_n&&&g_0\end{vmatrix}$，由 3.2 节例 3.11 得此式可以进一步化简为

$(-1)^{(n-1)n/2}\det\left(\begin{pmatrix}f_n&&\\\vdots&\ddots&\\f_1&\cdots&f_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_0&\cdots&g_{n-1}\\&\ddots&\vdots\\&&g_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}g_n&&\\\vdots&\ddots&\\g_1&\cdots&g_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0&\cdots&f_{n-1}\\&\ddots&\vdots\\&&f_0\end{pmatrix}\right)$，再用每组乘积中的第一个式子作行变换知其即为 $\det B$。

(3) 由习题 13(2) 知结论成立。

§3.3 Laplace 展开

1. 均记 n 阶行列式为 M_n，若过程中给出现 M_0 则由通项式代入 0 得出。

(1) 由习题 2 知 $M_n=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\1&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，类似例 3.16 知 $A_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}M_{j-1}M_{n-i}&i>j\\M_{i-1}M_{n-j}&i\leq j\end{cases}$

(2) 每行减去后一行后归纳知 $M_{n+1}=(x+1)M_n-(x-1)^n$，可得 $M_n=\dfrac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2}$，利用行列变换进一步计算得 $A_{ij}=\begin{cases}-(x+1)^{i-j-1}(1-x)^{n+j-i-1}&i>j\\M_{n-1}&i=j\\(x+1)^{j-i-1}(x-1)^{n+i-j-1}&i<j\end{cases}$

(3) 利用习题 2，进一步计算得 $M_n=nx-n+1$，$A_{ij}=\begin{cases} iM_{n-j} & i\le j \\ jM_{n-i} & i>j \end{cases}$

(4) 变换知 $M_n=1$，其逆矩阵恰为上一问中取 $x=1$ 的 n 阶矩阵。

(5) 类似 3.1 节习题 5(6) 得 $M_n=(-1)^{n-1}n$，n 较小时直接计算。当 $n\ge 3$ 时，类似行列式做法得

$$A_{ij}=\begin{cases} (-1)^n n & i=j=1 \\ (-1)^n 2n & 1<i=j<n \\ (-1)^n(n-1) & i=j=n \\ (-1)^{n+i}n & j=i+1 \\ (-1)^{n+j}n & j=i-1 \\ 0 & |i-j|\ge 2 \end{cases}$$

(6) 由 3.2 节例 3.9 直接得结果。

2. (1) 归纳，低阶直接验证知成立，至少三阶时令 $M=\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -c_2 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -c_{n-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，则原行列式由第一行展开为 $a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -c_1 & 0 \end{pmatrix}M-b_1c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}M=\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1c_1 & a_1b_2 \end{pmatrix}M$，即为此题结论。

(2) 与 (1) 类似，从最后一行展开即可。

3. (1) $左=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}A^*\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}A^*\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)=\det(A)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=右$

(2) $左=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}A^*\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}A^*\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\det(A)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}I\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=右$

4. (1) 此处证明 $A_{1i}=A_{1j}$，其余列类似。设去掉第一行后，A 的 n 个 $n-1$ 维列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$，则交换行列可知 $(-1)^{i-j}(A_{1i}-A_{1j})$

$=\det(\alpha_j,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\dots)+\det(\alpha_i,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\dots)$

$=\det(\alpha_i+\alpha_j,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\dots)$，将所有列加到第一列即知此式为 0。

(2) 由 (1) 可知 A^* 所有元素均相等。$A+\dfrac{1}{n^2}J$ 所有行加到第一行，接着所有列加到第一列，进一步变换可得 $\lambda=A_{11}$，原命题得证。

(3) 直接由 (2) 知左为 $\det\left(nI_n-\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)J\right)J$，类似 3.2 节习题 5(1) 可计算出结果成立。

5. 直接由完全展开式求导知结果，或将第 i 行看作 x_i 的函数，求出 n 个偏导，再使每个 $x_i=x$，用偏导复合得到对 x 的导数。

6. (1) 设 A,B 的列向量分别为 a_i,b_i，则 $\det(a_1+b_1,a_2+b_2\dots a_n+b_n)=\sum\det(e_1,e_2\dots e_n)$，其中每个 e 独立取遍 a 和 b (即共 2^n 个式子)，但一旦出现两个 b，列变换得行列式为 0，因此结果为不出现 b 的 $\det(A)$ 与 b 出现一次的 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j$ 之和，即为原式。

(2) 先对最后一行展开，再将每个与 y_i 相乘的代数余子式按最后一行展开即可。

7. 特殊做法：当题中涉及矩阵可逆时易得结果，由此将题中涉及的矩阵中的元素看为独立变量所构成的多项式，则在有理函数的意义下必然可逆，得出结果后再代入值即可。

   标准做法：这四问在对应方阵可逆时均容易得到，因此此处只证明不可逆时情况。

   (1) 法一：构造多项式矩阵 $A(x)=xI+A, B(x)=xI+B$，由于其首项系数为 1，在有理函数意义下可逆，$\big(A(x)B(x)\big)^*=B(x)^*A(x)^*$，再代入 $x=0$ 即可。

   法二：将初等方阵拓展 $D_i(0)$(将第 i 行/列乘 0)，则所有矩阵可写为初等方阵之积，直接计算证明一边是初等方阵的情况，即可归纳说明。

   (2)(3) 直接计算即可。

   (4) 利用 (1)，将 A 写为 $P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$ (PQ 可逆) 后直接计算。

8. (1) 每次将 m 行 (列) 看作整体进行行列变换将 A 变换为对角元 $a_1\dots a_m$ 的上三角矩阵，则 $\det(A\otimes B)=\det(a_1B)\dots\det(a_mB)=a_1^n\dots a_m^n\big(\det(B)\big)^m=\big(\det(A)\big)^n\big(\det(B)\big)^m$

   (2) 当 AB 均可逆时由 2.4 节习题 9 直接得，若有不可逆 (且阶数高于 1) 行列变换可直接将子式变换为 0，故得证。

9. 设 A 主对角线依次为 $a_1,a_2\dots a_n$，另三个上三角类似假设。使用归纳法，一阶时直接计算。高阶时，利用推广 Laplace 展开 (定理 3.10) 从第 $1,n+1$ 行展开可提取出 $(a_1d_1-b_1c_1)$ 并化为低一阶的情况，由此可知结果为 $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$。

10. 设 B 为 m 行，C 为 n 行，利用 Laplace 展开，设 B 的每个 m 阶子式的行列式依次为 $b_1,b_2\dots b_t$, $t=\mathrm{C}_{m+n}^m$，对应的代数余子式为 $c_1,c_2\dots c_t$，则左 $=\det(A)\det(A^H)=\sum\limits_{i=1}^{t}b_ic_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{t}\overline{b_ic_i}$。

    右侧，由 Binet-Cauchy 公式，结果为 $\sum\limits_{i=1}^{t}b_i\overline{b_i}\cdot\sum\limits_{i=1}^{t}c_i\overline{c_i}$(由于 c_i 与 $\overline{c_i}$ 在代数余子式中带有相同的符号，故抵消)。由柯西不等式可知 $b_ic_i\overline{b_jc_j}+\overline{b_ic_i}b_jc_j\le b_i\overline{b_i}c_j\overline{c_j}+b_j\overline{b_j}c_i\overline{c_i}$，整理可知左小于等于右。

11. * 两方法均需将 A 中看为 n^2 个不定元，即任意子式可逆。

    法一：利用 $AA^*=\det(A)I$, 由 Binet-Cauchy 公式可知

$$\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n}A^*\begin{bmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_r\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r\end{bmatrix}=\begin{cases}0 & \exists m,k_m\ne i_m\\ \det(A)^r & \forall m,k_m=i_m\end{cases}$$

    利用不定元的看法可以看作这里的系数均不为 0，由此，A^* 所有 r 阶子式的行列式值由这些方程唯一确定。又由 Laplace 展开，等式右侧的值满足这些方程，故等式成立。

    法二：不失一般性，计算 $A^*\begin{bmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{bmatrix}$。设 $A_1=A\begin{bmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{bmatrix}$，对应分块为 $\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$，则有 $\det(A)=\det(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)\det(A_4)$ 。

$$A^*=\det(A)A^{-1}\Rightarrow A^*\begin{bmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{bmatrix}=\det(A)\det(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1}$$

    计算行列式得结果。

12. (1) 注意到，对可逆方阵 P,Q，$Ax=b$ 有解等价于 $PAQx=Pb$ 有解 (对应构造 $Qx,Q^{-1}x$ 即可，或利用 4.2 节定理 4.8-1)。令 P 为一系列 $T_{ij}(\lambda)$ 与 S_{ij} 的乘积，取 $Q=P^T$，利用 $\mathrm{Char}\,\mathbb{F}=2$ 可计算得 PAP^T 仍为对称阵，且 Pb 仍为 PAP^T 对角元的顺次排列。

    先说明，任意对称阵 A 可利用这样的 PAP^T 化为 $\mathrm{diag}(a_{11},\dots,a_{rr},B)$，其中 B 的对角元全部为 0。

归纳。一阶时直接成立。高阶时，若其无非零对角元，则已得证。若有，先将非零对角元利用 S_{ij} 置换为 a_{11}，再取 $P=\prod_{i=2}^{n}T_{i1}(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$，则此时 $PAP^T=\mathrm{diag}(a_{11},A')$，由归纳假设知成立。

此时，直接取 x 前 r 个分量为 1，其余为 0 即为解。

(2) 类似上一问用分块矩阵计算验证可知，上问所述 PAP^T 亦不会影响主子矩阵的可逆性，因此可不妨设 A 已经化为了 $\mathrm{diag}(a_{11},\dots,a_{rr},B)$ 的形式。注意到，由于 P 可逆，当 $b\neq\mathbf{0}$ 时，$Pb\neq\mathbf{0}$，即 PAP^T 中至少有一个对角元非零，不妨设为 a_{11}，那么，取 $\mathrm{diag}(a_{22},\dots,a_{rr},B)$ 即为所求的 $n-1$ 阶主子式。

(3) 注意到，第一问的归纳中的 P 只需使用 S_{ij} 与 $T_{ir}(\lambda),i>r$，利用 ijr 不等时 $S_{ij}T_{ir}(\lambda)=T_{jr}(\lambda)S_{ij}$，类似 2.3 节习题 8，每步选择合适的 S_{ij} 可保证 $j>r$，由此将其拆分为 TS，T 为下三角 $T_{ij}(\lambda)$ 的乘积，是单位下三角方阵，S 为置换方阵。

取 $P=S^{-1},L=T^{-1},D$ 为 $\mathrm{diag}(a_{11},\dots,a_{rr},B)$。利用条件直接计算 TSb 可发现，此时 D 不含为 0 的对角元，即为满足要求的对角阵。

§3.4　行列式与几何

1. 可以直接由三个过原点三角形面积和差验证，或看成三维空间中高为 1 的过原点锥体体积的三倍 (即为柱体，因此系数为 $3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$)。

2. 不妨设四个点落在单位圆上，且对应角度分别为 $\theta_A,\theta_B,\theta_C,\theta_D$，$O$ 点落在 x 轴上。由于对角三角形面积和相等，消去后只需证明 $\begin{vmatrix}x_B & y_B & x_A\\ x_C & y_C & x_A\\ x_D & y_D & x_A\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_B & y_B & x_C\\ x_A & y_A & x_C\\ x_D & y_D & x_C\end{vmatrix}$ 在 A,B，C,D 对换后不变。利用三角变换可得出结果 (注意到，$x_By_D-x_Dy_B=\sin(\theta_D-\theta_B]))$。

3. 在空间中任找一点，可将六面体切割为六个有向四棱锥的面积和，由四面体行列式体积公式 (见下题) 可计算出棱锥体积之比，从而得到整个占比 (几何法切割亦可得到结果，但需要较强的空间想象能力)。

4. 类似习题 1 可知，空间 4 个点 (x_i,y_i,z_i) 构成的有向四面体体积为 $\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}$。由 Crammer 法则，$1,2,3$ 三个平面的交点可以写成 $\left(\frac{\Delta_{4a}}{\Delta_4},\frac{\Delta_{4b}}{\Delta_4},\frac{\Delta_{4c}}{\Delta_4}\right)$，其中 Δ_{4a} 为将 Δ_4 中 a 所在的列替换为 1 所得行列式 (亦可以看成 Δ 删去首行与末列构成的子式乘以 $(-1)^2$)。由此所求体积为
$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\frac{\Delta_{1a}}{\Delta_1} & \frac{\Delta_{1b}}{\Delta_1} & \frac{\Delta_{1c}}{\Delta_1} & 1\\ \frac{\Delta_{2a}}{\Delta_2} & \frac{\Delta_{2b}}{\Delta_2} & \frac{\Delta_{2c}}{\Delta_2} & 1\\ \frac{\Delta_{3a}}{\Delta_3} & \frac{\Delta_{3b}}{\Delta_3} & \frac{\Delta_{3c}}{\Delta_3} & 1\\ \frac{\Delta_{4a}}{\Delta_4} & \frac{\Delta_{4b}}{\Delta_4} & \frac{\Delta_{4c}}{\Delta_4} & 1\end{vmatrix}$$
，即只与 $\frac{(\Delta^*)^T}{6\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4}$ 相差符号，而 $\det(\Delta^*)^T=\det\Delta^*=\det\Delta^3$，故原式即构成无向体积。

5. 与习题 4 相同，$\mathbb{R}^n$ 中的 $n+1$ 个 $n-1$ 维单纯形 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=1$ 围出的 n 维单纯形 (有向) 体积为 $\frac{\Delta^n}{n!\prod_{i=k}^{n+1}\Delta_k}$，其中 $\Delta=(a_{ij},1)$，Δ_k 为删去第 k 行与最后一列的子式 (计算符号可发现此处正负合理)。

第四章　矩阵的相抵

§4.1　矩阵的秩与相抵

1. (1) 3 (2) 3 (3) 2 (4) 2 (5) 3 (6) 4

1(4-6) 的一般情形： 考虑 $A_{m\times n}=(a_{ij}),a_{ij}=\left((i+j-1)^k\right)$，求其秩。

注意到，$(i+j-1)^k=\sum_{s=0}^{k}(i-1)^s\mathrm{C}_k^s j^{k-s}$，由此

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&m-1&\cdots&(m-1)^k\end{pmatrix}\mathrm{diag}(\mathrm{C}_k^0,\mathrm{C}_k^1,\cdots,\mathrm{C}_k^k)\begin{pmatrix}1&2^k&\cdots&n^k\\1&2^{k-1}&\cdots&n^{k-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

此三矩阵皆满秩，可利用满秩阵的标准形证明 A 的秩为其中最小值，即为 $\min(m,n,k+1)$

2. (1) 与 x 无关，秩恒为 4。

(2) 秩最小为 3，取 $x=y=-1$ 即可。

(3) 秩最小为 2，取 $x=y=2$ 即可。

3. 设 $A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$ (PQ 可逆)，则 $A=\sum_{i=1}^{r}PE_{ii}Q$ (E_{ii} 只有第 i 行第 i 列为 1，其余为 0) 即为满足要求的分解。

4. 设 $A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$ (PQ 可逆),P,Q 对应分块为 $\begin{pmatrix}P_1&P_2\\P_3&P_4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}Q_1&Q_2\\Q_3&Q_4\end{pmatrix}$,则 $A=\begin{pmatrix}P_1\\P_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&Q_2\end{pmatrix}$ 若其不为列 (行) 满秩，由 Laplace 展开知原矩阵不可逆，矛盾，故此即为满足要求的分解。

5. (1) 右逆 $\Rightarrow$ 行满秩：设 B 为右逆，则 $m=\mathrm{rank}(AB)\le\mathrm{rank}(A)\le m$，由两侧知只能全部等号成立，故 A 行满秩。

行满秩 $\Rightarrow$ 零解: 设 $A=P\begin{pmatrix}I_m&O\end{pmatrix}Q$ (PQ 可逆),则 $A=\begin{pmatrix}P&O\end{pmatrix}Q,A^T=Q^T\begin{pmatrix}P^T\\O\end{pmatrix}$。$\begin{pmatrix}P^T\\O\end{pmatrix}x=0$ 即为 $P^Tx=0$ 与一些 $0=0$ 的组合，因 P^T 可逆只有 0 解，而 Q^T 因可逆可看作这些方程作行初等变换，不影响解。

零解 $\Rightarrow$ 扩充为可逆: 由其只有零解, A^T 可在行变换下等价为 $\begin{pmatrix}I_m\\O\end{pmatrix}$, 即可以写为 $R\begin{pmatrix}I_m\\O\end{pmatrix}$, 其中 R 可逆 (或在说明列满秩后用 $A^T=Q^T\begin{pmatrix}P^T\\O\end{pmatrix}=Q^T\begin{pmatrix}P^T&O\\O&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m\\O\end{pmatrix}$ 亦可说明)，取 $B^T=R\begin{pmatrix}O\\I_{m-n}\end{pmatrix}$ 即可。

扩充为可逆 $\Rightarrow$ 右逆：设满足条件的 $\begin{pmatrix}A&B\end{pmatrix}$ 逆为 $\begin{pmatrix}C_{m\times n}\\D_{(n-m)\times n}\end{pmatrix}$，则可验证 C 即为右逆。

(2) 由 (1) 取转置即可证明。

6. (1) 先证 (2)，此问由 (2) 取转置即可说明。

(2) 设 $A=P_A\begin{pmatrix}I_A\\O\end{pmatrix}_{m\times n}Q_A,B=P_B\begin{pmatrix}I_B\\O\end{pmatrix}_{n\times p}Q_B$ ($P_AQ_AP_BQ_B$ 可逆)，设 $P_AQ_B=R$ (R 可逆)，则 $AB=P_A\begin{pmatrix}R\\O\end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix}I_B\\O\end{pmatrix}_{n\times p}Q_B$，将 $\begin{pmatrix}R\\O\end{pmatrix}$ 按 $\begin{pmatrix}I_B\\O\end{pmatrix}$ 分块为 $\begin{pmatrix}R_1&R_2\\R_3&R_4\\O&O\end{pmatrix}$ (R_1,R_4 为方阵)，则

$AB=P_A\begin{pmatrix}R_1\\R_3\\O\end{pmatrix}Q_B$，与习题 5 相同，由 R 可逆可知 $\begin{pmatrix}R_1\\R_3\end{pmatrix}$ 列满秩，故 $\begin{pmatrix}R_1\\R_3\\O\end{pmatrix}$ 列满秩，故 AB 列满秩。

(3) 若 A 不为行满秩，AB 为行满秩，$m=\operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(A)<m$，矛盾。

(4) 由 (3) 取转置即可证明。

(5) 未必。反例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$。

7. 由 3.3 节习题 7，$(AB)^*=B^*A^*$，而可逆方阵的伴随方阵亦可逆，将 A 写为 $P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$ (PQ 可逆) 即得证。

8. (1) $\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A+B&B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&B\end{pmatrix}$

(2)$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&B\end{pmatrix}\le\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&B\\O&B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

(3) $A=P_A\begin{pmatrix}I_A&O\\O&O\end{pmatrix}Q_A,B=P_B\begin{pmatrix}I_B&O\\O&O\end{pmatrix}Q_B$ ($P_AQ_AP_BQ_B$ 可逆)，由 3.2 节习题 8(1) 得 $P_A\otimes P_B$ 可逆，再由 2.2 节习题 6$\operatorname{rank}(A\otimes B)=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}I_A&O\\O&O\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}I_B&O\\O&O\end{pmatrix}\right)$，直接计算得 $\operatorname{rank}(A)\operatorname{rank}(B)$。

(4) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I&O\\-\frac{1}{2}I&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&I\\O&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-I\\O&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&O\\\frac{1}{2}I&I\end{pmatrix}$

$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A+B&O\\O&A-B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank}(A-B)$ (实质为初等变换)

(5) 法一：仍利用初等变换可构造出 $\operatorname{rank}(A-B)+\operatorname{rank}(C-D)$

$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A-B&O\\O&C-D\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I&A+B\\O&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A-B&O\\O&C-D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&C+D\\O&I\end{pmatrix}$

$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A-B&2(AC-BD)\\O&C-D\end{pmatrix}\ge\operatorname{rank}(AC-BD)$

法二：$\operatorname{rank}(AC-BD)=\operatorname{rank}((A-B)C+B(C-D))\le\operatorname{rank}((A-B)C)+\operatorname{rank}(B(C-D))\le\operatorname{rank}(A-B)+\operatorname{rank}(C-D)$

(6) 只需证明右侧不等号，左侧交换 AB 即可。由于 $\operatorname{rank}(AB)\le\min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B))$，若此式不超过 $\frac{m}{2}$，结论已成立，否则由 Sylvester 秩不等式 (4.2 节例 4.9) 知 $\operatorname{rank}(BA)\ge\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-m\Rightarrow\operatorname{rank}(AB)-\operatorname{rank}(BA)\le\min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B))-\operatorname{rank}(A)-\operatorname{rank}(B)+m\le m-\operatorname{rank}(A)\le\frac{m}{2}$ (最后一步是由于 $\min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B))>\frac{m}{2}$)，故结论成立。

9. (证明暂缺，第二问结论的最后一句有误)

10. 法一：由 3.2 节习题 11 的过程，$\operatorname{rank}(S(f,g))=\operatorname{rank}(S(f,g-af))$，注意到，此题要求中 f_m,g_n 可以为 0。对总阶数归纳：二阶时可得成立，在阶数增加时：

若 $f_0=0,g_0\ne0$(可写为 x 的整除关系) 取出 0 项得 $\operatorname{rank}(S(f,g))=1+\operatorname{rank}\left(S(\frac{f}{x},g)\right)$，又因 g 不为 x 倍数，符合归纳。

若 $f_0\ne0,g_0=0$，与上同理得符合归纳。

若 f_0, g_0 均不为 0，不妨设 $\deg f \le \deg g$，利用 $g - af$ 消去 g_0 得到低阶情况，由于 $\gcd(f,g) = \gcd(f, g-af)$，符合归纳。

若 $f_0 = g_0 = 0$，可去除最左一列 0，添加到最右，此时 f 变换为 $\sum_{i=1}^{m} f_i x^{i-1} + 0x^m$，$g$ 同理，这样变换直到找到 f_k, g_k 即可化为上述情况。

法二：考虑 $S\alpha = \mathbf{0}$ 的解空间 V，设 $h = \gcd(f,g), \alpha = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{m-1})^T, \lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x^i$，$\mu(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i x^i$，则 $S\alpha = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda f + \mu g = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{g}{h} p, \mu = -\dfrac{f}{h} p$，$p \in \mathbb{C}[x]$。

由此，$\begin{cases} \deg(\lambda) = \deg(g) - \deg(h) + \deg(p) \le n-1 \\ \deg(\mu) = \deg(f) - \deg(h) + \deg(p) \le m-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \deg(p) \le \min(n - \deg(g), m - \deg(f)) + \deg(h) - 1$

$\Rightarrow \dim(V) = \min(n - \deg(g), m - \deg(f)) + \deg(h)$

$\operatorname{rank}(S) = m + n - \dim(V)$，代入即可。

11. 归纳法，当 $n = 1$ 时验证知成立，在阶数增加时：

若 $f_n = g_n = 0$，则直接退化为低阶情况 (末行列均为 0)。

其余情况，由对称不妨设 $f_n \ne 0$，按 3.2 节习题 12(1) 写出 $B = A_0D_0 - C_0B_0$，则满足 A_0 可逆，$A_0C_0 = C_0A_0$(在 3.2 节习题 12(1) 过程中已验证)。故由 Schur 公式 (2.4 节例 2.18) 有

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ C_0A_0^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & O \\ O & A_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ O & A_0D_0 - C_0B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_0^{-1}B_0 \\ O & I \end{pmatrix}$$

(由 $A_0C_0 = C_0A_0$ 在 A_0 可逆时两边左右乘逆可知 $A_0^{-1}C_0 = C_0A_0^{-1}$)

由于其中除 $\begin{pmatrix} I & O \\ O & A_0D_0 - C_0B_0 \end{pmatrix}$ 外均可逆，$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I & O \\ O & B \end{pmatrix} - n = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} - n$，

而 $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$ 在交换行列后可化为上一题的 Sylvester 结式，代入得原命题得证。

12. (1) 若 $\operatorname{rank} A \le 1$，则其各行、列均成比例，由于交换行列不影响秩，不妨设左上角为 1，且第一行、第一列均从小到大排列。此时，右上角与左下角均 $\ge n$，且至少一个严格大于成立，由秩至多为 1 可算出右下角 $> n^2$，矛盾。

(求所有秩为 2 的矩阵 A 答案暂缺)

(2) 验证知此矩阵为 1 到 n^2 排列。考虑 $(B + nC)x = \mathbf{0}$ 的解。$Cx = -\dfrac{1}{n} Bx$，计算知 Bx 的每个分量相等，因此 Cx 每个分量相等。设 $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$，将 Cx 相邻分量相减 (最后一个分量与第一个相减) 可得 $x_i = \dfrac{1}{n-1} \sum_{k \ne i} x_k$ 对任何 i 成立。考虑最大的 x_i 可知所有 x_i 全部相等，进一步得所有 x_i 全为 0，因此 $A_0 x = \mathbf{0}$ 只有零解，由此知 A_0 可逆。

(3) 将“交换矩阵中的两个相邻元素 (此处相邻包含行、列)”称为一次操作。类似在置换中的推导，可以说明，通过有限次操作，可以交换矩阵中任意两个元素。由此可推知，通过有限次操作，可使任何一个满足所有元素为 1 到 n^2 排列的矩阵变为任一个符合此要求的矩阵。

由于每次操作后的矩阵与操作前矩阵之差是一个秩为 1 的矩阵，利用习题 8(1,2) 可推出操作前后矩阵的秩最多差 1。将 (1) 中的矩阵经过有限次操作变为 (2) 中的矩阵，秩从 2 变化到 n，每步最多变化 1，因此必然经历了 2 到 n 间的所有整数，由此知结论成立。

13. * 项秩定义中应为非零元素，线秩定义中应为 $\min(p+q,m,n)$

$\operatorname{rank}(A)\le$ 线秩：考虑 $\operatorname{rank}(A)=r$ 阶的可逆子矩阵。若此子矩阵线秩 $<r$，则由定义其中存在一个 $a\times b$ 阶，$a+b>r$ 的零子矩阵，则考虑这 a 行，这 a 行所有 a 阶子式都为 0，由 Laplace 展开得其行列式为 0，与可逆矛盾，因此此部分的线秩至少为 r，由定义可知整体的线秩大于等于子矩阵的线秩，因此至少为 r。

线秩 $\le\min(m,n)$：由定义直接得成立。

项秩 $\le$ 线秩：由定义，将矩阵中的非零元素变为 0，线秩不会增大。若项秩为 r，由定义可发现 $r\le\min(m,n)$，则能取出 r 个不同行不同列的非零元素，在这些行列组成的 r 阶子矩阵中，将其他元素均变为 0，此时其可逆，由第一问推导知其线秩为 r，因此此部分线秩至少为 r，因此整体线秩至少为 r。

项秩 $\ge$ 线秩：由定义，项秩 $k\le\min(m,n)$，当 $k=\min(m,n)$ 时由上方知线秩只能为 $\min(m,n)$。而 k 为 0 或 1 时，可直接验证成立，因此下面只考虑 $1<k<\min(m,n)$ 的情况。注意到，置换行列不会改变矩阵的项秩或线秩。先证明一个引理：此时，A 置换行列后可分块成 $\begin{pmatrix}H&B\\C&O\end{pmatrix}$，其中 H 为 k 阶方阵且主对角线非零，O 为零矩阵，且对于满足 $a+b\le k$ 的某对自然数 a,b，B 共有 a 个非零行且全位于 B 的后 a 行，C 共有 b 个非零列且全位于 C 的前 b 列 (此处及本题以下部分的非零指不全为零)。

引理证明：由于 A 中有 k 个不同行不同列的非零元素，可将其中第 i 个置换到第 i 行第 i 列，此时的 H 已满足要求。若右下角不为零矩阵，则可取出第 $k+1$ 个不同行列的元素，因此矛盾。此时，对 $1\le i\le k$ 的 i，B 的第 i 行与 C 的第 i 列均非零，则从中各取出一个非零元替换原本第 i 行第 i 列的元素，即取出了 $k+1$ 个不同行列的元素，矛盾。由此，B 的非零行必定对应 C 的零列，因此 $a+b\le k$。注意到，置换相似 (即同时对行、列作相同的置换) 不会改变原本对角元的非零性，因此，先对前 k 行置换将 B 的非零行换到 B 的后 a 行，再对前 k 列作相同置换，由于此时 H 的对角元仍然非零，C 的后 a 列必然全为 0，再对前 $k-a$ 列作置换将 C 的非零列换到 C 的前 b 列，并对行作相同置换。由于此 $a+b\le k$，这样置换后不会改变 B 原本满足的性质。由此，引理得证。

不妨设 A 已置换为引理中形式。若此时有 $a=0$ 或 $b=0$，即 B,C 之一为零矩阵，直接取出它与右下角合成的零矩阵即有 $p+q=k$，因此线秩至多为 k，已得证。若有 $a+b=k$，将 A 写为 $\begin{pmatrix}H_1&H_2&O\\H_3&H_4&B_1\\C_1&O&O\end{pmatrix}$，其中 H_1,H_4 为方阵，且 B_1 的行与 C_1 的列均非零。若 H_2 不为零矩阵，则取出其中的非零元，将其左侧的主对角线上的元素用该元素下方的 C_1 中对应列的非零元替换，将其下方的主对角线上的元素用该元素右侧的 B_1 中对应行中的元素替换，即取出了 $k+1$ 个不同行列的元素，矛盾。因此 H_2 为零矩阵，此时，H_2 与其右侧、下方 (跳过 H_4,B_1) 构成的零子矩阵即有 $p+q=k$，因此线秩至多为 k，得证。

若 $a>0,b>0,a+b<k$，将 A 写为 $\begin{pmatrix}H_1&H_2&H_3&O\\H_4&H_5&H_6&O\\H_7&H_8&H_9&B_1\\C_1&O&O&O\end{pmatrix}$，其中 H_1,H_4,H_9 为方阵，且 B_1 的行与 C_1 的列均非零。记 $A_1=\begin{pmatrix}H_2&H_3\\H_5&H_6\end{pmatrix}$，注意到若 A_1 为 $k-a\times k-b$ 阶矩阵，且其中中存在某个零子矩阵，则可将其向右、向下扩展成行列之和多 $m+n-2k$ 的 A 的零子矩阵。由此，利用线秩定义可计算得 A 的线秩 $\le A_1$ 的线秩 $+a+b$。利用上方类似方法可说明 H_3 为零矩阵，且由之前假设知 H_5 对角线非零。下面说明，若 H_6 的某行非零，则 H_2 的对应列全为 0(这里的对应指在 A 中恰为第 i 列与第 i 行)。若否，取出其中各一个非零元，并将与它们冲突的 H_1 与 H_9 中的对角元替换

为 C_1, B_1 中对应列/行的非零元，并删去 H_5 中与它们冲突的对角元 (由于行列对应，H_5 中与两数冲突的为同一个对角元)，即取出了 $k+1$ 个不同行列的元素，矛盾。因此，设 H_6 中非零行数为 a_1，H_2 中非列数为 b_1，则子矩阵 A_1 在交换行为 $\begin{pmatrix} H_5 & H_6 \\ H_2 & H_3 \end{pmatrix}$ 后拥有与 A 完全相同的性质。由此，只要 $a_1 > 0, b_1 > 0, a_1 + b_1 < k - a - b$ 不同时满足，则类似之前推导已得证，若同时满足，则可类似作出 $A_2, A_3, \ldots$，由于每次的子矩阵行与列均严格小于前次的子矩阵，这样的递降不能无限进行，总有一次会不满足三条件之一，由此得证。

综合上述几部分证明即得原题结论。

§4.2　相抵标准形的应用

1. 由 4.1 节例 4.4，当 $a \neq 1, 1-n$ 时，直接解出 $x_i = \dfrac{a^{i-1}}{a-1} - \dfrac{a^n - 1}{(a-1)^2(a+n-1)}$；当 $a = 1$ 时，只需满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ 即可；当 $a = 1-n$ 时，对所有式子求和，左为 0，右为 $-\dfrac{(1-n)^n - 1}{n}$，若有解，讨论知必须 $n = 2$，此时需 $x_2 - x_1 = 1$。

2. 法一：通过解作差或取出特解可知 $A_1 x = \mathbf{0}, A_2 x = \mathbf{0}$ 解集亦相同。因此 $A_1 x$ 可通过同解变形得到 $A_2 x$，即为左乘行变换的可逆方阵 P 后 $PA_1 = A_2$，代入特解即有此时 $Pb_1 = b_2$。

   法二：由于 $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 与其中任一方程同解，$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A_1) = \operatorname{rank}(A_2)$。将 $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ 写为 $Q\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}R$ (QR 可逆)，按此分块为 $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$，由秩关系可知 $\operatorname{rank}(Q_1) = \operatorname{rank}(Q_3) = r$，由此存在可逆阵 P 使得 $PQ_1 = Q_3$，验证知符合要求。

3. 对行满秩证明，列满秩取转置即可。设 $A_{m\times n} = P\begin{pmatrix} I_m & O \end{pmatrix}Q$ (PQ 可逆)，则 $A = \begin{pmatrix} P & O \end{pmatrix}Q$。

   左推右：设广义逆矩阵 $B_{n\times m} = Q^{-1}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$，其中 B_1 为 m 阶方阵，由广义逆充分必要条件可计算出 $\begin{pmatrix} PB_1P & O \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} P & O \end{pmatrix}Q, Q^{-1}\begin{pmatrix} B_1PB_1 \\ B_2PB_1 \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$，由 PQ 可逆有 $PB_1 = I_m$，故 $B_1 = P^{-1}$，验证得此时的 B 即为右逆。

   右推左：直接由右逆定义，$AB = I_m$，故 $ABA = A, BAB = B$。

4. (1) 利用习题 3 结论，$P^\dagger P = I, QQ^\dagger = I$，直接计算验证 $AA^\dagger A = A^\dagger, A^\dagger AA^\dagger = A$ 即可。

   (2) 设对于某个分解 $A = P_0\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_0$ (PQ 可逆)，对应 $A^\dagger = {Q_0}^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}{P_0}^{-1}$，分解为 $P = P_0\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}Q_0$ 即可。

5. (1) 先说明存在 r 阶可逆主子矩阵。

   设 $\operatorname{rank}(A) = r, A_{n\times n} = P_{n\times r}Q_{r\times n}$，其中 P 为列满秩，Q 为行满秩 (由 4.1 节习题 4 知分解合理)，由满秩，P, Q 存在 r 阶可逆子矩阵。设 P 第 $p_1, p_2 \ldots p_r$ 行构成的子式可逆，Q 第 $q_1, q_2 \ldots q_r$ 列构成的子式可逆，由 Binet-Cauchy 公式，$A\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_r \end{bmatrix}$ 可逆。若 Q 第 $p_1, p_2 \ldots p_r$ 列构成的子式可逆，则已满足题目条件，否则考虑 $A^T = Q^T P^T$。此时 Q^T 列满秩，P^T 行满秩。由 Q 第 $p_1, p_2 \ldots p_r$ 列构成的子式不可逆，可知 Q^T 第 $p_1, p_2 \ldots p_r$ 行构成的子式不可逆，由 Binet-Cauchy 公式，对任

意 $s_1, s_2 \dots s_r$，$A^T \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_r \end{bmatrix}$ 不可逆，但 $A^T = A$，与 $A \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_r \end{bmatrix}$ 可逆矛盾，故 Q 第 $p_1, p_2 \dots p_r$ 列构成的子式可逆，因此 $\det A \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{bmatrix} \neq 0$。

考虑 A 的各阶顺序主子式 (即前 i 行前 i 列的子方阵)。可以证明，相邻两个顺序主子式秩相差至多 2。这是因为，相邻的顺序主子式相差为删去末行末列，相当于将最后一行最后一列变为 0。将改变前后的矩阵相减，计算可知差为一个秩至多为 2 的矩阵。再利用 4.1 节习题 7(1,2) 可知秩相差至多 2。最后一个顺序主子式一行一列，因此秩至多为 1。由此，对任意正整数 $k \le r$，存在某个顺序主子式的秩为 k 或 $k+1$。由于对称阵的顺序主子式仍对称，由 (1)，这个顺序主子式存在某个主子式秩为 k 或 $k+1$。而主子式的主子式依然为 A 的主子式，由此得证。

(2) 与 (1) 类似，先说明存在 r 阶可逆主子矩阵，又因为反对称方阵的主子式仍为反对称方阵，当其阶数 n 为奇数时，由 3.2 节习题 9 证明过程知行列式为 0，因此 r 一定为偶数。继续仿照 (1) 的过程由于反对称方阵秩为偶数，一定能取到习题 (1) 的 $k, k+1$ 中的偶数，即为所有正偶数。

6. (答案暂缺)

7. 由 4.1 节习题 4 设 $A = P_1Q_1, B = P_2Q_2, P_1, P_2$ 列满秩，Q_1, Q_2 行满秩，由 $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = A+B$，由条件可知 $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix}$ 列满秩，$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ 行满秩 (否则利用 $\operatorname{rank}(XY) \le \min(\operatorname{rank}(x), \operatorname{rank}(y))$ 可知矛盾)，由 4.1 节习题 5 知存在 $P = \begin{pmatrix} P_1 & * & P_2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ * \\ Q_2 \end{pmatrix}$ 为可逆方阵，代入计算可得此时 PQ 即符合要求。

8. 设 $A = P_0 \begin{pmatrix} I_a & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_0$ (P_0Q_0 可逆)，对应分块 $B = {Q_0}^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} {P_0}^{-1}$，代入方程可解得 $B_1 = B_2 = B_3 = O$，取可逆矩阵 MN 使 $B_4 = M \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_b \end{pmatrix} N$，令 $P = P_0 \begin{pmatrix} I_a & O \\ O & N \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} I_a & O \\ O & M \end{pmatrix} Q_0$，计算知符合要求。

9. (1) 设 $A+I = P_0 \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_0$ (P_0Q_0 可逆)，Q_0P_0 分块为 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$，则 $A+I = P_0 \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix} P_0^{-1}$，且由 Q_0P_0 可逆知 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ 行满秩。解方程 $(A+I)(A-I) = O$ 可得 $(B_1 - 2I) \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} = O$，由 4.1 节习题 5 知只能 $B_1 = 2I$，取 $P = \begin{pmatrix} I & -\dfrac{1}{2}B_2 \\ O & I \end{pmatrix} P_0^{-1}$，计算验证知符合要求。

(2) 将 A 写为 (4) 中的形式，记形式中的 P, Q 为 P_0, Q_0，直接计算可发现 $Q_0^3 = Q_0$，由 Q_0 可逆，$Q_0^2 = I$，由 (1) 设 $R^{-1}Q_0R = \operatorname{diag}(I, -I)$，则取此处 $P = P_0 \begin{pmatrix} R & O \\ O & I \end{pmatrix}$ 即符合要求。

(3) $\operatorname{rank}(A^{k+1}) = \operatorname{rank}(A^k \cdot A) \le \operatorname{rank}(A^k)$，由 Frobenius 秩不等式 $\operatorname{rank}(AA^{k-1}A) + \operatorname{rank}(A^{k-1}) \ge \operatorname{rank}(A^{k-1}A) + \operatorname{rank}(AA^{k-1})$，因此 $2\operatorname{rank}(A^k) - \operatorname{rank}(A^{k-1}) \le \operatorname{rank}(A^{k+1}) \le \operatorname{rank}(A^k)$，代入条件即得结果。

(4) 由于 $\operatorname{rank}(A^{k+1}) = \operatorname{rank}(A^k \cdot A) \le \operatorname{rank}(A^k)$，由条件可推出 $\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(A)$。设 $A = P_0 \begin{pmatrix} I_a & O \\ O & O \end{pmatrix} R_0P_0^{-1}$ (P_0, R_0 可逆)，$R_0 = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$，而 $A^2 = P_0 \begin{pmatrix} R_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} R_0P_0^{-1}$，因此 R_1 可逆。

由于 $A=P_0\begin{pmatrix}R_1 & R_2\\ O & O\end{pmatrix}P_0^{-1}$，取 $P=P_0\begin{pmatrix}I & -R_1^{-1}R_2\\ O & I\end{pmatrix}, Q=R_1$，计算验证即可。

10. (1) 归纳。一阶时显然成立，当阶数大于 1 时，与习题 10(1) 类似操作可先将其列变换为 $\begin{pmatrix}O & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix}Q_0$，由于 A 幂零，不可能可逆，故至少有一列 0，计算知将其写为 $Q_0^{-1}\begin{pmatrix}O & A_1'\\ O & A_2'\end{pmatrix}Q_0$ 时依然有一列为 0。计算其 m 次幂验证可知 A_2' 仍为幂零方阵，由归纳假设，存在 P_0 使得 $P_0^{-1}A_2'P_0$ 为对角全为 0 的上三角阵，因此取 $P=\begin{pmatrix}I & O\\ O & P_0^{-1}\end{pmatrix}Q_0$ 即满足要求。

(2) 将第一问的第一步改为将其行变换为 $P_0\begin{pmatrix}A_2 & A_1\\ O & O\end{pmatrix}$，然后将所有对行列的操作对调即可 (具体操作见第三问)。

(3) 由于相似可以传递 $(PQAQ^{-1}P^{-1}=(PQ)A(PQ)^{-1})$，不妨设 A 已经是上一问中的形式。

注意到，在第一问的操作下，$A=\begin{pmatrix}C_1 & * & *\\ & \ddots & *\\ & & C_r\\ & & \end{pmatrix}$，其中每个对角块为方阵，且每个 C_i 及其右下角为列满秩阵 ($*$ 部分为未定)(理由为在每一步中 $\begin{pmatrix}A_1'\\ A_2'\end{pmatrix}$ 列满秩，之后的操作不改变这个特性)。利用 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\le\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$，可发现每个 C_i 亦为列满秩。

下面由下标从大到小依次对 C_k 进行如下操作：

由于 C_k 为列满秩阵，可行变换为题目要求的 B_k 的形式 ($C_k=Q_k\begin{pmatrix}I\\ O\end{pmatrix}P_k=Q_k\begin{pmatrix}P_k & O\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\ O\end{pmatrix}$，取行变换矩阵为 $\begin{pmatrix}P_k^{-1} & O\\ O & I\end{pmatrix}Q_k^{-1}$ 即可)。如此进行变换，并右乘其逆。由于右乘其逆相当于对 C_{k-1} 所在的列进行列变换，不会改变 C_{k-1} 的列满秩性质，因此操作可以继续。接下来，利用 T_{ij} 行变换将 B_k 上方的所有数减为 0。右乘此操作的逆相当于 C_{k-1} 所在的列减去其左侧的列。由于 C_{k-1} 左侧全部为 O，故这个操作亦不会影响下一步操作。

如此对所有 C_k 按下标从大到小如此操作 r 次，可得到符合要求的方阵 (直接计算 A^{m-1} 与 A^m 知此时必然剩下 $m-1$ 个 B_k)。

(4) 在第三问的基础上进行操作。在 2.4 节习题 14 中已验证，左乘置换方阵并右乘其逆相当于置换下标。由于矩阵为上三角，a_{ij} 只有 $i<j$ 时可能为 1。且容易发现，此时矩阵每行每列最多有一个 1。按 i 从小到大寻找，第三问的形式中第一行必然有 1。若 $a_{1,i_2}=a_{i_2,i_3}=\cdots=a_{i_p,i_{p+1}}=1$，且 i_{p+1} 行没有 1，则将 i_1 到 i_m 置换为 1 到 m。然后从第 $m+1$ 行看起，找到此时第一个存在 1 的行，再次按之前方式找到链条，放在 $m+1,m+2,\dots$ 的位置，以此直到所有的 1 都排列完成。可以证明，这样操作后，每个对角方阵已经成为 Jordan 方阵，且不会有剩下的 1。再利用置换矩阵调整顺序至满足大小要求 (5.1 节定理 5.1-5) 即可。直接计算可知，此时最大块必然为 m 阶。

(亦可通过类似思路归纳操作，更为简洁)

§4.3 Smith 标准形

1. 本题只按顺序写出 d_i

(1) 1,60,60 (2) 1,1 (3) 1,1 (4) 1,1

(5) $x+1, x(x+1), (x-1)x(x+1)$ (6) $x, x(x-1)^2$

(7) x, x^2, x^3 (8) $1, x(x-1)$

2. (1) 直接设出 $a_1, \ldots, a_n$ 每个数的不同素因子，可发现其中 n 个 $n-1$ 个不同数的乘积的最大公因数为 1，由此知 $D_{n-1}=1$，可得结论。

   (2) 直接利用最大公因数计算 D_i 即可

3. 直接仿照 4.2 节开头部分，注意此时有解条件除 $\beta_2=0$ 外还有 $d_i \mid \beta_{1i}$，因此相抵须加强为模相抵。

4. 证明中 $k+1, k+2$ 若 $>n$，则写为模 n 的余数

   (1) * 需至少二阶，一阶时 (-1) 无法表示。

   由变换的角度，任何整系数方阵都能在整系数初等变换下得到 Smith 标准形，又因整数模方阵的标准形为单位阵，其一定能写为整系数初等方阵的乘积。而 $D_i(n)$ 会导致行列式值为 n 的倍数，故只能 $n=-1$($n=1$ 为单位阵)，但 $D_i(-1)=S_{ij}T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$，且 $T_{ij}(n)=T_{ij}^n(1), T_{ij}(-n)=T_{ij}^n(-1)(n>0)$，故可表示为满足题目要求的乘积。

   (2) $P^kS_{12}P^{n-k}=S_{k+1,k+2}$，再由 $S_{ij}(i<j)=S_{i+1,j}S_{i,i+1}S_{i+1,j}$ 可由 ij 之差归纳出结果。

   (3) $P^kT_{12}(1)P^{n-k}=T_{k+1,k+2}(1), T_{ij}(1)(i<j)=T_{i,i+1}(1)T_{i+1,j}(1)T_{i,i+1}(-1)T_{i+1,j}(-1)$ 与上问类似可由 ij 之差归纳出结果。

   (4) 由于 $S_{ij}T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)=D_i(-1)$ 与 j 无关，可将 S_{ij} 利用 T 化为 $S_{i1}=S_{1i}$，再利用 T 化为 S_{12} 即可。

   (5) $T_{ij}(1)=S_{1i}S_{2j}T_{12}(1)S_{2j}S_{1i}$ $(S_{ii}=I)$

5. (1) 由习题 4(1) 进行分解，又由习题 4(4)，可将所有 S_{ij} 化为 S_{12}，由于行列式为 1，这样的 S_{12} 必然为偶数个。又因为 $S_{12}T_{ij}(k)=T_{mn}(k)S_{12}$(其中 m,n 为 i,j 在对换 12 作用下的结果)，可以将 S_{12} 两两配对后全部消去，即得证。

   (2) 阶数为奇时与习题 4(3) 相同，为偶时 $P^kT_{12}(1)P^{n-k}=-T_{k+1,k+2}(-1)$，由习题 4(3)，由于 $T_{ij}(1)$ 模为 1，结果可消去所有负号，即得证。

6. 直接将定理证明中的整数替换为多项式即可，注意其中配凑系数可控制首一。

7. (1) 由 Smith 标准形为对称阵，设 PQ 为模方阵，PAQ 为 A 的 Smith 标准形，则 $Q^TA^TP^T=(PAQ)^T=PAQ$，故 A^T 与 A 模相抵 (转置不影响行列式，故模方阵转置仍为模方阵)。

   (2) 与 (1) 过程相同。

8. (1) 左推右：若否，展开得行列式一定为 $\gcd(a_1, a_2 \ldots a_n)$，故矛盾

   右推左：由于其各分量最大公约数是 1，将此向量写为 α，可右乘合适的 $D_i(-1)$ 使其均变为正数，再右乘 $T_{21}(-1), T_{12}(-1)$ 的组合进行辗转相减，最终使 a_1 成为 $\gcd(a_1, a_2)$，以此对每个大于 1 的 a_i 操作，a_1 最终变换成 $\gcd(a_1, a_2 \ldots a_n)=1$，设这时的 α 变为 β，有 $\alpha P=\beta$(由于每步变换均为右乘整数模方阵，P 亦为整数模方阵) 此时，由于 $\beta_1=1$，$\begin{pmatrix} 1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ 即为以 α 为行向量的整数模方阵。

   (2) 与 (1) 过程相同，注意辗转相减时 T_{1i}, T_{i1} 中的内容应更改为多项式辗转相除的方式即可。

9. 考察某个 $C=A+xB$ 的子式 $C\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_r\\ q_1 & q_2 & \cdots & q_r\end{bmatrix}$。

由 $A^T=\overline{A},B^T=\overline{B}$，可得 $f_1(x)=\det C\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_r\\ q_1 & q_2 & \cdots & q_r\end{bmatrix},f_2(x)=\det C\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & \cdots & q_r\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_r\end{bmatrix}$ 互为共轭。而 f_1,f_2 均为 r 次多项式，因此 $\gcd(f_1,f_2)=\gcd(f_1+f_2,f_2-f_1)=\gcd\left(f_1+f_2,\dfrac{f_2-f_1}{2\mathrm{i}}\right)$ (因非零复数可逆，除以 2i 不影响多项式最大公因式)。

计算可发现，$f_1+f_2,\dfrac{f_2-f_1}{2\mathrm{i}}$ 均为实系数多项式，因此其最大公因式亦为实系数多项式。而对每一个 D_k，都可以由此配对成若干个实系数多项式的最大公因式，因此亦为实系数多项式，从而 d_k 亦如此。

10. 考虑 (x) 与 (x^2) 即为反例。

可以说明，当 A 和 B 对应的 d_i 均无重根时，条件成立。首先证明：若两个方阵 $M,N\in\mathbb{C}[x]$ 模相抵，则对任何 $z,M(z),N(z)$ 相抵。令 $M=PNQ,P,Q$ 为模方阵，则 $M(z)=PNQ(z)=P(z)N(z)Q(z)$，由于 $\det P(z),\det Q(z)$ 均为 ±1，故 $P(z)Q(z)$ 可逆，因此 $M(z),N(z)$ 相抵。由此，设 A,B 的 Smith 标准形为 A_0,B_0，则对任何 z，$A(z)$ 与 $A_0(z)$，$B(z)$ 与 $B_0(z)$ 相抵，于是 $A_0(z)$ 与 $B_0(z)$ 相抵，设 $A_0(z)=\mathrm{diag}(a_1,a_2\ldots a_k,O),a_i\mid a_{i+1}$，$B_0(z)=\mathrm{diag}(b_1,b_2\ldots b_l,O),b_i\mid b_{i+1}$。令 z 取一个并非 a_k,b_l 根的数，此时相抵可知 $k=l$。若 a_i 与 b_i 不全相同，考虑最小的不相同的 a_i,b_i，由于 a_i,b_i 均为无重根，必定根的情况不同，不妨设有一个 z 为 a_i 根，不为 b_i 根，则讨论其他方程对 z 的根的情况可知此时 $\mathrm{rank}(A(z))<\mathrm{rank}(B(z))$，矛盾。

由证明过程亦可知，满足题目中要求的 A,B 实际要求为，Smith 标准形中对应位置的每个多项式根相同 (但重数可以不同)。

第五章　矩阵的相似

§5.1　相似的概念

1. (1)$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$(2.1 节定理 2.2)$\Rightarrow \mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(PBP^{-1})=\mathrm{tr}(P^{-1}PB)=\mathrm{tr}(B)$

$\det(A)=\det(P)\det(B)\det(P^{-1})=\det(B)$

$\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)$ 由秩定义直接得相等。

(2) 利用 $(P^T)^{-1}=(P^{-1})^T$ 与 $(AB)^T=B^TA^T$ 知成立。

(3) 直接计算可发现 $A=PBP^{-1}\Rightarrow f(A)=Pf(B)P^{-1}$。

(4) 计算可知 $\mathrm{diag}(P,Q)^{-1}=\mathrm{diag}(P^{-1},Q^{-1})$，由此构造即可。

(5) 设 A_1,A_2 为 m,n 阶方阵，则计算可知 $\mathrm{diag}(A_2,A_1)=\begin{pmatrix}O & I_n\\ I_m & O\end{pmatrix}\mathrm{diag}(A_1,A_2)\begin{pmatrix}O & I_m\\ I_n & O\end{pmatrix}$，且左右方阵互逆，由此归纳可知结果。

2. 直接取 $P=\begin{pmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，计算知成立。

3. (1) 特征值 1,1,1，但 1 几何重数为 1，不可对角化。

(2) 特征值 1,1,2，$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(3) 特征值 1,1,1，但 1 几何重数为 2，不可对角化。

(4) 特征值 1,2,3，$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

(5) 特征方程 $\lambda^n+a=0$。$a=0$ 时特征值全为 0，但 0 几何重数为 1，不可对角化；其余情况可对角化，$P_{ij}=a^{(i-1)/n}\omega^{(i-1)(j-1)}$，其中 ω 为 n 次本原单位根。

(6) 类似 3.2 节习题 6(1) 知特征值为 $n-1$ 重 0 与 $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,计算得 $P=\begin{pmatrix}-n&\cdots&-2&1\\&&1&2\\&\iddots&&\vdots\\1&&&n\end{pmatrix}$

(7) 类似 3.2 节习题 6(2) 知特征值为 $n-2$ 重 0 与 $\lambda^2-\dfrac{n^3+2n}{3}\lambda+\dfrac{n^4-n^2}{12}=0$ 的两根。0 对应特征向量的基为 $\begin{pmatrix}k&-k-1&0&\dots&1&\dots&0\end{pmatrix}^T$ ($1\le k\le n-2$，第 $k+2$ 个分量为 1，此外除前两个分量均为 0)，非零特征值 λ 对应的一个特征向量第 i 个分量为 $\dfrac{\lambda}{n}-\dfrac{n+1}{2}+i$，分别代入两个 λ，组合得 P。

4. (1) 特征方程为奇数次，必有实根。

(2) 特征方程常数项为 $\det(A)$，由于 $\varphi_A(0)=\det(A),\varphi_A(+\infty)=+\infty$，若否，由介值定理知存实根。

(3) 由 A 为实对称方阵，$A^H=A$，设特征值 λ 对应特征向量 α，则 $\alpha^HA\alpha=\alpha^H(\lambda\alpha)=\lambda\alpha^H\alpha$，又由于 $(A\alpha)^H=\alpha^HA=(\lambda\alpha)^H=\overline{\lambda}\alpha^H$，有 $\alpha^HA\alpha=\overline{\lambda}\alpha^H\alpha$。综合两式，$\alpha\ne\mathbf{0}\Rightarrow\alpha^H\alpha>0$，因此 $\lambda=\overline{\lambda}\Rightarrow\lambda\in\mathbb{R}$。

(4) 与上问类似知 $\lambda=-\overline{\lambda}$，由此得结论。

5. 若否，则可以通过列变换将某列变为 0，因此存在某些 α 使 $\sum_{k=1}^{r}t_k\alpha_{m_k}=\alpha_s$，其中 t_k 为非零常数。同时左乘若干 A 可知 $\sum_{k=1}^{r}t_k\lambda_{m_k}^l\alpha_{m_k}=\lambda_s^l\alpha_s$ 对任意 l 成立。由于特征值两两不同，利用范德蒙德行列式可证明此时任何一个分量只有 0 解，即所有 $\alpha=\mathbf{0}$，矛盾。

6. (1) $c_0=\det(A)$，由 5.2 节定理 5.6-1，$A^n(n\in\mathbb{Z})$ 的每个特征值为 A 的每个特征值对应作 n 次方，由此直接计算特征多项式得结果。

(2) 注意到 $c_1=\operatorname{tr}(A^*)$，因此其 n 次与 $n-1$ 次项必为 $x^n+(-1)^nc_1x^{n-1}$，利用 4.1 节习题 7 可得 A 不可逆时，$\operatorname{rank}(A^*)\le1$，类似 3.2 节习题 6(1) 知 0 的代数重数至少为 $n-1$，因此其只能为 $x^n+(-1)^nc_1x^{n-1}$。

7. (1) 记右式中最大值为 M，若否，$\left|\sum_{k=0}^{n-1}c_k\lambda^k\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}|c_k\lambda^k\|\le\sum_{k=0}^{n-1}|M\lambda^k|=M\dfrac{|\lambda|^n-1}{|\lambda|-1}\le|\lambda|^n-1<|\lambda^n|$，矛盾。

(2) 记右式中最大值为 M，若否，$\left|\sum_{k=0}^{n-1}c_k\lambda^k\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}|c_k\lambda^k|\le\sum_{k=0}^{n-1}|M^{n-k}\lambda^k|=M\dfrac{|\lambda|^n-M^n}{|\lambda|-M}<|\lambda|^n-M^n<|\lambda|^n$，矛盾。

(3) 若否，$\lambda I-A$ 的行列式严格行对角优，利用 2.4 节习题 12 可知不为 0。

8. 右推左：$f=g\Rightarrow A=B\Rightarrow A,B$ 相似。

左推右：由于 A,B 相似，特征多项式必相同。又由 Laplace 展开知 $\varphi_A(x)=f(x),\varphi_B(x)=g(x)$，因此 $f=g$。

9. 由条件知 $(\lambda I-A)(\lambda I-B)=\lambda(\lambda I-A-B)$，直接计算可得结论。

10. (1) 类似 3.2 节习题 6(1) 可知特征根为 $n-1$ 重 0 与 $\mathrm{tr}(A)$，由此知结论。

(2) 由 $\mathrm{rank}(A)=1$ 知 0 的几何重数为 $n-1$，因此可对角化等价于 0 的代数重数为 $n-1$，即 $\mathrm{tr}(A)\neq 0$(否则代数重数为 n)。

(3) 讨论是否为 0 可知结论成立 (均为 0 时可用 Jordan 标准形说明相似)。

11. (1) 利用 3.2 节例 3.12 可直接得结论。

(2) 设 $A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q, B=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}P^{-1}$ (PQ 可逆)，由条件算得 $\mathrm{rank}(B_1)=r$，即 B_1 可逆。计算得

$$\begin{pmatrix}I & B_1^{-1}B_2\\ O & I\end{pmatrix}P^{-1}ABP\begin{pmatrix}I & -B_1^{-1}B_2\\ O & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\ -B_3B_1^{-1} & I\end{pmatrix}QBAQ^{-1}\begin{pmatrix}I & O\\ B_3B_1^{-1} & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

因此 AB, BA 相似。

(3) 设 $A=P\begin{pmatrix}I & O\\ O & O\end{pmatrix}Q, B=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}P^{-1}$ (PQ 可逆)，由条件 $\mathrm{rank}(B_1)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$。利用 4.2 节例 4.6 知存在 X,Y 使得 $B_1X=B_2, YB_1=B_3$，计算得

$$\begin{pmatrix}I & X\\ O & I\end{pmatrix}P^{-1}ABP\begin{pmatrix}I & -X\\ O & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\ -Y & I\end{pmatrix}QBAQ^{-1}\begin{pmatrix}I & O\\ Y & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

因此 AB, BA 相似。

(4) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

12. 利用 3.2 节例 3.11 可得 $\varphi_{H^n}(x)=\det\big((xI-H_{n-1})^2-I\big)=\det\big((x+1)I-H_{n-1}\big)\big((x-1)I-H_{n-1}\big)=\varphi_{H^{n-1}}(x+1)\varphi_{H^{n-1}}(x-1)$，归纳可得特征值为 C_n^k 个 $n-2k(0\leq k\leq n)$。

13. (1) 利用习题 7(3) 可知特征值的模 ≤ 2，设为 $2\cos\theta$，归纳可得 $\det(2\cos\theta I-A)=\dfrac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}$，由此解出全部特征值知分解成立。

(2) 利用习题 7(3) 可知特征值 $\in[0,4]$，设为 $2\cos\theta+2$，归纳可得 $n>1$ 时 $\det((2\cos\theta+2)I-A)=(2\cos\theta+2)\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$，由此解出全部特征值知分解成立。

(归纳式的由来可以用 (1) 的结果算出)

14. (1) 令 S 的第 i 行第 j 列为 C_i^j(此处 i,j 均可取 0，规定 $\mathrm{C}_0^0=1$，$j>i$ 时 $\mathrm{C}_i^j=0$)，可证明 $S^{-1}AS=\begin{cases}i-n & i=j-1\\ 0 & i\neq j-1\end{cases}$，由相似阵的特征多项式相同可直接得结论。

(2) $S^{-1}BS=\begin{cases}(n-2i)^2 & i=j\\ 2(i-n)(2i+1) & i=j-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，由此直接计算可得结果。

* 关于计算细节：可验证 $S^{-1}=\big((-1)^{i-j}\mathrm{C}_i^j\big)$，而计算核心为公式 $\sum\limits_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\mathrm{C}_i^k\mathrm{C}_k^j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ (具体计算相关的知识点为离散数学中组合数计算)

15. (1) 由定义直接验证即可。

(其余答案暂缺)

16. * 谱半径 $\rho(A)$ 定义见 5.3 节习题 11，为 A 的特征值模长最大值，即为此题的 $|\lambda_1|$

* 矩阵范数定义见 6.3 节例 6.7

* 定义实向量与矩阵之间的 $<,\leq,>,\geq$ 代表每个分量对应满足条件

(1.1) 对非负矩阵 A，$\rho(A)$ 为 A 特征值 (称其为非负矩阵 A 的最大特征值)。

任意非负矩阵，可以写为一列正矩阵的极限 (矩阵极限即为按分量极限)，而由于特征多项式亦为极限，特征值也为极限，由极限保序性，我们只需要说明对 $A>O$ 结论成立。由于矩阵整体数乘正数不影响题中性质，不妨设 $\rho(A)=1$。

设 α 为 λ_1 对应的特征向量，各分量为 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$，取 $\beta=\begin{pmatrix}|\alpha_1| & \dots & |\alpha_n|\end{pmatrix}^T$，有 $\beta\geq\mathbf{0}$ 且不可能为 $\mathbf{0}$，下证 β 是 A 的对应 1 的特征向量，由此即有 $\lambda_1=1$。

由条件，$\forall k,\lambda_1\alpha_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\alpha_i$，取模即有 $|\alpha_k|\leq\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{ki}|\alpha_i|$，因此 $\beta\leq A\beta$，也即 $(A-I)\beta\geq\mathbf{0}$，若等号成立则已得证，否则，由于 $A>0$，$A(A-I)\beta>\mathbf{0}$，因此存在正实数 b 使 $A(A-I)\beta\geq bA\beta$，即 $A^2\beta\geq(b+1)A\beta$。

令 $B=\dfrac{A}{b+1}$，则 $BA\beta\geq A\beta$，递推知 $\forall k,B^kA\beta\geq A\beta$。但由于 $\rho(B)=\dfrac{1}{b+1}<1$，由 5.3 节习题 11 得 $\lim\limits_{k\to\infty}B^k=O$，由此只能 $A\beta=\mathbf{0}$，由假设 $\beta=\mathbf{0}$，故 $\alpha=\mathbf{0}$，矛盾。

因此，$\rho(A)\beta=A\beta$，即 β 是 A 的对应 1 的特征向量，$\lambda_1=1$。

(2.1) 不可约矩阵中最大特征值对应的某个特征向量各分量同正。

在 (1.1) 中，已经取出了最大特征值对应的一个非负特征向量 β，下面证明，对不可约矩阵 A 与非负非零向量 β，$\exists m,A^m\beta>\mathbf{0}$，又由 $A^m\beta=\rho(A)^m\beta$ 可知 $\beta>\mathbf{0}$，因此 β 各分量同正或同负。

步骤一：对不可约矩阵 A，存在 s 使 A^s 对角元均为正。

我们回到图论。回忆 2.4 节习题 14 证明过程中说明的，不可约矩阵等价于其对应的图强连通，即任意两点可以互相到达。

由于这里的“任意两点”可以取为同一点，可以设点 i 通过 m_i 步可以到达自身 (回忆证明过程中的结论，此即表示 A^{m_i} 的第 i 行第 i 列为正)，由此，取 $s=\mathrm{lcm}(m_1,\dots,m_n)$，容易发现，每点均可以通过 s 步到达自身，也即 A^s 对角元全为正。由此，将 A^s 记为 B。

步骤二：若非负非零向量 β 恰好有 $k<n$ 个分量为正，则 $B\beta$ 至少有 $k+1$ 个分量为正。由于置换不影响结论，不妨设 $\beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$，其中 $\beta_0>\mathbf{0}$。设 B 对应分块为 $\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$，则由于 B 对角元均正，$\exists\varepsilon,B-\varepsilon I$ 对角元均正，其仍为不可约阵，设 $B-\varepsilon I$ 对应分块为 $\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$，则 $B\beta=\varepsilon\begin{pmatrix}\beta_0\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1\beta_0\\ B_3\beta_0\end{pmatrix}$，由 $\varepsilon\begin{pmatrix}\beta_0\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$ 部分可知 $B\beta$ 至少有 k 个分量为正，若不足 $k+1$，则 $B_3\beta_0=O$，由于 $\beta_0>\mathbf{0}$，只有 $B_3=O$，与 $B-\varepsilon I$ 不可约矛盾。

步骤三：归纳可知 $B^{n-1}\beta>\mathbf{0}$，即 $A^{s(n-1)}\beta>\mathbf{0}$，原命题得证。

(1.2) 不可约阵中最大特征值的代数重数为 1。

步骤一：不可约阵中最大特征值对应的 Jordan 块均为一阶。

继续假设 $\rho(A)=1$。这即是需要证明，1 对应的所有 Jordan 块均为 $J_1(1)$。

设 A 对应 1 的某个特征向量为 α，由 (2.1) 知可取 $\alpha > \mathbf{0}$，且有 $A\alpha = \alpha \Rightarrow A^k\alpha = \alpha$。令 α 最大分量为 x，最小分量为 y，则考虑 $A^k\alpha = \alpha$ 左右各分量有 $x \geq \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\alpha_j \geq a_{ij}^{(k)}\alpha_j \geq a_{ij}^{(k)}y$，其中 $a_{ij}^{(k)}$ 表示 A^k 中第 i 行第 j 列的元素。由此可得，A^k 中任意元素 $\leq \dfrac{x}{y}$，也即有界。

若 1 对应的某个 Jordan 块为 $J_s(1), s > 1$，则存在 P 使 $P^{-1}AP$ 为其 Jordan 标准形，不妨设第一个对角块即为 $J_s(1)$，则其 k 次方中第一行第二列为 k，且前两个对角元仍为 1，因此 $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ 无界，考虑 $||A||_F$ 计算可知与 A^k 有界矛盾。

步骤二：不可约阵中最大特征值的代数重数为 1。

由 2.4 节习题 14(1)，对特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的不可约矩阵 A，$\exists\lambda, (\lambda I - A)^{-1} > O$，且证明过程中已经说明了，对充分大的 λ 有 $(\lambda I - A)^{-1} > O$。因此，可取 $\lambda > \rho(A)$。计算可知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 的每个特征值为 $\dfrac{1}{\lambda - \lambda_i}$，且对应的特征向量一致。由于 $(\lambda I - A)^{-1}$ 的最大特征值为实数，其对应的 λ_i 也必为实数，又由于 λ 充分大，若实特征值 $\lambda_i > \lambda_j$，有 $\dfrac{1}{\lambda - \lambda_i} > \dfrac{1}{\lambda - \lambda_j}$。因此，$(\lambda I - A)^{-1}$ 的最大特征值即对应 A 的最大特征值。也即，只需证明对所有 $A > O$ 满足题述性质即可。

继续假设 $\rho(A) = 1$。(2.1) 中说明，特征值 1 对应一个正特征向量 β，设其分量为 $\beta_1, \ldots, \beta_n$。若结论不成立，不妨设 A 中 1 的代数重数为 $r > 1$，由于对应的 Jordan 块均一阶，由 5.3 节定理 5.12，其几何重数亦为 r，再由定理 5.2-5 知 1 对应的特征向量空间的维数为 $r > 1$。

由于 $A - I$ 为实方阵，$(A - I)x = \mathbf{0}$ 的解空间的基可以取为实数，由此可取出与 β 线性无关的实特征向量 α，设其分量为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$。令 $t = \max\limits_{1\leq i\leq n} \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$，由于 $\beta_i > 0$，可知 $t\beta - \alpha \geq \mathbf{0}$，但 $t\beta - \alpha$ 为 A 对应 1 的特征向量，由于 $A > O$，$A(t\beta - \alpha) = t\beta - \alpha$，知 $t\beta - \alpha > \mathbf{0}$。然而，$t = \max\limits_{1\leq i\leq n} \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$，因此 $t\beta - \alpha$ 必有分量为 0，矛盾。

由此可知，A 中 1 的几何维数为 1，又因最大特征值对应的 Jordan 块均为一阶，从而代数维数为 1，从而原结论成立。

(2.2) 不可约矩阵中最大特征值对应的一切特征向量各分量同号。

由 (1.2) 已知其特征向量空间维数为 1，因此所有特征向量为 (2.1) 中 β 的非零实数倍，因此各分量同号。

(3) 利用习题 7(3) 可知 $\rho(A) \leq 1$，列变换可知 1 为特征值，故得证。

(4) 左推右：

引理：A 为非负矩阵，$\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k}$

引理证明：定义 $A_+ = \dfrac{1}{\rho(A) + \varepsilon}A, A_- = \dfrac{1}{\rho(A) - \varepsilon}A$，计算可知 $\rho(A_+) < 1 < \rho(A_-)$。类似 5.3 节习题 11 做法可得，对非负矩阵 B，$\rho(B) > 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} ||B^k|| = +\infty, \rho(B) < 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} ||B^k|| = 0$。由此，$\exists N, \forall k > N, ||A_+^k|| < 1 < ||A_-^k||$。于是 $(\rho(A) - \varepsilon)^k < ||A^k|| < (\rho(A) + \varepsilon)^k$，因此 $\forall\varepsilon, \exists k, \left|\rho(A) - ||A^k||^{1/k}\right| < \varepsilon$，故引理成立。

继续假设 $\rho(A) = 1$，设特征值 λ 模长为 1。

若 $\lambda \neq 1$，设其实部为 $\cos\theta$(由于不关注虚部，不妨设 $\theta \in [0, \pi]$)，则 $\mathrm{Re}(\lambda^n) = \cos n\theta$。若 $\theta \neq 0$，对每个自然数 k，必有 n 使 $n\theta \in \left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos n\theta < 0$(此处可用数轴理解：每步长度固定且 $\leq \pi$，走过长度为 π 的区域时必会落入)，由此 $\forall N, \exists m > N, \mathrm{Re}(\lambda^m) < 0$(取充分大的 k 即有充分大的 m)。

由于 A 本原，$\exists t, \forall n > t, A^n > O$。取某个 $m > t$，再取一充分小正数 ε 满足 $A^m - \varepsilon I > 0$，直接计算可发现，$\lambda^m - \varepsilon$ 是 $A^m - \varepsilon I$ 的特征值，且由于 $\mathrm{Re}(\lambda^m) < 0$，$|\lambda^m - \varepsilon| > |\lambda^m| = 1$。

可证明 $\sqrt{1+\varepsilon^2} < |\lambda^m - \varepsilon| \le \rho(A^m - \varepsilon I)$，因此 $\rho(A^m - \varepsilon I) > 1$。

(不等号 1：λ^m 与 $-\varepsilon$ 看作复平面向量，夹角 $< \dfrac{\pi}{2}$，故其和的模长大于夹角恰为 $\dfrac{\pi}{2}$ 时的模长。

不等号 2：由于 $\lambda^m - \varepsilon$ 是 $A^m - \varepsilon I$ 的特征值，由定义，模长小于等于最大模长。)

另一方面，由于 $A^m - \varepsilon I$ 每个元素对应小于等于 A^m 且不全相等，计算可知 $(A^m - \varepsilon I)^k$ 与 A^{mk} 仍保持此性质。

$\forall B > O, \exists \alpha > \mathbf{0}$ 使 $||B\alpha||$ 取到最大值 (将 α 某位变号不影响 $||\alpha|| = 1$，变为全同号时模长不会减小)。由上述性质，$\forall \alpha > \mathbf{0}, ||(A^m - \varepsilon I)^k \alpha|| < ||A^{mk}\alpha||$，于是 $||(A^m - \varepsilon I)^k|| < ||A^{mk}|| \Rightarrow ||(A^m - \varepsilon I)^k||^{1/k}$ $< ||A^{mk}||^{1/k}$。取极限即有 $\rho(A^m - \varepsilon I) \le \rho(A^m)$。

但由特征值性质，$\rho(A^m) = \rho(A)^m = 1$，故 $\rho(A^m - \varepsilon I) \le 1$，矛盾。这个矛盾说明，对任何模长为 1 的特征值 λ，其值必为 1，再结合 (1)，由 2.4 节习题 14(1) 知本原阵必然不可约，即知左推右成立。

[**推论**不可约矩阵的模长为 $\rho(A)$ 的特征值一定为 $\rho(A)$ 乘以单位根

注意到，上一部分中的证明其实对所有对角元均为正的非负矩阵均成立，因此我们得到，对角元均为正的非负矩阵满足模长为 $\rho(A)$ 的特征值只能为最大特征值。

由第二小问证明中的步骤 1，对不可约矩阵 A，存在 m 使 A^m 对角元均为正。由此运用 5.2 节定理 5.6-1，A^m 的特征值为 A 特征值对应 m 次方，而 A^m 满足 $|\lambda| = \rho(A^m)$ 的特征值只能为最大特征值，$\rho(A^m) = \rho(A)^m$，因此对 A 的每一个模长为 $\rho(A)$ 的特征值 λ 有 $\lambda^m = \rho(A^m) = \rho(A)^m$，因此原命题得证。]

右推左 (题目表述不严谨，需要 A 不可约为条件)：

反证。若 A 不为本原，可化为 2.4 节习题 14(4) 形式 (注意 $m \ge 2$)。则此时计算可知，A^m 为非负准对角阵 $\mathrm{diag}\,(A_1A_2\ldots A_m, A_2A_3\ldots A_1, \ldots, A_mA_1\ldots A_2)$，由于任意两个不同对角元都可看成 AB 与 BA，利用 3.2 节例 3.12 即知所有对角元非零特征值完全相同，因此，每个对角块模最大的特征值完全相同，因此 A^m 中模最大特征值的重数至少为 m，而 A^m 的模最大特征值均为 A 模最大的特征值，即模长 $\rho(A)$ 的特征值至少有 m 个，矛盾。

§5.2　相似三角化

1. (1) 利用上三角方阵多项式下的特性可说明。

   (2) 直接考虑上三角方针的形式即可。

   (3) 由上三角方阵逆仍然为上三角方阵可推知。

   (4) 考虑对角线含 0 的上三角阵在幂次后的情况即可。

   (5) 拆分上三角方阵可发现秩的关系，从而得证。

2. 法一：由 5.1 节定理 5.2 及韦达定理得 $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 - 2\sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\lambda_j = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)^2 - 2\sum_{1\le i<j\le n}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}a_{ji}$

   法二：A^2 特征值为一切 λ_i^2，因此 $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}a_{ji}$

3. (1) 由 f 形式，设乘积为 $g_0(x)$，则有 $g_0(x) = g_0(\omega x)$，由此解出 $g_0(x) = g(x^m)$。

(2) 相似三角化知，设 $\varphi_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$，则 $\varphi_B(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i^m)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(x^{1/m}-\omega^k\lambda_i)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}\omega^k(\omega^k x^{1/m}-\lambda_i)=\omega^{nm(m-1)/2}\prod_{i=1}^{n}\varphi_A(\omega^k x^{1/m})$，注意到 $\omega^{m/2}=-1$ 即得结论。

4. 等式两边右乘 P 后计算左下角可得 $BP_3=P_3A$，利用定理 5.8 知 $BP_3-P_3A=O$ 有唯一解，且 $P_3=O$ 为解，由此知命题成立。

5. (1) $A\alpha\beta^T-\alpha\beta^T B=\lambda_1\alpha\beta^T-(\mu_1\beta\alpha^T)^T=(\lambda_1-\mu_1)X=O$

(2) 仅当：由 (1) 与 B,B^T 特征值相同可知。

当：由定理 5.8 知唯一性。由 $\varphi_B(A)$ 为 A 的多项式，其与 A 可交换。由定理 5.6-2 知 $\varphi_B(A)$ 可逆，逆亦与 A 可交换，故

$$\varphi_B(A)(AX-XB)=\sum_{i,j\geq 0}b_{i+j+1}(A^{i+1}CB^j-A^iCB^{j+1})=\sum_{k=0}^{n}b_k(A^kC-CB^k)$$
$$=\varphi_B(A)C-C\varphi_B(B)=\varphi_B(A)C$$

(3) 仅当：若 $\lambda_1\mu_1=1$，类似 (1) 取 $X=\alpha\beta^T$ 即为 $X-AXB=O$ 的解。

当：利用 2.2 节例 2.11 方式将方程表示为线性方程组 $(I-A\otimes B^T)x=y$，则方程存在唯一解 $\Leftrightarrow I-A\otimes B^T$ 可逆 $\Leftrightarrow A\otimes B^T$ 特征值无 1，而相似三角化知 $A\otimes B^T$ 所有特征值为一切 $\lambda_i\mu_j$，由此得证。

6. 相似三角化可得，设 $\varphi_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$，则 $\varphi_{A^m}(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i^m)$，由此成立。

7. (1) 特征值满足 $\lambda^2=\lambda$，只能为 0,1，考虑将 A 相似三角化后形成定理 5.9 形式，所得上三角方阵 B 满足 $B^2=B$，先通过计算证明主对角线上方的 $j=i+1$ 对角线上全为零，同理向上归纳可知除主对角线外必然全为 0，由此 B 为对角阵，原命题得证。

(或利用 5.3 节 Jordan 标准形可直接计算结果)

(2) 特征值满足 $\lambda^3=\lambda$，只能为 $0,\pm1$，考虑将 A 相似三角化后形成定理 5.9 形式，所得上三角方阵 B 满足 $B^3=B$，类似 (1) 归纳可知 B 必然为对角阵，由此得证。

(3) 考虑将 A 相似三角化后形成定理 5.9 形式，所得上三角方阵 B 满足 $B^k=B$，类似上方讨论可知结果。

8. (1) 直接归纳计算可得结论。

(2) * 此处证明实方阵的情况，对一般情况，由于多项式友方阵均为 Hessenberg 方阵，利用 5.5 节定理 5.18 第一步证明即可。

由于 $\varphi_A(x)$ 为实系数多项式，其虚根必成对出现 (即 $a+b\mathrm{i}$ 为根 $\Rightarrow a-b\mathrm{i}$ 为根)。

设 A 特征值为 $c_1,\dots,c_k,a_1\pm b_1\mathrm{i},\dots,a_l\pm b_l\mathrm{i},a_j,b_j,c_j\in\mathbb{R}$，下证 A 与对角元为 $c_1,\dots,c_k,\begin{pmatrix}a_1&b_1\\-b_1&a_1\end{pmatrix}$, $\dots,\begin{pmatrix}a_l&b_l\\-b_l&a_l\end{pmatrix}$ 的广义上三角方阵 (此方阵即为 Hessenberg 方阵) 相似。

使用归纳法。$n=1$ 显然成立。$n\geq 2$ 时，若存在实特征值 c，直接以定理 5.5 方式即可化为三角阵。若否，设其存在特征值 $a\pm bi,a,b\in\mathbb{R}$，且 $a+bi$ 对应的特征向量为 λ。可以验证，$\overline{\lambda}$(对 λ 的每一个元素取共轭) 为 $a-bi$ 的一个特征向量。由于特征值不同，两特征向量线性无关，存在以 $\mathrm{Re}(\lambda),\mathrm{Im}(\lambda)$

(对每一个元素取实部、虚部) 为前两列的可逆实方阵 P，计算可验证 $AP=P\begin{pmatrix} a & b & * \\ -b & a & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ (利用 $\operatorname{Re}(\lambda)=\dfrac{\lambda+\overline{\lambda}}{2},\operatorname{Im}(\lambda)=\dfrac{\lambda-\overline{\lambda}}{2i}$)，故满足归纳假设。

9. 归纳。二阶时，设 A 的对角元素为 x,y，分类讨论。

   若 $a_{12}\neq 0$ ($a_{21}\neq 0$ 同理)，则此时取 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{a_1-x}{a_{12}} & 1 \end{pmatrix}$ 即可。

   若 $a_{12}=a_{21}=0$，由条件知 $x\neq y$，则 $T_{12}(1)AT_{12}(-1)$ 即化为前一种情况。

   若 $n-1$ 阶时成立，考虑 n 阶时，设 $a_{11}=x$。仍分类讨论。

   若 A 不为对角阵，不妨设 $a_{12}\neq 0$，先以 $P=T_{21}\left(\dfrac{a_1-x}{a_{12}}\right)$ 作相似，则 $C=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a_1 & * \\ * & B \end{pmatrix}$。

   此时若 B 不为纯量方阵，由归纳假设取 Q 使 $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} a_2 & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & a_n \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ 即满足要求。

   若否，$C=\begin{pmatrix} a_1 & * \\ * & kI \end{pmatrix}$。若 C 不为对角阵，设 $a_{12}\neq 0$，计算得 $T_{13}(-1)T_{32}\left(\dfrac{a_{13}}{a_{12}}\right)CT_{32}\left(-\dfrac{a_{13}}{a_{12}}\right)T_{13}(1)$ 首个对角元仍为 a_1 且 $a_{32}\neq 0$，B 已经不为纯量方阵，因此可类似构造 Q。若 C 为对角阵，类似二阶时构造出非零项即可。

   若 A 为对角阵，由条件 A 对角元不可能全相同，类似二阶时化为上一种情况即可。

10. (1) 先说明两个方阵时的请况：

    $AB=BA,A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow AB\alpha=\lambda B\alpha$，因此，对 A 的每个特征向量 α，$B\alpha$ 也是 A 的特征向量。由于任意多项式 f，$f(B)A=Af(B)$，因此 $f(B)\alpha$ 也是 A 的特征向量。设 $d_{B,\alpha}=\prod\limits_{i=1}^{s}(x-\mu_i)^{t_i}$(定义见 5.4 节，由于 $\alpha\neq\mathbf{0}$，f 次数至少为 1)，取 $f=\dfrac{d_{B,\alpha}}{x-\mu_1}$，则此时 $Bf(B)\alpha=\mu_1 f(B)\alpha$，故 $f(B)\alpha$ 即为公共特征向量。

    接着将情况归纳至有限多个方阵 (k 个方阵时成立推 $k+1$)：

    设 α 是 $A_1,\dots A_k$ 的公共特征向量，考虑类似之前构造的 $f=\dfrac{d_{A_{k+1},\alpha}}{x-\mu_1}$，$f(A_{k+1})\alpha$ 即为公共特征向量。

    最后反证任意指标集 I 的情况：

    若 $\{A_i\}$ 可互相交换，可说明 $\operatorname{Span}\{A_i\}$ 可互相交换 (定义见 8.2 节)，由于 $\operatorname{Span}\{A_i\}\subset M_n(\mathbb{C})$，其基 (定义见 8.3 节) 必然有限，利用上一种情况知其基具有共同的特征向量，计算发现此时 $\operatorname{Span}\{A_i\}$ 具有共同的特征向量，因此 $\{A_i\}$ 具有共同的特征向量。

    (2) 类似定理 5.5 进行归纳，每次取 P 的第一列为公共特征向量，直接计算可验证每次相似后的 B_i 仍然两两可交换，由此即可证明。

    (3) 对任意数域，在其代数闭包 (任何多项式可分裂的扩域上存在共同的特征向量。

§5.3 Jordan 标准形

1. (1) $J_1(1),J_1(1),J_1(1),J_1(-1),J_1(-1)$

(2) $J_3(1), J_2(-1)$

(3) $J_2(1), J_1(1), J_2(-1)$

(4) $J_3(1), J_2(-1)$

(5) $J_3(1), J_1(-1), J_1(-1)$

(6) $J_1(1), J_1(1), J_1(1), J_1(-1), J_1(-1)$

2. (1) 由于重数为相似不变量，直接计算即可。

   (2) 对角阵为 Jordan 标准形的形式，由此知结论。

   (3) 由 5.4 节习题 7 可知 Jordan 块的最小多项式即为特征多项式，结合 5.3 节定理 5.13-3 得结论。

3. 由于相似不影响结论，可设 A 已相似成 Jordan 标准形。又因对角块可以分别计算，只需考虑一个对角块。

   因此，只需说明 $J_n(1)$ 与 $J_n(1)^k$ 相似。直接计算可知 $J_n(1)^k$ 中 1 的代数重数为 n，几何重数为 1，由此知相似。设 $P_n^{-1}J_n(1)P_n = J_n(1)^k$ (P_n 可逆)，组合即可得原结论。

4. 由相似知 A^i 与 A^j 特征值相同，设 A 特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$，由可逆知无 0，则 $\lambda_1^i, \ldots, \lambda_n^i$ 与 $\lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j$ 只相差排列。对任意 λ，设 $\lambda^i = \lambda_{a_1}^j, \lambda_{a_1}^i = \lambda_{a_2}^j, \ldots$ 由于特征值数量有限，必有 $\lambda_{a_s}^i = \lambda^j$，由此算得 $\lambda^{i^{s+1}-j^{s+1}} = 1$，由于 $s+1 \le n$，可知 $i^{s+1} - j^{s+1} \mid i^{n!} - j^{n!}$，因此 $\forall \lambda, \lambda^{i^{n!}-j^{n!}} = 1$，从而 $i^{n!} - j^{n!}$ 就是所求一个的 k。

5. 由于相似不影响结论，可设 A 已相似成 Jordan 标准形。

   利用 A^2 与 A 特征值关系，结合习题 4 知知特征值只能为 0 或单位根，若为 0，计算可得当 $n > 1$ 时，$J_n(0)^2$ 的最大 Jordan 块小于 $J_n(0)$，由此考虑特征值 0 的最大 Jordan 块可知其特征值 0 的 Jordan 块只能为若干个 $J_1(0)$。

   ω 为 k 次本原单位根时可计算出，$J_n(\omega)^2$ 的 Jordan 标准形为 $J_n(\omega^2)$，由此，A 的相似标准形中除 0 外的 Jordan 块一定可以分组为若干的 $J_n(\omega), J_n(\omega^2), \ldots, J_n\big(\omega^{2^{s-1}}\big)$ $\big(\omega^{2^s} = \omega\big)$。

6. 计算可发现，将 B 按照 A 形式分块后，所得 B_{ij} 为 $n_i \times n_j$ 阶矩阵，需满足 $J_{n_i}(0)B_{ij} = B_{ij}J_{n_j}(0)$，因此只需寻找满足 $J_a(0)X = XJ_b(0)$ 的 $a \times b$ 阶矩阵，计算得 X 须满足：$i - j$ 不变时 x_{ij} 不变 (即每条与主对角线平行的对角线元素相同)，且 $i - j > \min(a, b) - b$ 时 $x_{ij} = 0$。

7. 由于相似不影响结论，可设 A 已相似成 Jordan 标准形。

   设 $A = \operatorname{diag}(J_{n_1}(a_1), \ldots, J_{n_k}(a_k))$($a_i$ 可能相同)，由于 $\operatorname{diag}(I_{n_1}, 2I_{n_2}, \ldots, kI_{n_k})$ 与 A 可交换，直接计算发现 B 必然可写成 $\operatorname{diag}(B_{n_1}, B_{n_2}, \ldots, B_{n_k})$。

   由于 A, B 可交换，$J_{n_i}(a_i)B_{n_i} = B_{n_i}J_{n_i}(a_i)$，由于 $J_{n_i}(a_i)$ 的特征多项式与最小多项式相同，利用 5.4 节例 5.17 知 $B_{n_i} = f_i(J_{n_i}(a_i))$，$f_i$ 为多项式。

   当 A 特征值均为 a 时，设有 $n_1 \le \cdots \le n_k$。考虑 C 为按照 A 分块后，$C_{12} = \begin{pmatrix} I & O \end{pmatrix}$，其余均为 0 的矩阵，计算知此矩阵与 A 可交换，代入 $BC = CB$ 知 $f_1(J_{n_1}(A)) = f_2(J_{n_1}(A))$。因此，$d_{J_{n_1}(A)} = \varphi_{J_{n_1}(A)} = (x-a)^{n_1} \mid f_1 - f_2$。同理可知，$\forall i < j, f_i - f_j \mid (x-a)^{n_i}$。由此，所求 $f \equiv f_i \mod (x-a)^{n_i}$，取 $f = f_k$ 即可。

   当 A 有不同特征值时，先对每个特征值的部分进行上述构造，由于不同特征值处对应的特征多项式互素，直接利用多项式中国剩余定理可得到最终的 f。

8. 由于相似不影响结论，可设 A 已为 Jordan 标准形，此时 $B = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{b_1}, \lambda_2 I_{b_2}, \ldots, \lambda_t I_{b_t})$ 为对角元素构成的方阵，λ_i 互不相同，$C = A - B$，计算验证可知合理。下面证明这样的分解唯一。

对任意方阵 A，设有满足条件的分解 $A=B+C$，令 $B'=P^{-1}BP=\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{b_1},\lambda_2 I_{b_2},\dots,\lambda_t I_{b_t})$，$\lambda_i$ 互不相同。设 $P^{-1}AP=A',P^{-1}CP=C'$，则 $B'C'=C'B'$，可算得 $C'=\mathrm{diag}(C_{b_1},C_{b_2},\dots,C_{b_n})$（其中 C_{b_i} 为 b_i 阶方阵）。由于 C 幂零，任意 C_{b_i} 均幂零。注意到，若 $Q=\mathrm{diag}(Q_{b_1},Q_{b_2},\dots,Q_{b_n})$（其中 Q_{b_i} 为任意 b_i 阶可逆方阵），则 $Q^{-1}B'Q=B'$。由此，取 Q_{b_i} 使 $Q_{b_i}^{-1}C_{b_i}Q_{b_i}$ 为 C_{b_i} 的相似标准形，利用 Q 相似即可得 $A''=B'+C''$。考察此时形式可知，A'' 为 A 的相似标准形，唯一确定。

若还有 $A=B_0+C_0$，由之前讨论可知，存在可逆方阵 T 使得 $A=T^{-1}AT,B=T^{-1}B_0T$。由 $A=T^{-1}AT$ 知 $AT=TA$，因此 T 与 A 可交换。类似习题 6 可验证此时 T 必然可写成 $\mathrm{diag}(T_{b_1},T_{b_2},\dots,T_{b_n})$，由此 $TB=BT\Rightarrow B_0=B$，唯一性得证。

9. (1) 由于相似不影响结论，可设 A 已相似成 Jordan 标准形。

   特征值不为 0 的部分，由例 5.15 知可找到 B，故是否存在仅与 $J_{n_i}(0)$ 的情况相关，可不妨设 A 特征值只有 0，若 B 存在，也必然只有 0 特征值。

   利用类似 4.2 节习题 11(4) 的构建方法，可以证明：

   令 $n=qm+r(q,r\in\mathbb{N},0\le r\le m-1)$，则 $J_n(0)^m$ 的标准形为 r 个 $J_{q+1}(0)$ 与 $m-r$ 个 $J_q(0)$

   由此，1 推 2 直接成立，按原本每个 $J_n(0)$ 生成的 $J_{q+1}(0),J_q(0)$ 排为一列即可。反之，2 推 1 时，由于每列的 q,r 确定，也可直接构造出对应的 n (由于每列有 m 个数，可使 $0\le r\le m-1$)。

   (2) 由于 5.5 节习题 3，在上一题条件下，由 5.5 节例 5.21 类似得：

   若 m 为奇数则必然可相似，m 为偶数时，再保证 A 中特征值为负实数的 Jordan 块成对出现 (指必须两个一模一样) 即可。

   大致思路为：两个复特征值互相共轭的相同大小 Jordan 块可以“合成”一个例 5.21 中右侧的 A_i。A 中的 Jordan 块有四种情况：本来为正实数，可直接找到对应次方根后与复方阵相同构造；本来为共轭复数合成的块，在方根后仍可以共轭复数合成；本来为 0，则满足的条件与复方阵所需的相同。本来为负实数，则 m 为奇数时与正实数无区别，m 为偶数时，若不能找到配对，则无法合成，因此无法找到全为实数的 B 与其方根相似；找到配对后，由于共轭复数幂次的实部相同，将两个块的次方根取为一对共轭复数，即可实现合成。

10. $\left(1+\dfrac{1}{k}A\right)^k=I+\displaystyle\sum_{t=1}^{k}\frac{A^t}{t!}\prod_{s=0}^{t-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)$，由分析知识可计算得原式成立。

11. (1) 充分性：A^k 有特征值 λ^k，由 $\rho(A)<1$ 可知 A^k 一切特征值极限为 0。考虑 Jordan 标准形的幂次极限即可知结论。

    必要性：零矩阵一切特征值为 0，若有特征值 $|\lambda|\ge 0$，λ^k 极限不为 0，矛盾。

    (2) 同样只需考虑 Jordan 标准形时的情况，且由分块矩阵的特点，只需考虑一个对角块，此时此对角块的 $\rho(A)$ 即为对角元 λ。

    记幂级数为 f，可直接算出 $f(J_n(\lambda))=\begin{cases}\dfrac{f^{(m)}(\lambda)}{m!} & j=i+m\\ 0 & j<i\end{cases}(m\ge 0,f^{(m)}$ 指 m 阶导数)，因此只需证明 f' 的收敛半径与 f 相同，此结论将在分析中证明。

12. (1) 由 5.2 节定理 5.6-1 知，若要 e^X 特征值全为 1，则 X 的所有特征值需满足 $e^\lambda=1$，因此 $\lambda=2k\pi\mathrm{i}$ ($k\in\mathbb{Z}$)。由于 $P^{-1}e^XP=e^{P^{-1}XP}$，只需考虑 X 的相似标准形。

    利用习题 11 结论知 $\mathrm{e}^{J_n(\lambda)}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^\lambda}{m!} & j=i+m\\ 0 & j<i\end{cases}$ ($m\ge 0$)。由于其为 I，可知阶数 n 只能为 1。

又由于所求 X 为实方阵，$2k\pi\mathrm{i}$ 与 $-2k\pi\mathrm{i}$ 必然成对出现，由此，所求的所有 X 在 $\mathbb{R}$ 上的相似标准形 (定义见 5.5 节) 为 $\mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_t, O)$，其中每个 A_i 为 $\begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix}$，$k$ 为正整数，O 为任意阶零方阵。

(2) 由计算结果可发现，$e^{J_n(\lambda)}$ 相似于 $J_n(\mathrm{e}^{\lambda})$，因此，类似习题 9 讨论可知，只要 A 可逆 ($\mathrm{e}^x = 0$ 在复数域中无解) 且相似标准形中特征值为负实数的 Jordan 块均成对出现 ($\mathrm{e}^x < 0$ 无实数解)，就能找到符合要求的 X。

(3) 由于 $\mathrm{e}^x = t (t \neq 0)$ 在复数域一定有解，任意可逆方阵均存在符合要求的 X。

§5.4　最小多项式

1. 后面的部分小题运用结论：$\deg d_A \leq \mathrm{rank}(A) + 1$(事实上 A 可改为任意 $\lambda I - A$，证明方式相同)

   结论证明：考虑 Jordan 标准形中 0 的重数，由于几何重数为 $n - \mathrm{rank}(A)$，在定理 5.13-3 作 lcm 时，x 的幂次至少减少 $n - \mathrm{rank}(A) + 1$，由此得证。

   (1) 特征多项式与最小多项式均为 $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

   (2) 特征多项式 $(x-1)^2(x+1)$，最小多项式 $(x-1)(x+1)$

   (3) 特征多项式与最小多项式均为 $(x-1)x(x+1)$

   (4) 特征多项式与最小多项式均为 $(x-1)(x+1)^2$

   (5) 当 $(n,k) = 1$ 时，直接计算可发现特征多项式为 $x^n - 1$，否则，可以通过分块化为此情况。因此，当 $(n,k) = d$ 时，特征多项式为 $(x^{n/d} - 1)^d$，同样利用分块直接计算知最小多项式为 $x^{n/d} - 1$

   (6) 与 (5) 类似，特征多项式为 $(x^{n/d} - (-1)^k)^d$，最小多项式 $x^{n/d} - (-1)^k$

   (7) 特征多项式 x^n，最小多项式 $x^{[n/k]}$

   (8) 特征多项式为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，利用习题 7 的结论知最小多项式亦为此。

   (9) 类似例 5.15 知 $\varphi_A(x) = x^{n-2} \left(x^2 - \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)x + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i - n \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)$。考虑 $\mathrm{rank}(A)$，计算可知：

   $a_i = b_i = 0$ 时，最小多项式为 x 其他情况下，若 a_i 或 b_i 全相等时，最小多项式为 $x^2 - \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)x$

   其他情况则为 $x \left(x^2 - \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)x + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i - n \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)$

   (10) 直接列变换可计算得特征多项式为 $\prod_{i=1}^n (x-i) \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{x-i} \right)$

   设 $B = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n), C = A - B$ a_i, b_i 均不为 0 时，$1, 2, \ldots, n$ 均不为特征值，因此对任意特征值 λ，$\mathrm{rank}(\lambda I - A) = \mathrm{rank}(\lambda I - B - C) \geq \mathrm{rank}(\lambda I - B) - \mathrm{rank}(C) = n - 1$，由习题 7 法二类似知此时最小多项式即为特征多项式。

   否则，设 $S = \{i \mid a_i b_i = 0, \mathrm{rank}(iI - A) = n - 2\}$，考虑 $\mathrm{rank}(iI - A)$ 可知 $d_A(x) = \dfrac{\varphi_A(x)}{\prod_{i \in S}(x-i)}$

2. (1) 直接设出函数计算导数即可。

   (2) f' 次数小于 f，故由 2 可推出 1，从而推出 4。不必要性取 λ_i 在 $\mathbb{F}$ 中即得到。

   (3) 与 (2) 相同构造知不必要，考虑实数域中 $(x^2+1)^2$ 知不充分。

3. 此题结论基本等价于：任意置换可拆分为不相交轮换。从置换角度考虑，先可考虑从 1 开始形成的环，再考虑下一个不在环中的数，直到所有数都在轮换中。接着通过共轭将下标变为顺序即可 (矩阵角度即为用一系列 S_{ij} 相似，类似 4.2 节习题 11(4) 操作)。

4. 由定理 5.13-3 与 f_i 互素知结论成立。

5. 法一：由 $d_{A,\alpha}$ 定义，考虑对左侧进行列变换。若前 r 列线性相关，则可以相应构造出不超过 r 次的 A 关于 α 的零化多项式，再由 $d_{A,\alpha}$ 的次数最小性知结论 (此处运用之后线性相关结论：矩阵的秩等于其列秩)。

   法二：考虑 $\begin{pmatrix}\alpha & A\alpha & \cdots & A^{k-1}\alpha\end{pmatrix}x=\mathbf{0}$ 的解空间，非零解 $(x_0,\dots,x_{n-1})$ 可对应多项式 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}x_iA^i\alpha=0$，由此利用最小性知结论。

6. (1)$d_{A,\alpha}d_{A,\beta}(A)(\alpha+\beta)=d_{A,\beta}(A)d_{A,\alpha}(A)\alpha+d_{A,\alpha}(A)d_{A,\beta}(A)\beta=\mathbf{0}$，故 $d_{A,\alpha+\beta}\mid d_{A,\alpha}d_{A,\beta}$。

   而由 $d_{A,\beta}d_{A,\alpha+\beta}(A)(\alpha+\beta)=d_{A,\beta}d_{A,\alpha+\beta}(A)\alpha=\mathbf{0}$，$d_{A,\alpha}\mid d_{A,\beta}d_{A,\alpha+\beta}$，由互素知 $d_{A,\alpha}\mid d_{A,\alpha+\beta}$，同理 $d_{A,\beta}\mid d_{A,\alpha+\beta}$，结合 $d_{A,\alpha+\beta}\mid d_{A,\alpha}d_{A,\beta}$，再由互素知原结论成立。

   (2) 运用归纳法可知，若 $d_{A,\alpha_1},\dots,d_{A,\alpha_n}$ 两两互素，则 $d_{A,\alpha_1+\cdots+\alpha_n}=d_{A,\alpha_1}\dots d_{A,\alpha_n}$

7. 法一：由 5.2 节习题 8(1) 可计算得，若 $\deg(d_A)=k<n$，由条件 $i=j+k$ 斜行均不为 0，即矛盾。因此 $\deg(d_A)=n$，又由 $d_A\mid\varphi_A$ 知结论。

   法二：取左下角 $n-1$ 阶子式知 $\forall\lambda,\operatorname{rank}(\lambda I-A)\geq n-1$，因此 A 的任何特征值几何重数均为 1，考虑 Jordan 标准形的形式，由于 Jordan 块的最小多项式即为特征多项式，而 A 的每个特征值只有一个 Jordan 块，利用定理 5.13-3 知结论。

8. * 此题结论只在可分域内保证成立 (事实上关键在于对不可约多项式 f，f' 不为 0，这个条件成立实际需要在可分域内)，作为弱一些的结论，容易证明 $\operatorname{Char}\mathbb{F}=0$ 的域内成立。

   设 B 阶数为 m，A 阶数为 mn，计算知 $\varphi_A=\varphi_B^n$，又由 φ_B 不可约，$d_A=\varphi_B^k,k\leq n$。设 $\varphi_B(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m$，由于 B,I 可交换，计算知 $\varphi_B(A)=\begin{pmatrix}f(B) & * & * \\ & \ddots & * \\ & & f(B)\end{pmatrix}$ 其中 $f(x)=\varphi_B'(x)$ (事实上对角线上为 $\varphi_B(B)=O$)，由 $\varphi_B=d_B$，$f(B)\neq O$，直接计算知满足 $\varphi_B^k(A)=O$ 的最小 k 为 n，由此即得证。

9. 法一：由于相似不影响结论，不妨设 A 已相似为 Jordan 标准形。

   先考虑一个对角块的情况。设此对角块为 $J=J_n(\lambda),f(x)=(x-\lambda)^ag(x),g(\lambda)\neq 0$。直接计算可发现 $g(J)$ 对角元非零且上三角，因此可逆，于是 $\operatorname{rank}(f(J))=\operatorname{rank}\left((J-\lambda I)^ag(J)\right)=\operatorname{rank}(J-\lambda I)^a$ 由定理 3.12-3 知 Jordan 块 $d_J=\varphi_J$，计算知秩为 $\begin{cases}n-a & a<0\\ 0 & a\geq n\end{cases}=n-\deg(\gcd(d_J,f))$

   由定理 3.12-3，A 每个 Jordan 块特征值不同，设 A 不同特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$，且 λ_i 对应的 Jordan 块 J_i 阶数为 n_i，则 J_i 互素。且由定理 5.13-3 知 $d_A=\prod\limits_{i=1}^k d_{J_i}$，因此 $\operatorname{rank}(f(A))=\sum\limits_{i=1}^k\operatorname{rank}(f(J_i))=\sum\limits_{i=1}^k n_i-\deg(\gcd(d_{J_i},f))=n-\deg\prod\limits_{i=1}^k\gcd\left(d_{J_i},f\right)=n-\deg\left(\gcd\left(\prod\limits_{i=1}^k d_{J_i},f\right)\right)=n-\deg(\gcd(d_A,f))$，由此得证。

   法二：利用定理 5.16 推论，取 α 使 $d_{A,\alpha}=d_A$，考虑 $f(A)x=\mathbf{0}$ 的解空间 V：

$p(A)\alpha \in V \Leftrightarrow f(A)p(A)\alpha = \mathbf{0} \Leftrightarrow d_A | fp \Leftrightarrow \left.\dfrac{d_A}{g}\right| p$，记 $h = \dfrac{d_A}{g}$，则 $V = \{p(A)\alpha \mid \deg(p) \le n-1, h|p\}$。由于 p 取值为 h 乘任意一个次数小于等于 $n-1-\deg(h)$ 的多项式 (含常数项共有 $n-\deg(h)$ 个分量)，$\dim(V)$(即方程组基础解系的个数)$= n-\deg(h) = n-\deg(d_A)+\deg(g) = \deg(g)$，由 4.2 节定理 4.8 知 $\mathrm{rank}(f(A)) = n-\deg(g)$。

10. 若 A 可逆，$d_A(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$，由可逆 $c_0 \ne 0$(否则 A 可约去)，可直接算出
$f(x) = -\dfrac{\det(A)}{c_0}\dfrac{d_A(x)-c_0}{x} = (-1)^{n-1}(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})$
若 A 不可逆，取 t 不为 A 特征值，则 $B = tI - A$ 可逆，$d_B(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m$ ，则 $(tI-A)^* = g(B), g(x) = (-1)^{n-1}(d_1 + \cdots + d_mx^{m-1})$。验证可知，此多项式的系数均为 t 的多项式，取 $t=0$ 时即知结果，结果仍为 $f(x) = (-1)^{n-1}(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})$。

§5.5 特征方阵

1. $A = \mathrm{diag}\left(J_2(1), J_2(1)\right), B = \mathrm{diag}\left(J_3(1), J_1(1)\right)$
* 事实上，此处 A, B 满足更强条件。$\forall x \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}, \mathrm{rank}(xI - A^k) = \mathrm{rank}(xI - B^k)$

2. (1) 设 $Q(xI-A)R = \mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_n)$ (QR 可逆)，则 $(xI-A)R\,\mathrm{diag}\left(\dfrac{\lambda}{f_1}, \ldots, \dfrac{\lambda}{f_n}\right)Q = Q^{-1}\lambda IQ = \lambda I$
(2) 将例 5.18 中的 φ_A 替换为 λ，$(xI-A)^*$ 替换为 P 即可。
(3) 计算可知两方阵次数相同，由定理 5.17，只需证明 $xI - \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_n)$ 与 $\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_n)$ 模相抵。而 $xI - A_1$ 初等因子组为 $1, \ldots, 1, f_1$，考察 Smith 标准形知相似。

3. 考虑 $xI-A$ 与 $xI-B$ 的 Smith 标准形即可 (注意 4.3 节定理 4.14 表述，由于两矩阵系数均在 $\mathbb{F}[x]$ 中，一切公因式仍在其中，其标准形与看成 $\mathbb{K}[x]$ 上的 Smith 标准形无区别，也即，不变因子在任何扩域上不变)。

4. 由于第二个矩阵为第一个的转置，利用定理例 5.19，证明与第一个 (记为 A) 相似即可。
由 p_i 不可约，利用 5.4 节习题 2 可知 C 的特征值两两不同，设 $P^{-1}CP$ 为相似对角化 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_k)$，则 $\mathrm{diag}(P^{-1}, \ldots, P^{-1})A\,\mathrm{diag}(P, \ldots, P)$ 即为 $\begin{pmatrix} D & & & \\ I & D & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & D \end{pmatrix}$，其中 D 为对角阵，再利用置换方阵即可相似成 $J_t(\lambda_1), \ldots, J_t(\lambda_k)$，可发现此方阵满足 $d_A = \varphi_A$，因此与定理中 B_{ij} 相似，因此与 M_{ij} 相似。

5. 类似 5.4 节例 5.16 知其可相似对角化，故需配对共轭特征值为例 5.21 形式，特征多项式 x^n+1 所有根为 $\lambda_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{n}, k = 1, 2, \ldots, n$，令 $B_k = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{n} & -\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{n} \\ \sin\dfrac{(2k-1)\pi}{n} & \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{n} \end{pmatrix}$
当 n 为偶数时，与例 5.22 类似得标准形为 $\mathrm{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_{n/2})$
当 n 为奇数时，与例 5.22 类似得标准形为 $\mathrm{diag}(-1, B_1, B_2, \ldots, B_{(n-1)/2})$

6. 利用 5.3 节例 5.10 结论，$J_n(\lambda)^m$ $\lambda \ne 0$ 时标准形为 $J_n(\lambda^m)$，结合 5.3 节习题 9 证明过程：
$\varphi_A(x), d_A(x)$ 如题，标准形为 $J_{12}(0), J_6(1), J_6(-1)$
$\varphi_{A^2}(x) = (x-1)^{12}x^{12}, d_{A^2}(x) = (x-1)^6x^6$，标准形为 $J_6(0), J_6(0), J_6(1), J_6(1)$
$\varphi_{A^3}(x) = (x-1)^6x^{12}(x+1)^6, d_{A^3}(x-1)^6x^4(x+1)^6$，标准形为 $J_4(0), J_4(0), J_4(0), J_6(1), J_6(-1)$

$\varphi_{A^4}(x)=(x-1)^{12}x^{12}, d_{A^4}(x)=(x-1)^6x^3$，标准形为 $J_3(0),J_3(0),J_3(0),J_3(0),J_6(1),J_6(1)$

$\varphi_{A^5}(x)=(x-1)^6x^{12}(x+1)^6, d_{A^5}(x)=(x-1)^6x^3(x+1)^6$，

标准形为 $J_3(0),J_3(0),J_2(0),J_2(0),J_2(0),J_6(1),J_6(-1)$

$\varphi_{A^6}(x)=(x-1)^{12}x^{12}, d_{A^6}(x)=(x-1)^6x^3$，

标准形为 $J_2(0),J_2(0),J_2(0),J_2(0),J_2(0),J_2(0),J_6(1),J_6(1)$

7. (1) 错误，反例 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$。

   (2) 正确，见 5.3 节习题 9。

8. 注意到 $\mathrm{diag}(A,\ldots,A)$ (k 个 A) 的 Jordan 块为 A 的每个 Jordan 块复制 k 个，直接考虑 Jordan 块或考虑特征方阵的 Smith 标准型即可。

9. * 题目结论中模相抵应改为在 $\mathbb{F}$ 上相抵 (作为 $\mathbb{F}$ 上相抵的矩阵，若看作 $\mathbb{F}[x]$ 上的矩阵，则必定模相抵，这是由于 $\mathbb{F}$ 上的可逆阵由定义均为模方阵。因此，题目的结论是正确的，但对 $\mathbb{F}$ 上矩阵来说表述非常不自然)

   定义：若域 $\mathbb{F}$ 上的 m 阶多项式方阵 $P=\sum_{i=0}^{k}x^iA_i$(A_k 为 $\mathbb{F}$ 上的 m 阶方阵)，则代入 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵 X 后的方阵 $P(X)$ 定义为 mn 阶方阵 $\sum_{i=0}^{k}A_i\otimes X^i$。

   由 2.2 节习题 7,8 可以验证，$P(X)+Q(X)=(P+Q)(X), P(X)Q(X)=(PQ)(X)$ 注意到，$I(X)=I_m\otimes I_n=I_{mn}$，因此，当 P 为模方阵时，$P(X)P^{-1}(X)=I(X)=I$，$P(X)$ 可逆，其逆即为 $P^{-1}(X)$。由此，设 $P(xI-B)Q=\mathrm{diag}(f_1,f_2,\ldots,f_n)$，$PQ$ 为多项式模方阵，则直接计算验证：

   $I\otimes A=(xI)(A), B\otimes I=B(A)\Rightarrow P(A)(I\otimes A-B\otimes I)Q(A)=(P(xI-B)Q)(A)$

   $=\mathrm{diag}(f_1,f_2,\ldots,f_n)(A)=\mathrm{diag}(f_1(A),f_2(A),\ldots,f_n(A))$，又因 $P(A)Q(A)$ 可逆得结论。

10. (1) 利用 2.2 节习题 9 知 $AX-XA=O$ 的解与 $(I\otimes A-A^T\otimes I)x=\mathbf{0}$ 的解一一对应，再由 4.2 节定理 4.8 知原题结论。

    (2) 注意到，$(I\otimes P^{-1})(I\otimes A-B\otimes I)(I\otimes P)=I\otimes P^{-1}AP-B\otimes I$，因此可不妨设 A 已经相似为了 Jordan 标准形。又由例 5.19，$xI-A^T$ 与 $xI-A$ 的 Smith 标准形相同，因此其不变因子相同，再由习题 9 知第一个等号成立。

    假设 A 的某 Jordan 块为 $J_m(\lambda)$，由于当 $(x-\lambda)\nmid f$ 时 $f(J_m(\lambda))$ 可逆，其秩只与 f 中 $x-\lambda$ 的次数有关。由此，A 的不同特征值互相不影响，可不妨设 A 特征值都相同，Jordan 块的阶数分别为 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 非递减排列，则非 1 的 d_i 为 $(x-\lambda)^{a_i}$。计算可直接得出 $d_i(J_{a_t}(\lambda))=J_{a_t}(0)^{a_i}$，其秩为 $\begin{cases}a_t-a_i & a_t>a_i\\ 0 & a_t\le a_i\end{cases}$，由此计算出中 $=\sum_{i\le j}(\deg d_j-\deg d_i)=$ 右，第二个等号成立。

    (在习题 3 已说明不变因子在 $\mathbb{F}$ 的任意扩域上不变，由此，不妨在 $\mathbb{F}$ 的代数闭包上考虑，使所有不变因子均可完全分解为一次因式，A 也可以直接相似为 Jordan 标准形，这就规避了 Frobenius 标准形的过程。若不这么处理，则需考虑 Frobenius 标准形中的各个友方阵，并得到类似 $d_i(J_{a_t}(\lambda))$ 秩的结论。)

    (3) 再次利用习题 9 知第一个等号成立，接着利用定理 5.18 中不变因子与初等因子的关系即可计算出结果 (注意表中的次数相加关系)。

    (值得注意的是，此题就不能直接放在代数闭包考虑，因为初等因子组在不同的域下会改变。不过，也可考虑先说明完全分裂，所有 $\deg(p_i)=1$ 的情况，再说明右式在不同扩域中值不变。)

11. 5.3 节例 5.10 已证明 $\lambda\neq 0\Rightarrow J_n(\lambda)^m$ 与 $J_n(\lambda^m)$ 相似，由此采用反证法反证。先删去所有 A 与 B 相同的 Jordan 块，此时若对 A 的某个 Jordan 块 $J_n(t)$，B 的同阶 Jordan 块为 $J_n(t_1),J_n(t_2),\dots,J_n(t_k)$，且 $t\neq t_i$(若否则此两块应已配对删去)，令 $t^n=t_i^n$ 成立的最小正整数 n 为 n_i(若这样的 n 不存在则直接忽略此 t_i)，先证 $t^n=t_i^n$ 的全部 n 为 $zn_i,z\in\mathbb{Z}$。

证明：若 $t^n=t_i^n,t^m=t_i^m$，则 $t^{an+bm}=t_i^{an+bm}$，由裴蜀定理可知 $t^{(m,n)}=t_i^{(m,n)}$。因此，若由某个使 $t^n=t_i^n$ 的 n 不为 n_i 倍数，(n,n_i) 为比 n_i 更小的正整数，矛盾。

又由于 $t\neq t_i$，每个 n_i 均大于 1，取 $r=zn_1n_2\dots n_k+1$，z 可任意大，则 $t^r\neq t_i^r$，与条件矛盾。

12. (1) 由于 $A=I\otimes B+B\otimes I+I\otimes I$，类似习题 9 可知，将 B 替换为相似标准形后 A 亦与原本的 A 相似，不影响所求的内容。类似 5.1 节习题 10 计算可知：

当 B 的阶数为奇数时，B 的相似标准形为左上角为 1，其余全为 0 的方阵，此时 A 为对角阵，直接计算出 A 行列式为 $0(n\geq 2)$，秩为 n^2-2n+2，特征多项式 $x^{2n-2}(x+1)^{n^2-2n+2}$，相似标准形为 n^2-2n+2 个 $J_1(1)$，$2n-2$ 个 $J_1(0)$。

当 B 的阶数为偶数时，B 的相似标准形为一个 $J_2(0)$，其余全为 $J_1(0)$ 的方阵 (设 $J_2(0)$ 在左上角)，此时 A 为对角元全为 1 的上三角方阵，且除左上角 $2n$ 阶方阵外已经成为了 Jordan 标准形的形式，直接计算出 A 行列式为 1，秩为 n^2，特征多项式 $(x+1)^{n^2}$，相似标准形为 n^2-4n+5 个 $J_1(1)$，$2n-4$ 个 $J_2(1)$ 与一个 $J_3(1)$。

(2) * 此题假设 B 在分裂域上的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 已知，且 A 的相似标准形基本不能直接计算，只计算行列式、秩与特征多项式

由于 $A=I\otimes B+B\otimes I$，类似习题 9 可知，将 B 替换为相似标准形后 A 亦与原本的 A 相似，不影响所求的内容。取左下角 $n-1$ 阶子式，类似定理 5.18 证明过程可知 $xI-B$ 的前 $n-1$ 个不变因子均为 1，而 $A=I\otimes B-B^T\otimes I$，由习题 10 算出 $\operatorname{rank}(A)=n^2-n$。

将 B 替换为相似标准形后，可发现 A 成为对角元素为一切 $\lambda_i+\lambda_j,i,j=1,2,\dots,n$ 的上三角方阵，由此知特征多项式、行列式。

第六章　正交方阵

§6.1　正交方阵

1. (1) 由行列式可乘得结论。

(2) $(P^{-1})^T=(P^T)^{-1}=P$

(3) 左 $=\alpha^TP^TP\beta=\alpha^T(P^TP)\beta=$ 右

(4) 不妨设为上三角，由下三角阵 $A^T=$ 上三角阵 A^{-1}，可知其只能为对角阵，又由每列模长为 1 得结论。

(5) $PQ(PQ)^T=P(QQ^T)P^T=I=(PQ)^TPQ$

(6) 由 (2) 有 $(P^{-1}AP)^T=P^TA^TP=P^{-1}A^TP$，$A^T=\lambda A\Rightarrow(P^{-1}AP)^T=\lambda P^{-1}AP$，$\lambda$ 取 ± 1 即为对称与反对称。

2. 取 α 第 i 分量为 1，其他为 0 可知 $\sum_{k=1}^n a_{ki}^2=1$，即每个列向量长度为 1；取 α 第 i 与第 j 分量为 1，其他为 0 可知 $\sum_{k=1}^n(a_{ki}+a_{kj})^2=2\Rightarrow\sum_{k=1}^n a_{ki}^2+\sum_{k=1}^n a_{kj}^2+2\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}=2\Rightarrow\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}=0$，即列向量两两正交。由此知结论。

3. 第一步：单位化，$\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\alpha,\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\beta$

第二步：找到以 α_1,β_1 为第一列的正交阵 A,B(可由向量组正交化构造) $A=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

第三步：P 即为所有满足 $PA=B\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\delta\sin\theta & \delta\cos\theta\end{pmatrix}$ $(\delta=\pm1)$ 的正交阵 (由正交阵积仍为正交阵，$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\delta\sin\theta & \delta\cos\theta\end{pmatrix}$ 为所有保持 B 第一列不动的正交阵，因此知结论)，

因此 $P=B\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\delta\sin\theta & \delta\cos\theta\end{pmatrix}A^T,\delta=\pm1,\theta\in[0,2\pi)$。

4. (1) 设 $P\alpha=\begin{pmatrix}p_1^T\alpha\\ p_2^T\alpha\\ p_3^T\alpha\end{pmatrix}$，直接计算可知结论。

(2) 是。取 α,β 分别为不同方向单位向量，可知 P 任意两行向量按序叉乘可得第三行向量，由此三行向量相互正交，且模长均为 1，由此得结论。

5. (1) 这里直接说明 (2)。

(2) Givens 方阵：利用定理 6.3-1 证明过程，依次将 $a_{21},\dots,a_{n1}.a_{32},\dots,a_{n2},\dots,a_{n,n-1}$ 合并到对角元中，则最后形成对角的正交阵，又因为此阵除 a_{nn} 外对角元全为正，且其行列式值为 1，由定理 6.1-4 知其为 I，因此特殊正交阵可以写作 $\dfrac{(n-1)n}{2}$ 个 Givens 方阵乘积。

Householder 方阵：类似上方讨论，利用定理 6.3-2 证明过程，依次将每列合并到对角元中 (注意由于 Householder 方阵行列式为 -1，按奇偶决定是否最后要对 a_{nn} 进行处理)，因此特殊正交阵可以写作 $2\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 个 Householder 方阵乘积。

6. 利用 5.1 节定理 5.4，由例 6.3 推论，考察几何重数与代数重数可知两方阵都可对角化，Givens 方阵除两特征值 $\cos\theta\pm i\sin\theta$ 外均为 1，Householder 除一个 -1 外均为 1。

7. (1) 左侧取 v' 为原本的 v 后增添若干个 0，右侧取 v' 为原本的 v 前增添若干个 0 即可。

(2) 由于 $\operatorname{rank}(H-I)=1$，利用 4.1 节习题 4 满秩分解 $H-I$ 知可设 $H=I+\alpha\beta^T(\alpha,\beta$ 为列向量)，又由于 $H^T=H$ 可知 $\alpha=\lambda\beta(\lambda\in\mathbb{R})$，因此 $H=I+\lambda vv^T$。利用 3.2 节习题 6 计算 H 行列式，其为 $1+\lambda v^Tv=-1\Rightarrow\lambda=-\dfrac{2}{v^Tv}$，由此得证。

8. * 注意三种 QR 分解算法的掌握

$$(1)\ Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix},R=\begin{pmatrix}5&0&10&5\\0&5&0&-5\\0&0&5&-10\\0&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$(2)\ Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&-\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\ 0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},R=\begin{pmatrix}3&-6&-6&0\\0&3&0&6\\0&0&3&3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$(3)\ Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{4}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix},R=\begin{pmatrix}5&10&-5&-1\\0&5&-5&-1\\0&0&5&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

9. (1) 由 5.1 节习题 4(4) 知特征值不为 -1，因此可逆。$(I-A)^T=I^T-A^T=I+A$，$(I+A)^{-1}(I-A)((I+A)^{-1}(I-A))^T=(I+A)^{-1}(I-A)(I+A)(I-A)^{-1}$。由于均为 A 的多项式，$I-A, I+A$ 可交换，因此此式 $=I$，同理可验证另一边亦成立。

   (2) 由 (1) 可发现 $AB+A+B=I$，由此想到取 $A=(I-B)(I+B)^{-1}$，由 $(I+B)^T=I+B^{-1}$ 可验证 $(I+B)^T(A+A^T)(I+B)=O$，此时 A 即反对称。

10. * 此结论可推广至酉方阵 (定义见 6.4 节)，直接证明推广的结论：

    利用置换方阵为酉方阵，而酉方阵乘积仍为酉方阵性质，只需要证明结论对左上角任意 k 阶方阵成立。设其分块为 $\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$，直接计算有 $A_1^HA_1+A_3^HA_3=I$，若 $A_1\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq\mathbf{0})$，则对等式左乘 α^H，右乘 α，可知 $\lambda^H\lambda\alpha^H\alpha+(A_3\alpha)^H(A_3\alpha)=\alpha^H\alpha$，由于 $\alpha^H\alpha=||\alpha||^2$，$|\lambda|^2||\alpha||^2\leq||\alpha||^2$，即 $|\lambda|\leq 1$。

11. 取 A 为 $a_{ii}=1$，其余为 0，计算知 P^{-1} 第 i 个列向量为 P 第 i 个行向量转置的倍数，因此存在 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$，$P^{-1}=P^T\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$，令 $B=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$，则 $B^T=B$。又因 A 实对称时，$(P^TBAP)^T=P^TA^TB^TP\Leftrightarrow BA=AB$ 成立，由 2.1 节习题 8 知 $B=\mu I$，因此 $P^{-1}=\mu P^T$，计算行列式可知 $\mu>0$，取 $\lambda=\sqrt{\mu}$ 即符合要求。

    (满足此条件的 P 构成的集合为在旋转与反射外复合伸缩变换)

12. 先取置换方阵 P_1 使 P_1^TA 的行向量按模长非递减排列，再去 P_2 使 $P_1^TAP_2^T$ 的列向量按模长非递减排列，可以发现，此时行向量仍然非递减。设 $P_1^TAP_2^T=B$，证明 B 有题设中 $\operatorname{diag}(\lambda_1Q_1,\dots,\lambda_kQ_k)$ 的形式即可。

    由于 B 行/列单位化后均正交，存在均非零非递减的 $\mu_1,\dots,\mu_n;\delta_1,\dots,\delta_n$ 使 $B=\operatorname{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)P$ $=Q\operatorname{diag}(\delta_1,\dots,\delta_n)$，且 P,Q 正交，进一步的将 $2n$ 个数所有不相等的取值递减排列为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_k$，则 $\operatorname{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)=\operatorname{diag}(\lambda_1I_{n_1},\dots,\lambda_kI_{n_k})$，$\operatorname{diag}(\delta_1,\dots,\delta_n)=\operatorname{diag}(\lambda_1I_{m_1},\dots,\lambda_kI_{m_k})$。计算 BB^T 知 $\operatorname{diag}(\lambda_1^2I_{n_1},\dots,\lambda_k^2I_{n_k})Q=Q\ \operatorname{diag}(\lambda_1^2I_{m_1},\dots,\lambda_k^2I_{m_k})$，由此 Q 可分块为 $\operatorname{diag}(Q_1,\dots,Q_k)$，每个 Q_i 阶数为 $n_i\times m_i$，由于 Q 正交，计算得每个对角块均为正交阵，因此 $n_i=m_i$，由此满足题设。

(特别地，如果 A 中不含 0，可发现 $A=\lambda Q$，λ 非零，Q 为正交阵。)

§6.2 正交相似

1. (1) 利用定理 6.3，讨论有无复特征值即可，注意此处 θ 可取 $0,\pi$。

   (2) 正交阵可以看作三维空间中刚体变换，即旋转变换与反射复合。

2. 左推右：由正交阵 k 次方仍正交，$(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP$，故成立。

   右推左：由定理 6.6 可推知正交阵 $\mathbb{C}$ 上的相似标准形为对角元模长均为 1 的对角阵，若 A^k 有此性质，由于 A^k 可逆且 $J_n(\lambda)^m$ 相似于 $J_n(\lambda^m)$，可知 A 亦可相似对角化。由于 A^k 特征值为 A 特征值的 k 次方，A 仍有此性质。

3. 左推右：利用定理 6.9，$\mathbb{R}$ 上规范 $\Leftrightarrow$ 可在 $\mathbb{R}$ 上相似为定理 6.9 形式，而其中每个对角元都可在 $\mathbb{C}$ 上对角化，由此得证。

   右推左：考察其在 $\mathbb{R}$ 上的相似标准形 (5.5 节例 5.21)，由于其在 $\mathbb{C}$ 上可对角化，只能为例 6.9 的形式，即为可相似成的规范方阵。

4. 归纳，一阶时显然成立，n 阶时由 AA^T 与 A^TA 第一行第一列相等可发现 A 第一行除对角均为 0，而右下角为低一阶的规范方阵，由此归纳假设成立。

5. (1) 由 5.4 节习题 7 知结论。

   (2) 考虑对角阵 $P=(p_{ij})$，$P^{-1}AP$ 对称可解出对 $i<n$，$\dfrac{p_{ii}^2}{p_{i+1,i+1}^2}=\dfrac{a_{i,i+1}}{a_{i+1,i}}$，令 $p_{11}=1$ 可归纳构造出符合条件的 P。

   (3) 考虑 Jordan 标准形，由 (1) 知每个特征值对应唯一 Jordan 块，由 (2) 知 Jordan 块均为一阶，由此得结论。

6. (1) 利用习题 8 得 $A^T=f(A)$，因此 A^T 与 B 可交换,，取转置得 B^T 与 A 可交换。

   (2) 利用 (1)，$(A+B)^T(A+B)=A^TA+A^TB+B^TA+B^TB=AA^T+BA^T+AB^T+BB^T$ $=(A+B)(A+B)^T$，$(AB)^TAB=B^TA^TAB=ABA^TB^T=AB(AB)^T$

7. (1) $A=B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

   (2) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

8. 由于 $P^TAP=(P^TA^TP)^T$，当 A,B 正交相似时，A^T,B^T 正交相似。由此不妨设 A 已正交相似为定理 6.9 形式。为证正交相似，我们只需要证明每个对角块与其转置正交相似即可。对 λ_i 显然成立，对 A_i 直接构造 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$ 即可。

   为证存在多项式，设 P 正交，若 $A^T=f(A)$，有 $(P^TAP)^T=f(P^TAP)$，因此同样只要说明对定理 6.9 形式成立即可。考虑每个对角块对应的 $f=f_j$，其最小多项式为 d_j，则只需构造 f 满足 $f\equiv f_j \mod d_j$ 即可，构造 f 使得 $\begin{cases}f\equiv\lambda_i & \mod x-\lambda_i\\ f\equiv -x+2a_i & \mod x^2-2a_ix+a_i^2+b_i^2\end{cases}$ (对一切 λ_i,A_i)，由于若对角块含公共特征值 (即最小多项式不互素)，必为相同对角块，因此方程可只保留一个，由中国剩余定理可知这样的 f 存在，可验证此 f 满足要求。

   (对一般方阵，正交相似未必成立，见 7.1 节习题 6(2))

9. 只要说明能使 $P^{-1}A_iP$ 成为对应形式的准上三角方阵，由于其仍规范，类似习题 3 即可证明其为准对角方阵。

   采用归纳法。一阶时显然成立，n 阶时，由 5.2 节习题 9 知存在公共特征向量 α，由于特征向量倍数仍为特征向量，不妨设 α 为单位向量。

   若其为实向量，取 P 为使 α 为第一列的正交阵，则 $P^{-1}A_iP$ 的第一列除对角元全为 0，右下为 $n-1$ 阶互相可交换的规范阵，类似 5.2 节定理 5.5 归纳即可。

   若其不为实向量，考虑其实部与虚部构成的向量 u,v，若 u,v 共线，则此向量除以 $u+vi$ 即为实向量，矛盾。否则，取以 u,v 标准正交化为前两列的正交阵 P，可发现 $P^{-1}A_iP$ 的前两列成为符合要求的形式 (除前两行外全为 0，左上角二阶子矩阵形式如定理 6.9 中 A_i)，类似 5.2 节习题 7(2) 归纳即可。

10. (1) $\mathrm{e}^A(\mathrm{e}^A)^T=\mathrm{e}^A\mathrm{e}^{A^T}=\mathrm{e}^{(A+A^T)}=I=(\mathrm{e}^A)^T\mathrm{e}^A$，再由 5.4 节例 5.16-3 知 $\det(B)=\mathrm{e}^tr(A)=1$。

    (2) 由于正交相似不改变结论，不妨设 B 已正交相似为定理 6.6 形式，且由于 $\det(B)=1$，-1 可两两配对，即 $B=\mathrm{diag}(B_1,\dots,B_s,I)$，其中 $B_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix},\theta_i\in[0,2\pi)$ ($\theta=\pi$ 时为配对的 -1)，取 $A=\mathrm{diag}(A_1,\dots,A_s,O)$，其中 $A_i=\begin{pmatrix}0 & \theta_i\\ -\theta_i & 0\end{pmatrix}$，可算得成立。

    (3) 未必。$A=\begin{pmatrix}0 & \pi\\ -4\pi & 0\end{pmatrix},B=I$ 为反例。

§6.3　正交相抵

1. 利用 P 正交阵则 $||P\alpha||=||\alpha^TP||=||\alpha||$ 可将 A 拆分为行/列向量直接算出结果，或利用 A,B 奇异值均相等由例 6.7-1 知结论。

2. 由定理 6.10 证明过程，设 A 的奇异值分解为 $P_1\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$，则 B 可分解为 $P_2\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$，因此取 $P=P_2P_1^T$ 即可。

3. 由习题 2 类似知存在正交阵 $P,Q,PA=AQ=B$。设 A 奇异值分解为 $U\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}V$，令 $X=U^TPU$，其为正交阵乘积，因此为正交阵，分块为 $\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}$ 计算可知 $X_2\Sigma=O$。由 Σ 可逆知 $X_2=O$，由定理 6.6 证明过程准三角正交阵必为准对角阵，因此 $X_3=O$，此时 X_1,X_4 必均为正交阵。

   令 $R_1=X_1$ 可知 $B=U\begin{pmatrix}R_1\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}V$，$R_1$ 为正交阵。同理可知 $B=U\begin{pmatrix}\Sigma R_2 & O\\ O & O\end{pmatrix}V$，$R_2$ 为正交阵。因此 $R_1\Sigma^2R_1^T=\Sigma R_2R_2^T\Sigma^2=\Sigma^2$，即 R_1 与 Σ^2 可交换，设 $\Sigma^2=\mathrm{diag}(\sigma_1^2I_1,\dots,\sigma_s^2I_s)$，不同的 σ_i 值不同，则 $R_1=\mathrm{diag}(P_1,\dots,P_s)$，$P_i$ 为正交阵，阶数与 I_i 相同。由此得全部的 $B=U\begin{pmatrix}P\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}V$，$P=\mathrm{diag}(P_1,\dots,P_s)$，$P_i$ 为正交阵，且阶数对应每个不同奇异值的重数 (注意到，P 与 Σ 可交换，因此这样的 B 一定为解)。

4. (1) 取 $P_1,P_2=\dfrac{A\pm A^T}{2}$ 即可 (由于实对称/反对称方阵一定规范)。

   (2) A 的奇异值分解为 $P\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$，$P_1=PQ,P_2=Q^T\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$ 即可。

(3) 设 $A = P\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_s,\lambda_{2s+1},\dots,\lambda_n)P^T$ 为正交相似后 6.2 节定理 6.9 形式，取 $P_1 = PBP^T$,$P_2 = PCP^T$，其中 B 为把每个 A_i 替换成 $\operatorname{diag}(1,-1)$，$\lambda_i$ 替换成 1；C 为把每个 A_i 替换成 $\operatorname{diag}(1,-1)A_i$，$\lambda_i$ 不变，验证知其符合要求。

5. (1) 见习题 6(1)(2)。

   (2) 置换行列后不妨设 B 为 A 左上角子矩阵，则 $||B|| = \left|\left|\begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix}\right|\right| = \left|\left|\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}\right|\right|$，由 (1) 得成立 (第一个等号是由于 $\forall\alpha, ||B\alpha|| = \left|\left|\begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ * \end{pmatrix}\right|\right|$)。

   (3) 由定理 6.10 非零奇异值个数为 r，且 σ_1 最大，再由例 6.7(1,2) 直接得结论。

   (4) 若模长最大的特征值为实数，直接取 α 为其对应的模长为 1 的特征向量，即有 $\rho(A) = ||A\alpha|| \le ||A||$。若为复数，不妨设为 $a \pm bi$，设其对应的特征向量为 $u \pm vi$，取 α 为 u 的单位化，则 $\rho(A) = ||A\alpha|| \le ||A||$。(或直接考虑复数域上的二范数)

6. * 本题中，对应向量范数 $||x||_p$ 定义的矩阵范数为该向量范数诱导的矩阵范数。容易发现，$||A||_F$ 不为任何向量范数诱导的矩阵范数，因为任何向量范数诱导的矩阵范数都应有 $||I|| = 1$。

   (1) 由 Minkowski 不等式，$p > 1$ 时 $||\,(A+B)\,x||_p \le ||Ax||_p + ||Bx||_p$，由此得证。

   (2) $\forall p$ 范数长为 1 的 x，$||ABx||_p \le ||A||_p||Bx||_p \le ||A||_p||B||_p$，由此得证。

   (3) $||A||_1 = \max\limits_{\sum_{i=1}^n |x_i|=1} \sum\limits_{i=1}^m \left|\sum\limits_{j=1}^n x_j a_{ij}\right|$，而 $\sum\limits_{i=1}^m \left|\sum\limits_{j=1}^n x_j a_{ij}\right| \le \sum\limits_{j=1}^n x_i \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}| \le$ 右式，当 x 使 $\sum\limits_{j=1}^m |a_{ij}|$ 最大的分量为 1，其他为 0 时可取到，因此成立。

   (4) 左：取 x 使 $\sum\limits_{j=1}^m |a_{ij}|$ 最大的分量 (设为第 k 个) 为 1，其他为 0，则 $||A|| \ge ||Ax|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m |a_{ik}|^2}$ $\ge \dfrac{\sum_{i=1}^m |a_{ik}|}{\sqrt{m}} = \dfrac{||A||_1}{\sqrt{m}}$

   右：由习题 5(3)，$||A|| \le ||A||_F \le \sqrt{n \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^m a_{ij}^2} \le \sqrt{n\left(\max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}|\right)^2} = \sqrt{n}||A||_1$ (第三个不等号可放缩列和得到)。

   (5) 引理：$||A||_P = \max\limits_{||x||_p=||y||_q=1} y^T Ax$ (x,y 维数为 n,m)

   引理证明：由范数定义只需证明对向量 α，$||\alpha||_p = \max\limits_{||\beta||_q=1} \beta^T\alpha$，即 $\alpha\cdot\beta \le ||\alpha||_p||\beta||_q$，且可取到满足等号的 β，这即是 Hölder 不等式，由取等条件可知能取到合适的 β，因此成立。

   由引理，由于转置不影响一阶方阵的值，因此左 $= \max\limits_{||x||_p=||y||_q=1} y^T Ax = \max\limits_{||x||_p=||y||_q=1} (y^T Ax)^T$ $= \max\limits_{||y||_q=||x||_p=1} x^T A^T y =$ 右。

   (6) 先证明 $||A^T A|| \le ||A^T A||_p$。由定理 6.10 过程，$A^T A$ 为对称阵且特征值均为正，因此 $A^T A$ 的奇异值即为其特征值，再利用例 6.7-2 知 $||A^T A||$ 为其最大的特征值 λ。实矩阵的实特征值对应实特征向量，取 λ 对应的实特征向量 α，可乘倍数调整使 $||\alpha||_p = 1$，计算得 $||A^T A\alpha||_p = ||\lambda\alpha||_p = \lambda = ||A^T A||$，因此 $||A^T A|| \le ||A^T A||_p$。

   由奇异值定义结合 (2,5) 知 $||A||^2 = ||A^T A|| \le ||A^T A||_p \le ||A^T||_p||A||_p = ||A||_p||A||_q$，由此得证。

7. * 利用例 6.8 思路，此变换可看作在 x 方向放大为 σ_1 倍，y 方向放大为 σ_2 倍，再逆时针旋转角度 θ。利用倾角可计算出直线的斜率，由此可知直线方程的变化。

   (1) 注意到 $\sigma_1 \ge \sigma_2$，因此焦点为 $\pm\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}(\cos\theta, \sin\theta)$

(2) 标准方程 $\dfrac{x^2}{\sigma_1^2}-\dfrac{y^2}{\sigma_2^2}=1$，实轴 $y\cos\theta=x\sin\theta$，虚轴 $y\sin\theta=-x\cos\theta$，顶点 $\pm\sigma_1(\cos\theta,\sin\theta)$，焦点 $\pm\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(\cos\theta,\sin\theta)$，渐近线 $\cos\left(\theta\pm\arctan\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)y=\sin\left(\theta\pm\arctan\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)x$

(3) 标准方程 $y=\dfrac{\sigma_2x^2}{\sigma_1^2}$，对称轴 $y\sin\theta=-x\cos\theta$，顶点 $(0,0)$，焦点 $\dfrac{\sigma_1^2}{4\sigma_2}(-\sin\theta,\cos\theta)$

8. * 本题均只求出一个使取到最小值的解

(1) 设 A 中元素按行列排为 $a_1,\dots,a_n$，B 中对应位置 $b_1,\dots,b_n$，所求即需保证 $\sum\limits_{i=1}^n(\lambda a_i-b_i)^2$ 最小，直接由二次函数知识知 $\lambda=\dfrac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$(亦可写为 $\dfrac{\operatorname{tr}(A^TB)}{\operatorname{tr}(A^TA)}$)。

(2) $||PA-B||_F^2=\operatorname{tr}((PA-B)^T(PA-B))=||A||_F^2+||B||_F^2-2\operatorname{tr}(B^TPA)$。由 2.1 节定理 2.2-6，$\operatorname{tr}(B^TPA)=\operatorname{tr}(PAB^T)$。设 AB^T 奇异值分解为 $U\Sigma V$，则 $\operatorname{tr}(B^TPA)=\operatorname{tr}(VPU\Sigma)\le\operatorname{tr}(\Sigma)$ (VPU 为正交方阵，对角元小于等于 1，直接计算可得最后一个不等号)。取 $P=V^TU^T$ 即为一个满足条件的最小值。

(3) $||\lambda PA-B||_F^2=\operatorname{tr}((\lambda PA-B)^T(\lambda PA-B))=\lambda^2||A||_F^2+||B||_F^2-2\lambda\operatorname{tr}(B^TPA)$。由于 λ,P 同时变为负结果不变，不妨设 λ 为正，此时先取 P 为上题中 V^TU^T，再取 $\lambda=\dfrac{\operatorname{tr}(\Sigma)}{\operatorname{tr}(A^TA)}$ 时即可取到最小值。

9. (1) 由例 6.10 可知此矩阵方程组仅一解，故唯一。

(2) 直接验证其满足例 6.10 中的矩阵方程组即可。

(3) 由 4.2 节定理 5.9，在例 6.10 证明过程中只保留 $AXA=X,XAX=A$ 即可得到本题的形式。(注意例题有误，应为 $X_4=X_3\Sigma X_2$)

10. 当：由于正交相似不影响此性质，可设 A 已正交相似为 6.2 节定理 6.9 中的形式，直接计算可知 A^TA 的特征值为 A 的每个特征值模长平方，由此即可得 A 的奇异值满足条件。

仅当：由置换方阵不影响正交相抵，不妨设 $|\lambda_1|\le\cdots\le|\lambda_n|$，则此时其即为 A 的奇异值。因此，A^TA 的特征值为 A 的每个特征值模长平方。由于正交相似不影响此性质，可设 A 已正交相似为 6.2 节定理 6.5 中的形式，且 $A_i=\begin{pmatrix}a_i&b_i\\c_i&d_i\end{pmatrix}$。

一方面，$\operatorname{tr}(A^TA)$ 为其特征值之和，即 $\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2=2\sum\limits_{i=1}^s|\lambda_{2i-1}|^2+\sum\limits_{i=2s+1}^n\lambda_i^2$

另一方面，$\operatorname{tr}\left(A^TA\right)=\sum a_{ij}^2\ge\sum\limits_{i=1}^s||A_i||_F^2+\sum\limits_{i=2s+1}^n\lambda_i^2$

验证可知，$2\sum\limits_{i=1}^s|\lambda_{2i-1}|^2\le\sum\limits_{i=1}^s||A_i||_F^2$，由此可知每个不等号均成立等号。

$\sum a_{ij}^2=\sum\limits_{i=1}^s||A_i||_F^2+\sum\limits_{i=2s+1}^n\lambda_i^2$ 意味着 A 相似后为准对角阵，而 $2\sum\limits_{i=1}^s|\lambda_{2i-1}|^2=\sum\limits_{i=1}^s||A_i||_F^2$ 可计算知 $\begin{pmatrix}a_i&b_i\\c_i&d_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_i&b_i\\-b_i&a_i\end{pmatrix}$ 对每个 A_i 成立，由此由 6.2 节定理 6.5 知 A 为规范方阵。

§6.4　酉方阵

1. 完全仿照之前的对应例题、定理即可，注意 $(AB)^H=B^HA^H,\det(A^H)=\overline{\det(A)}$。

2. (1) 设为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，直接计算知 $|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2=1, a\overline{c}+b\overline{d}=0$。由此，设 $a=k\overline{d}$，则 $b=-k\overline{c}$，由条件知 $|k|=1$。取 μ 使得 $\mu^2=k$，记 $z=\dfrac{a}{\mu}, w=\dfrac{b}{\mu}$，计算验证即可。

   (2) 利用例 6.11，令 $\theta_1=\arg\mu-\arg z-\arg w, \theta_2=\arctan\dfrac{|w|}{|z|}, \theta_3=\arg z, \theta_4=\arg w$，计算验证即可。

   (3) 酉相似不改变 Hermite 性，不影响结论，利用定理 6.15 不妨设 A 已酉相似为对角阵 $\mathrm{diag}(a+b\mathrm{i}, c+d\mathrm{i})$，$b=d$ 时取 $\lambda=b\mathrm{i}, \mu=1$，否则取 $\lambda=\dfrac{bc-ad}{b-d}, \mu=a-\lambda+b\mathrm{i}$，计算验证知成立。

   (4) 酉相似后酉方阵仍为酉方阵，不影响结论，利用定理 6.15 不妨设 A 已酉相似为对角阵 $\mathrm{diag}(x,y)$。取 $\lambda=\dfrac{x+y}{2}, \mu=\left|\dfrac{x-y}{2}\right|$，计算验证知成立。

3. 设酉方阵 P 写为习题 2(1) 形式，$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} P = P \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$，计算得 $w=0, cz=b\overline{z}$。取模知 $|b|\neq|c|$ 时无解，$|b|=|c|$ 时若全为 0 可任取，否则取 z 使 $z^2=\dfrac{b}{c}$，计算验证知成立。

4. (1) $Q=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \dfrac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{2} & \dfrac{1-2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

   (2) * 只对规范方阵有谈论酉相似标准形的意义

   验证知 A 规范，可相似对角化为 $\mathrm{diag}\left(1+\mathrm{i}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{i}), \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{i})\right)$

   (3) 计算 A^HA 知 A 奇异值为 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

5. 由于相似不影响此题结论，可设 A 已经酉相似为上三角方阵，此时 $A-I$ 为秩为 1 的上三角方阵，可知其只有一行 (或列) 不为 0，利用置换可使其第一行/最后一列不为 0。因此，A 为所有可酉相似为 $I+$ 对应上三角方阵的方阵。

6. 完全仿照 6.2 节习题 4 即可。

7. * 此映射实际为环的嵌入同态

   双射证明：直接验证单射、满射即可

   (1) 直接计算验证即可，注意 $(A+B\mathrm{i})^H=A^T-B^T\mathrm{i}$。

   (2) 由 (1) 第二个式子构造逆知结论。

   (3) 由 (1) 第二、三个式子代入条件知结论。

   (4) 由 (1) 第三个式子代入条件知结论。

   (5) 由 (1) 第三个式子代入条件知结论。

   (6) 由 (1) 第二、三个式子代入条件知结论。

8. 由于 $\mathrm{tr}(AA^H)=||A||_F^2, \mathrm{tr}(B^HA)=\mathrm{tr}((A^HB)^H)=\overline{\mathrm{tr}(A^HB)}$，此题即为 2.1 节习题 11。

9. 完全仿照 6.3 节例 6.10 即可。

10. 完全仿照 6.3 节例 6.9 即可。

11. 注意到 $A = X + Y\mathrm{i}$，设特征值 $\lambda = k + t\mathrm{i}$ 对应的特征向量为 α，即有 $(X + Y\mathrm{i})\alpha = (a + b\mathrm{i})\alpha$。

设 $X = P^H \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)P, Y = Q^H \operatorname{diag}(y_1, \dots, y_n)Q$ 为酉相似对角化，上式左右同乘 α^H 得

$(P\alpha)^H \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)P\alpha + \mathrm{i}(Q\alpha)^H \operatorname{diag}(y_1, \dots, y_n)Q\alpha = k\alpha^H\alpha + t\alpha^H\alpha\mathrm{i}$

由实部相等可知 $k\alpha^H\alpha = (P\alpha)^H \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)P\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i|(P\alpha)_i|^2$

因此 $k\alpha^H\alpha \geq x_1 \sum\limits_{i=1}^{n} |(P\alpha)_i|^2 = x_1(P\alpha)^H P\alpha = x_1\alpha^H\alpha \Rightarrow k \geq x_1$，其余不等号同理。

12. 设酉方阵 $U_0 = A_0 + B_0\mathrm{i}$，其中 A_0, B_0 为实方阵。只需证明，存在正交阵 P, Q 使 PA_0Q, PB_0Q 均为对角阵即可。

令 $P_A A_0 Q_A$ 为 A_0 的奇异值分解形式，令 $A = P_A A_0 Q_A = \operatorname{diag}(\sigma_1 I_1, \dots, \sigma_k I_k, O)$，其中 $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ 为不同的非零奇异值，再记 $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1 I_1, \dots, \sigma_k I_k)$，$B = P_A B_0 Q_A$，由于 $A + B\mathrm{i} = P_A(A_0 + B_0\mathrm{i})Q_A$，正交方阵为酉方阵，酉方阵乘积为酉方阵，因此 $U = A + B\mathrm{i}$ 仍为酉方阵。由于 $(A+Bi)^H = A^T - B^T i$，由酉方阵性质直接计算 UU^H, U^HU 虚部可知 $A^TB = B^TA, AB^T = BA^T$，由于对角阵 $A = A^T$，可化为 $AB = B^TA^T, A^TB^T = BA$，即 $AB = (AB)^T, BA = (BA)^T$，AB, BA 均为对称阵。

由之前假设，$A = \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$，对 B 同样分块为 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$，由 AB, BA 对称可得 $\Sigma B_3 = B_2\Sigma = O$，由 Σ 可逆知 $B_2 = B_3 = O$，设 $P_B B_4 Q_B$ 为 B_4 的奇异值分解形式，接下来考察 B_1。

由条件，ΣB_1 与 $B_1\Sigma$ 均为对称阵。先说明 $B_1 = \operatorname{diag}(C_1, \dots, C_k)$，$C_i$ 与 I_i 同阶。这是由于，若 B 在这些区域外有元素 b_{ij}(不妨设为 σ_1, σ_2 交叉处)，则有 $\sigma_1 b_{ij} = \sigma_2 b_{ji}, \sigma_2 b_{ij} = \sigma_1 b_{ji}$，解得 $b_{ij} = b_{ji} = 0$。进一步计算知一切 C_i 均为对称阵，因此由 6.2 节定理 6.7 存在正交阵 P_i 使得 $P_i C_1 P_i^T$ 为对角阵。取 $P = \operatorname{diag}(P_1, \dots, P_k, P_B)P_A, Q = Q_A \operatorname{diag}(P_1^T, \dots, P_k^T, Q_B)$，计算验证知即符合要求。

13. 设 $A = UBU^H$，U 为酉方阵。由习题 12 取 P, Q 使 $U_0 = PUQ$ 为对角阵，则 $PAP^T = U_0 Q^T BQU_0^H$，由于 A, B 正交相似等价于 PAP^T, Q^TBQ 正交相似，这样处理可不妨设 U 为对角酉方阵，即对角元模全为 1 的复对角阵。记其为 $\operatorname{diag}(u_1, \dots, u_n)$，接下来说明 A, B 正交相似。

由于 $a_{ij} = u_i\overline{u_j}b_{ij}, u_i\overline{u_j} > 0$，$A, B$ 含零情况相同。

将 A 看作无向图的邻接矩阵 (与 2.1 节类似，但不完全相同)，定义若 a_{ij} **或** a_{ji} 不为 0，则称点 i 与点 j 之间有一条**边**，若两点之间可通过无向边到达，则称为两点**连通**，若图中任意两点连通，则称此图为**连通图**。

先说明，若 A 为连通图对应的矩阵，则原命题成立。由于将 U 改为 $tU, |t| = 1$ 仍有 $A = UBU^H$，取 $t = \overline{u_1}$ 即有此时 $u_1 = 1$。可以证明此时 $u_i \in \mathbb{R}$，从而 U 即为正交阵。首先，若不存在含 1 的边，则 A 不连通，因此可不妨设 $a_{12} \neq 0$，此时 $a_{12} = \overline{u_2}b_{12}$，由于 $a_{12}, b_{12} \in \mathbb{R}, |u_2| = 1$ 可发现 $u_2 = \pm 1 \in \mathbb{R}$。以此类推，由于 A 连通，可以通过这样的方式确定一切 u_i 的值，从而原命题成立。

接着说明，若 A 不连通，则可置换相似为 $\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$，且 A_i 连通。证明思路为，找到所有与 1 连通的点，说明这些点互相连通，类似 2.4 节习题 14(注意那题为有向图，此题为无向图，存在差异) 将它们置换到 A_1 的位置，然后继续找下一个点，直到所有点被置换完成。此时若 $\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$ 之外有不为 0 的值，可得有更大的互相连通的分支，矛盾。

设置换阵 P 使 PAP^T 为上述形式，可发现 $(PAP^T) = PUP^T(PBP^T)P^TU^HP$，可发现 PUP^T 仍为对角阵，由于其主子矩阵仍为酉方阵，可知每个 A_i 与 B_i 酉相似，由已证，它们正交相似，设 $A_i = P_iB_iP_i^T$，P_i 为正交阵，则 $A = \operatorname{diag}(P_1, \dots, P_k)B \operatorname{diag}(P_1, \dots, P_k)^T$，因此两者正交相似。

第七章　二次型

§7.1　二次型的化简

1. 直接对比系数发现对角元为对应 x_i^2 的系数，其余为对应 x_ix_j 系数的一半，由于 $x_ix_j = x_jx_i$ 得对称。

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bc+ad \\ bc+ad & 0 \end{pmatrix}$，在特征二域中，$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc = bc+ad$，由可逆不为 0，因此其不可能为对角方阵。

3. * 由于 A 一定为二次项构成的二次型对应的对称阵，由此可解出 b，进一步算出 c

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c = -3$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, c = 0$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.5 \\ 0.5 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -0.5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = 5$

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & -0.5 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -0.5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = 2$

4. * 若选取的先后次序不同，结果未必唯一，但正负式子的个数一定唯一

(1) $(x_1+x_2)^2 - 3\left(x_2 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{4}{3}\left(x_3 - \frac{9}{8}x_4\right)^2 - \frac{27}{16}x_4^2$

(2) $(x_1+x_3-2x_4)^2 + x_2^2 + \frac{9}{4}x_3^2 - 4\left(x_4 - \frac{3}{4}x_3\right)^2$

(3) $2\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)^2 + 4x_4^2 - \frac{1}{2}(x_1-2x_4)^2 - (x_3-x_4)^2$

(4) $\frac{1}{4}(x_1+2x_2+x_3+3x_4)^2 + 4x_4^2 - \frac{1}{4}(x_1+2x_2-x_3+5x_4)^2$

5. * 由 6.2 节定理 6.7，实对称矩阵可正交相似为对角阵 (由此亦可知特征值全为实数)，而对角阵可用对角阵相合将非零特征值模长变为 1，由此可知正负惯性指数即为其特征值中正负的个数。

(1) 对应矩阵对角元为 $n-1$，其余均为 -1，行列变换可知特征值为 $n-1$ 重 n 与 0，因此正惯性指数为 $n-1$，负惯性指数为 0。

(2) 对应矩阵对角元为 0，其余均为 $\frac{1}{2}$，行列变换可知特征值为 $n-1$ 重 $-\frac{1}{2}$ 与 $\frac{n-1}{2}$，因此正惯性指数为 1，负惯性指数为 $n-1$。

(3) 设 n 阶时为 Q_n，利用例 7.2 类似的配方技巧，注意到，从 Q_n 中提取出 $(x_1+x_n)(x_2+x_3) - (x_3-x_4)(x_n-x_{n-1})$ 后，相当于 Q_{n-4}，而提取出的是 $\frac{1}{4}(x_1+x_n+x_2+x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1+x_n-x_2-$

$x_3)^2-\dfrac{1}{4}(x_3+x_n-x_4-x_{n-1})^2+\dfrac{1}{4}(x_3+x_{n-1}-x_4-x_n)^2$，为 ±1 各两个，因此 Q_n 比 Q_{n-4} 正负惯性指数均多 2，由此模 4 分类得：

$n=4k+1$ 时，正惯性指数 $2k+1$，负惯性指数 $2k$；

$n=4k+2$ 时，正惯性指数 $2k+1$，负惯性指数 $2k+1$；

$n=4k+3$ 时，正惯性指数 $2k+1$，负惯性指数 $2k+2$；

$n=4k$ 时，正惯性指数 $2k-1$，负惯性指数 $2k-1$。

6. (1) 设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，令 $\theta=\arctan\dfrac{b+c}{a-d}$ ($a-d=0$ 则为 $\dfrac{\pi}{2}$)，取正交阵 $P=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$，计算验证知成立。

   (2) 由 5.5 节例 5.19，A 与 A^T 相似。$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=A^T$，因此相合 (此方阵假设上三角可强行解出)。

   设 $P=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ 为正交阵，若相似可设 $PA=A^TP$，计算后可知 $b=d,a=e,c=g,f=h,a+c=f,b+f=c$，因此 $P=\begin{pmatrix}a&-a&c\\-a&a&a+c\\c&a+c&i\end{pmatrix}$。考虑 PP^T 前两个对角元知 $2a^2+c^2=2a^2+(a+c)^2=1$，由于 P 可逆，$a\neq0$，因此 $a=-2c$，代入直接计算 PP^T 第一行第二列发现不为 0，因此 P 不为正交阵，从而不正交相似。

7. (2) 先证明第二问。可设 A 已正交相似为 6.2 节定理 6.8 形式，不妨设 $b_i>0$，否则用置换阵 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 相似即可，再取 $P=\mathrm{diag}(b_1^{-1/2},b_1^{-1/2},b_2^{-1/2},b_2^{-1/2},\dots,b_s^{-1/2},b_s^{-1/2},I)$，则 $A_1=P^TAP$ 中每个 t_i 已被相合为 1。然后寻找置换方阵 Q 使 Q^TA_1Q 为符合条件的形式，取 Q 的左上角 $2s$ 阶为将 $2k+1$ 列换到 k 列，将 $2k$ 列换到 $s+k$ 列的置换阵，右下角为 I 即可。

   (1) 对阶数归纳。不妨设 $\le n$ 阶时已经成立，下面考虑 $n+1$。注意到右乘 $T_{ij}(\lambda)$ 表示把第 i 列 λ 倍加至第 j 列，左乘其转置为第 i 行 λ 倍加至第 j 行，由此只要 A 不为反对称，可以使用合适的 $T_{ij}(1)$ 使有对角元不为 0，不妨设 $a_{11}\neq0$。

   右乘 $T_{1i}\left(-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\right),i=2,\dots,n+1$，可使第一列只有 a_{11} 不为 0。若此时右下角不为反对称，则已经成立。若右下角为反对称，可将其相合为第二问中 A_1 的形式。设此时第一行为 $a_{11},b_2,\dots,b_{n+1}$，α 使 $(a_{11}+b_3\alpha)(b_2-\alpha)\neq0$，右乘 $T_{31}(\alpha)T_{12}\left(-\dfrac{\alpha}{a_{11}+b_3\alpha}\right)$ 相合，此操作将 a_{22} 变为了 $-\dfrac{\alpha(b_2-\alpha)}{a_{11}+b_3\alpha}$，而其余 0 项不变，故此时右下角不再为反对称，可以运用归纳假设，由此原命题成立。

§7.2　正定方阵

1. 定理 7.3：验证即可，注意到，由于 P 可逆，从当即可推出当且仅当。

   定理 7.5：类似验证即可，注意 Hermite 矩阵酉相似标准型可大量简化证明过程。

2. 注意到，将 A 进行正交相似对应 $x_1,\dots,x_n$ 的正交代换，积分不变，因此设 A 特征值为 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$(由正定知均正)，由 6.2 节定理 6.7 不妨设 A 为它们构成的对角阵，此时 $x^TAx=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2$，再做倍数

换元可知积分结果为 λ_i 全为 1 的情况的 $\displaystyle\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}}$ 倍 (运用 5.1 节定理 5.2)。

(1) 注意此为 n 维球体积 (可直接积分递推等计算)，为 $\dfrac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\dfrac{\pi^n}{\det(A)}}$，其中 Γ 为 Γ 函数。

(2) 原式 $= \dfrac{1}{\sqrt{\det(A)}}\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x_i^2}\mathrm{d}x_i\right)^n = \sqrt{\dfrac{\pi^n}{\det(A)}}$

3. 法一：几何，利用定理 7.4-4(实矩阵 H 即为 T)，设 $P = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$，可发现 P 可逆等价于 u,v,w 不共面 (用线性相关或列变换证明)，解 $A = P^TP$ 可知 $||u|| = ||v|| = ||w|| = 1, u^Tv = \cos\theta_1, u^Tw = \cos\theta_2, v^Tw = \cos\theta_3$，又由于单位向量内积即为夹角余弦，可知 A 正定等价于存在三个相互夹角分别为 $\theta_{1,2,3}$ 的不共面向量。考虑四面体三个顶角可知此即等价于题中所述关系。

   法二：计算顺序主子式发现一阶为 1 必然大于 0，二阶 $\sin\theta_1^2 > 0 \Leftrightarrow \theta_1 \neq 0, \pi$。三阶顺序主子式，即其行列式值为 $1 - \cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_3 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$。由题目条件猜测验证可知其有因式 $\cos\theta_3 - \cos(\theta_1+\theta_2)$，由对称知其有因式 $T = (\cos\theta_3 - \cos(\theta_1+\theta_2))(\cos\theta_2 - \cos(\theta_1+\theta_3))(\cos\theta_1 - \cos(\theta_2+\theta_3))$，计算可知其实际上为 $\dfrac{T}{1-\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$，由此可验证条件 (可发现三阶顺序子式大于 0 时二阶必然大于 0)。

4. 存在性：利用 6.4 节定理 6.15-2 将其酉相似为对角阵，注意到其特征值均为实数，由此设其对角元为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mathbf{0}$，再取对角阵 $\mathrm{diag}\left(\sqrt{\dfrac{1}{|\lambda_1|}}, \ldots, \sqrt{\dfrac{1}{|\lambda_n|}}, I\right)$ 共轭相合即可得到。

   唯一性：直接仿照 7.1 节定理 7.2 即可。

   (类似 7.1 节定义 7.3 定义正负惯性指数，则可发现正定当且仅当正惯性指数为阶数，半正定当且仅当负惯性指数为 0)

5. (1) 由于 A 正定可知其特征值均正，利用 5.2 节定理 5.6-3 知 A^{-1} 特征值均正，再结合定理 7.4-2,6 即有结论。

   (2) $\det(A) \leq \det(A_{11})\det(A_{22})$

   由于 A_{11} 正定，其可逆且行列式大于 0，由 2.4 节例 2.18 消元知只需证明 $\det(A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}) \leq \det(A_{22})$。由 (1) 知 A_{11}^{-1} 正定，类似定理 7.3 可知 $A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}$ 半正定。通过 Schur 公式计算验证可知 $A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12} = B_{22}^{-1}$，因此 $A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}$ 正定。

   利用例 7.7，用 P 将 $A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}$ 与 $A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}$ 同时相合对角化 (那么 A_{22} 为两者之和亦被对角化)，由于 $\det(P^HMP) = |\det(P)|^2\det(M)$，可知只需证明对角化后行列式存在大小关系，而由于前述正定、半正定性，每个对角元均对应小于等于，且全为正，因此大小关系成立。

   $\det(A_{22})\det(B_{22}) \geq 1$(由对称性，另一个式子可直接类似过程得出)

   由上一部分已证，$\det(A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}) \leq \det(A_{22})$，又由 $A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12} = B_{22}^{-1}$ 可直接得到结果 (由于 B_{22} 正定，其逆的行列式大于 0)。

   (3) 同样只证明对 $A_{22}B_{22}$ 成立，由 (1) 知其正定，故 $\lambda > 0$。

   $A_{22}B_{22} = A_{22}(A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = (I - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1})^{-1}$，由例 7.6 可知 $A_{22}B_{22}$ 特征值均大于 0，由此只需证 $I - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$ 的特征值均 ≤ 1。

   之前已说明 $A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}$ 半正定，A_{22}^{-1} 正定，设 $A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12} = Q^HQ, A_{22}^{-1} = P^HP$，且 P 可逆，可发现 $I - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} = I - Q^HQP^HP = P^{-1}(I - (QP^H)^HQP^H)P$，由于相似矩阵特征值相同，可知 $I - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$ 与 $I - (QP^H)^HQP^H$ 特征值完全相同，又因 $I - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$ 全部特征值大于 0 可知 Hermite 阵 $I - (QP^H)^HQP^H$ 正定，而 $(QP^H)^HQP^H$ 半正定，因此 $I - (QP^H)^HQP^H$ 特征值均 ≤ 1，由此即得证。

6. 利用例 7.7，用 P 将 A,B 同时对角化，可知 P^HAP 每个对角元大于/大于等于 P^HBP 的对应对角元，而 $(P^HAP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P^{-H}$，由此 $P^{-1}A^{-1}P^{-H}$ 每个对角元为 P^HAP 对应对角元的倒数，小于/小于等于 $P^{-1}B^{-1}P^{-H}$ 的对应对角元。因此，$P^{-1}(B^{-1}-A^{-1})P^{-H}$ 正定/半正定，由定理 7.3 知 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定/半正定。

7. (1) 由 6.4 节定理 15，设 $A=P^HBP$，P 为酉方阵，B 为对角阵，又因其对角元均非负，取 C 为每个对角元的对应次方根中的非负数，则 $X=P^HCP$ 即符合要求。若有 Y 满足，令 $Y=Q^HDQ$，Q 为酉方阵，D 为对角阵，则有 $P^HC^mP=Q^HD^mQ$，因此 C^m 与 D^m 酉相似，根据特征值可知只能对应分量相等，再由半正定可知 C,D 的对应分量相等，因此 $C=D$，由 $P^HC^mP=Q^HD^mQ$ 直接计算可知 $X=Y$。

   (2) $A=\begin{pmatrix}3.01 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, m=2$

   (3) 由例 7.7，设 $A=P^HD_1P, B=P^HD_2P$，为 A,B 同时相合对角化，由相合对角化后仍为半正定，D_1,D_2 对角元 (记为 λ_i,μ_i) 大于等于 0。直接计算 $A^2-B^2=P^H(D_1PP^HD_1-D_2PP^HD_2)P, A-B=P^H(D_1-D_2)P$。

   A^2-B^2 正定/半正定 $\Leftrightarrow$ $D_1PP^HD_1-D_2PP^HD_2$ 正定/半正定 $\Rightarrow$ 其所有对角元大于/大于等于 0 (由定理 7.4/5-4)，又由于 PP^H 正定，计算得 $\lambda_i^2>/\geq\mu_i^2$，由对角元非负知 $\lambda_i>/\geq\mu_i$，因此 $A-B$ 正定/半正定。

   (4) (结论正确，但解决需要较高级的知识)

8. (1) 法一：我们接着定理 7.4 留作习题部分的证明继续 (设 A 的 k 阶顺序主子式值为 M_k)：

   采用归纳法，一阶显然满足，若 n 阶满足，$n+1$ 阶时，由于 $M_1=a_{11}>0$，取 $P_1=\prod_{i=2}^{n+1}T_{1i}\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$，则 $P_1^HAP_1=\operatorname{diag}(a_{11},A_1)$。

   由于 P_1 为上三角阵，分块计算知 $P_1^HAP_1$ 的 k 阶顺序主子式为 $\det(P_1^{H(k)}A^{(k)}P_1^{(k)})$，其中 $A^{(k)}$ 为 A 的 k 阶顺序主子式，又由于 P_1 对角元均为 1，这个式子的值即为 M_k。因此，P_1 共轭相合不改变 A 各阶顺序主子式的值，由此可知 A_1 的 k 阶顺序主子式为 $\frac{M_{k+1}}{M_1}$。设 P_2 使 $A_1=P_2\operatorname{diag}\left(\frac{M_2}{M_1},\frac{M_3}{M_2},\dots,\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)P_2^H$，则取 $L=P_1^{-H}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & P_2\end{pmatrix}$ 即满足题目中要求。

   法二：设 $A=S^HS$，S 可逆，设 $S=QR$ 为其 QR 分解 (6.1 节定理 6.3)，则 $A=R^HR$，而 R 即为上三角阵。

   (下三角类似 5.1 节习题 2 即可对应构造)

   (2) 法一：设 $A=S^HS$，S 可逆，则 $S^{-H}BS^{-1}$ 亦为 Hermite 阵，利用 6.4 节定理 6.15，设酉方阵 P 使得 $P^HS^{-H}BS^{-1}P$ 为对角阵，则 $S^{-1}P$ 即符合要求。

   法二：由于 A 正定，我们只要证明，存在正数 t 使 $A+tB$ 半正定，即可类似例 7.7 将 $A,A+tB$ 同时相似为对角阵，由此即知此时 B 对角。利用定理 7.4-8，t 趋向 0 时 $A+tB$ 的各阶顺序主子式均大于 0，因此由极限保号性一定存在充分小的 t 满足条件，由此得证。

   (3) 法一：将半正定阵看作一列正定阵的极限，利用例 7.7，实数列极限为实数，由此得证。

   法二：由习题 7(1) 知存在 $A^{1/2}$，而 $\det(xI-AB)=\det(xI-A^{1/2}A^{1/2}B)=\det(xI-A^{1/2}BA^{1/2})$ (利用 3.2 节例 3.12)，而 $A^{1/2}BA^{1/2}$ 为 Hermite 阵，由此得证。

   (4) 法一：同上述法一，非负实数列极限为非负实数，由此得证。

   法二：同上述法二，拆分 B 为 Q^HQ 可知此时 $A^{1/2}BA^{1/2}$ 半正定，由此得证。

9. (1) 正确，证明方式同习题 8(1) 法二。

   (2) 错误，反例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$。

   (3) 错误，反例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$。

   (4) 错误，反例 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&0\end{pmatrix}$。

10. (1) 类似 2.2 节习题 8(3) 可知 $(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$，由此验证知成立。

    (2) 由定理 7.4-4,存在可逆 PQ 使 $A=P^HP,B=Q^HQ$。因此由 2.2 节习题 7 知 $D=(P\otimes Q)^H(P\otimes Q)$，而 PQ 可逆可知由 2.4 节习题 9 知 $P\otimes Q$ 可逆，由此 D 正定。

    令 $P=(p_{ij}),Q=(q_{ij})$，可知 C 的第 i 行第 j 列为 $\sum_{k=1}^{n}(\overline{p_{ki}}p_{kj})\sum_{k=1}^{n}(\overline{q_{ki}}q_{kj})$。令 n 阶方阵 R_k 的的第 i 行第 j 列为 $p_{kj}q_{ij}$，令 $R=\begin{pmatrix}R_1&\cdots&R_n\end{pmatrix}^T$，则 $C=R^HR$。由于 $R_k=\mathrm{diag}(p_{k1},\dots,p_{kn})Q$，可发现 RQ^{-1} 通过行变换可使前 n 行构成 P，因此其列满秩，因此 R 列满秩，由此得证。

    (3) 与 (2) 相同构造矩阵即可。

11. (1) 利用 2.4 节习题 12，对其任何 $\lambda\le 0$，$A-\lambda I$ 为主角占优矩阵，因此行列式不为 0，由此知其所有特征值均正，由定理 7.4-2 得成立。

    (2) 将上一问证明中 $\lambda\le 0$ 改为 $\lambda<0$，由此知其所有特征值非负，由定理 7.5-2 得成立。

12. 由于 $B^TB=D+A$，P 应与 B 形式类似，事实上，由于 B 每行代表连接两个顶点的一条边，因此必恰有两个 1，将 B 每行的第二个 1 变为 -1，其余不变，即为所求的 P。

13. (1) 由 6.4 节习题 11 知成立 (或仿照那题证法亦可)。

    (2) 利用 6.4 节定理 6.14 设 P^HAP 为 A 的酉相似三角化，可发现 P^HBP 的对角元为 P^HAP 对角元的实部，再利用习题 5 归纳可知 $\det(B)=\det(P^HBP)\le P^HBP$ 对角元乘积 $\le P^HAP$ 对角元乘积的模 $=|\det(P^HAP)|=|\det(A)|$。利用习题 5 证明过程发现取等要求 P^HAP 对角，即 A 为 Hermite 阵，矛盾。

14. 先证明 $B+C$ 可逆：若否，设特征值 0 对应特征向量 α，则 $(B+C)\alpha=\mathbf{0}$，左侧同乘 α^H 得 $\alpha^HB\alpha=-\alpha^HC\alpha$，由正定定义知 $\alpha^HC\alpha$ 为负实数，从而 $\alpha^HA\alpha=-\alpha^H(B+C+C^H)\alpha=\alpha^HC^H\alpha=(\alpha^HC\alpha)^H$ 仍为负实数，矛盾。

    任取 $(B+C)^{-1}C$ 特征值 λ，对应特征向量 α，有 $(B+C)^{-1}C\alpha=\lambda\alpha$，左侧同乘 $\alpha^H(B+C)$ 得 $\alpha^HC\alpha=\lambda(\alpha^HB\alpha+\alpha^HC\alpha)$。由于 B 为记 $\alpha^HC\alpha=a+b\mathrm{i},\alpha^HB\alpha=t,a,b,c\in\mathbb{R}$，计算知 $|\lambda|^2=\dfrac{a^2+b^2}{(a+t)^2+b^2}$。由正定定义知 $\alpha^HA\alpha=2a+t>0,t>0$，可计算得 $|\lambda|^2<1$，原命题得证。

§7.3 一些例子

1. 由 6.4 节定理 6.15，设 $A=UDU^H$，U 为酉方阵，$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_k,O)$($\lambda_i$ 为非零特征值)，取 $D_1=\mathrm{diag}(|\lambda_1|,\dots,|\lambda_k|,O),D_2=\mathrm{diag}(\dfrac{\lambda_1}{|\lambda_1|},\dots,\dfrac{\lambda_k}{|\lambda_k|},I)$ 令 $S=UD_1U^H,P=UD_2U^H$，验证得成立。

2. (暂缺，疑似不可做)

3. 利用例 7.10，$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & 1 \\ & & 1 & 1\end{pmatrix}$,c 只有第 i 个分量为 1，其他为 0。行列变换可知 $\det(A)=1$，而记 A 的第 k 顺序主子式为 $A_k(k<n)$，利用 3.3 节习题 2 可递推证明 $A_k=k+1$，因此 A 正定。由例 7.10 知 x_i 最大值为 A^{-1} 第 i 个对角元的平方根，利用伴随方阵知为 $\begin{cases}1 & i<n \\ \sqrt{n} & i=n\end{cases}$。进一步得 x_i 取值范围为 $\begin{cases}[-1,1] & i<n \\ [-\sqrt{n},\sqrt{n}] & i=n\end{cases}$。

4. 利用例 7.10，此时 A 除对角元为 1 外均为 $\dfrac{1}{2n}$，因此 A 每行元素和均为 $k=\dfrac{3n+1}{2n}$，估算验证知 A 正定。c 的所有分量均为 1。记 $B=\dfrac{1}{k}A$，由 3.3 节习题 3(2) 知 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}=n\det(B)$，而利用例 7.10 知最大值即为 A^{-1} 各行列元素和的平方根，为 $\sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{\det(A)}}=\sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{k^{n-1}B_{ij}}{k^n\det(B)}}=\sqrt{\dfrac{n}{k}}=\sqrt{\dfrac{2n^2}{3n+1}}$，进一步得其取值范围为最大值的相反数到最大值的闭区间。

5. 设 P,Q 为置换阵，由置换阵为正交阵知 $(PAQ)(PAQ)^T=PAA^TP^T=nPP^T=nI$，因此不妨设这个子矩阵在左上角，分块为 $\begin{pmatrix}A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$，可发现 AA^T 的左上角为 p 阶方阵 $A_1A_1^T+A_2A_2^T$，且 $A_1A_1^T$ 的所有元素均为 q。由结论可算得 A_2 任意不同两行看作向量 (共 p 个向量)，任意两不同行内积结果为 $-q$，每个向量与自身内积为 $n-q$，所有向量之和的模长平方为 $p(n-q)+p(p-1)(-q)$，而模长平方和不可能为负，由此解出 $pq\geq n$。

6. 仿照例 7.12 设出奇异值分解，取出右式中最大的 k，完全仿照证明即可 (注意运用 6.4 节例 6.14 即可知 $||B-A||_F$)。

7. 类似例 7.11 设出 $R_A(x)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|y_i|^2}{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}$，由于 P 可逆，x,y 的维数相同，不妨直接考虑 y。
当 V 为 $\mathbf{e}_1$ 到 $\mathbf{e}_k$ 生成的 k 维子空间时，可发现 $\min\limits_{y\in V}R_A(x)$ 在 $y=\mathbf{e}_k$ 时取到，此时最小值即为 $\lambda_k(A)$。类似 2.3 节习题 7 考虑基可知 V 的任意 k 维子空间中都存在一个前 $k-1$ 个分量均为 0 的非零向量，取 y 为这个向量时即发现此时值不超过 $\lambda_k(A)$，因此最小值不超过 $\lambda_k(A)$，左侧等号成立。对于右侧等号，对称地类似验证即可。

8. (暂缺)

9. (暂缺)

10. 利用数论知识知 $i\mid n,\ j\mid n\Rightarrow \operatorname{lcm}(i,j)\gcd\left(\dfrac{n}{i},\dfrac{n}{j}\right)=n$，$\displaystyle\sum_{d|n}\varphi(d)=n$，由此可计算：
原式 $=\displaystyle\sum_{i|n,j|n}\frac{x_ix_j}{\operatorname{lcm}(i,j)}=\sum_{i|n,j|n}\frac{x_ix_j}{\operatorname{lcm}(\frac{i}{n},\frac{j}{n})}=\frac{1}{n}\sum_{i|n,j|n}x_ix_j\gcd(i,j)=\frac{1}{n}\sum_{i|n,j|n}x_ix_j\sum_{d|\gcd(i,j)}\varphi(d)=$ $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\sum_{d|i|n,d|j|n}x_ix_j=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\Big(\sum_{d|i,i|n}x_i\Big)^2$
这样配方后，$d=n$ 的项即为要证式的右侧，而其他项均为平方，因此大于等于号成立。

11. (1) 由于 (3) 中的 Q 为下三角方阵，其可逆，利用 7.2 节定理 7.4-4 知 A 正定。

(2) P^TP 第 i 行第 j 列为 $\sum\limits_{k=1}^{m} p_{ki}p_{kj} = \sum\limits_{i|k,j|k,k\le m}\dfrac{ij}{m} = \dfrac{ij}{m}\dfrac{m}{\mathrm{lcm}(i,j)} = \gcd(i,j)$，由此得证。

(3) 由数论知识知 $\sum\limits_{d|n}\varphi(d) = n$。$Q^TQ$ 第 i 行第 j 列为 $\sum\limits_{k=1}^{n} q_{ki}q_{kj} = \sum\limits_{k|i,k|j}\varphi(k) = \gcd(i,k) = a_{ij}$，由此得证。

12. 由于同号时可取到最大值，不妨设 x_i 均正，以下若出现编号 x_{2n+i}，视为 x_i。
利用 $a+b=1, a>0, b>0 \Rightarrow ab \le \dfrac{1}{4}$，计算可知 $\sum\limits_{1\le i\le j\le 2n}\min((j-i),(2n-j+i))x_ix_j = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}x_{i+j-1}\right)\cdot\left(\sum\limits_{j=1}^{n}x_{i+j+n-1}\right) \le \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{4} = \dfrac{n}{4}$。
由于 $\min((j-i),(2n-j+i)) \le n$，$Q \le n\sum\limits_{1\le i\le j\le 2n}\min((j-i),(2n-j+i))x_ix_j \le \dfrac{n^2}{4}$，且取 $x_1 = x_{n+1} = \dfrac{1}{2}$，其他为零时可取到最大值。

13. 类似 3.1 节习题 5(6) 可知 A 的 k 阶顺序主子式为 $\dfrac{1}{k}\prod\limits_{i=1}^{k-1}\left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}\right) = \dfrac{1}{(k!)^2} > 0$，由 7.2 节定理 7.4-8 知其正定。
考察 A 正交相似后的对角阵 (不妨设特征值从大到小排列)，由于正定，其所有特征值均正，此对角阵即为奇异值的形式，因此由 6.3 节例 6.7-3 与例 7.11 知 $||A|| = \sigma_1(A) = \lambda_1(A) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}_{n\times 1}} R_A(x)$。
$x^TAx = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{k}\left(\sum\limits_{i=1}^{k-1}2x_i + x_k\right)$，只需证明 x_i 不全为 0 时其小于 $4\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2$。设 $S_0 = 0, S_k(k>0) = \sum\limits_{i=1}^{k}x_k$，即要证 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{S_k^2 - S_{k-1}^2}{k} < 4\sum\limits_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1})^2$，至此交叉项只剩下了相邻项，可归纳配方解决。

14. (暂缺)

第八章　线性空间

§8.1　基本概念

1. (1) 若有 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 为零向量，则 $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$。

(2) 若有 β_1, β_2 为 $-\alpha$，$\beta_1 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = \beta_2$。

(3) $\lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0}, 0\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha$，消去知成立。

(4) 若 $\lambda \ne 0, \lambda\alpha = \mathbf{0}$，则 $\alpha = \dfrac{1}{\lambda}\lambda\alpha = \mathbf{0}$。

2. (1) 是。

(2) 不是，不存在零向量。

(3) 是。

(4) 不是，不满足加法封闭性。

(5) 是。

(6) 不是，不存在零向量。

3. (1) 否，U 不是 V 的子集。

   (2) 是。

   (3) 否，函数定义域不同。

   (4) 是。

   (5) 不是，不满足数乘封闭性。

   (6) 不是，不满足加法封闭性 (6.2 节习题 7(2))。

4. $\mathbb{F}^{m\times n}$ 上的矩阵到 $\mathbb{F}^{mn}$ 上的向量可按分量作映射 $a_{ij}\to x_{(n-1)i+j}$，此映射即为同构.

5. 由同构可逆，不妨设 $m>n$，考虑 $\mathbb{F}^m$ 中只有第 i 个分量为 1，其他为 0 的 m 个向量，映射到 $\mathbb{F}^n$ 后，由于 $n<m$，必然存在某个的像可以由其他的像用加法与数乘表出，与其在 $\mathbb{F}^m$ 中不可被表出矛盾。

6. 为子空间直接验证即可。

   $\mathbb{F}[x]$ 到 V_1 的同构为 $f(x)\to f(x^2)$，$\mathbb{F}[x]$ 到 V_2 的同构为 $f(x)\to(x-1)(f(x-1)-f(0))+f(0)$。

§8.2　线性相关

1. 由定义与定理 8.4 直接验证即可。

2. (1) 线性无关。

   (2) 线性无关。

   (3) $n\geq 3$ 时线性相关。注意到 $x^t+x^{t-1}(1-x)=x^{t-1}$。

   (4) 线性无关。利用定义，问题转化为 $\begin{pmatrix}1 & a_0 & \cdots & a_0^n\\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ 是否存在非零解。利用 3.2 节例 3.8 知此矩阵可逆，再由 2.4 节定理 2.9 知不存在非零解，因此线性无关。

3. (1) 线性无关。

   若存在 λ_i 使 $\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k\sin(n_kx)=0$，求两次导知 $\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_kn_k^2\sin(n_kx)=0$，类似可知 $\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_kn_k^{2t}\sin(n_kx)=0,t\in\mathbb{N}^*$，有这些式子类似习题 2(4) 可推出 $\lambda_i\sin(n_ix)$ 全为 0，因此 λ_i 全为 0，即为线性无关。

   (2) 线性无关。类似 (1) 可证明。

   (3) 线性相关。$\sin(2x)\cos(2x)=\sin(x)\cos(3x)+\sin(x)\cos(x)$。

   (4) 线性相关。$\sin^3(x)\cos(x)=\sin(x)\cos(x)-\sin(x)\cos^3(x)$。

4. 利用 3.4 节习题 1 说明即可。

5. $\mathbb{F}_n(x)=\mathrm{Span}(1,x,\ldots,x^{n-1})$，利用定理 8.8 反证知结论。

6. 取每个分量为 1，其余为 0 的一组 mn 个向量可生成 $\mathbb{F}^{m\times n}$，利用定理 8.8 反证知结论。

7. 反证。若线性相关，中定义 8.5 取下标最大的非零 λ_i，即有 α_i 可由 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}$ 线性表出。

8. (1) 错误。$\alpha_k(k<n)=\mathbf{e}_k,\alpha_n=\mathbf{e}_{n-1}$ 即矛盾。

   (2) 正确。在 S_2 中增添一个 α_1 为 S_2'，其与 S_1 等价，线性无关，而 $S_2\subset S_2'$，由定理 8.2 线性无关。

9. (1) 正确。设 $S_1 \subset \mathrm{Span}(S)$，由线性相关知可取 S 中向量个数小于 n，而 $S_2 \subset \mathrm{Span}(S_1) \subset \mathrm{Span}(S)$，利用定理 8.8 反证知结论。

   (2) n 为奇数时正确，为偶数时错误。令 $S = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(\alpha_i + \alpha_{i+1}) + (-1)^n(\alpha_n + \alpha_1) = 0$，$n$ 为偶数时 $S = 0$，因此必然线性相关。n 为奇数时，$S = -2\alpha_1$，类似构造后可由 S_2 表出 S_1，由定理 8.6 知 S_1, S_2 等价，因此结论正确。123,

10. 当：证明逆否命题，若其线性相关，利用行变换可变换出一行 0，因此此方阵必然不可逆，由此得证。

    仅当：设此方阵的行列式为 $g(x_1, \ldots, x_n)$。由向量组线性无关，此函数不恒为 0(在定义域上恒为 0 的函数只有零函数)，因此可取合适的 $x_1, \ldots, x_n$ 使其不为 0，由此得证。

§8.3　向量组的秩

1. (1) 234,123 (2) 除 2345 外的四元组

2. (1) 任意三元组 (2) 除 145 外的三元组

3. (1) 任意三元组 (2) 任意四元组

4. (1) 先证 $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}\,\mathrm{Span}(S)$。设 S 的极大线性无关组为 T，则 $S \subset \mathrm{Span}(T) \Rightarrow \mathrm{Span}(S) \subset \mathrm{Span}(T)$，利用定理 8.9 知结论成立。因此，$\mathrm{rank}(S_1) = \mathrm{rank}\,\mathrm{Span}(S_1) = \mathrm{rank}\,\mathrm{Span}(S_2) = \mathrm{rank}(S_2)$。

   (2) 设 S_1 的极大线性无关组为 T，构造可知 $\mathrm{Span}(S_1) = \mathrm{Span}(T)$。利用定理 8.10 与数量计算可知 T 亦为 S_2 的极大线性无关组，因此 $\mathrm{Span}(S_2) = \mathrm{Span}(T) = \mathrm{Span}(S_1)$。

   (3) $S_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots\}, S_2 = \{\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots\}$

5. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的极大线性无关组为 T，由定理 8.9，设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 的极大线性无关组为 T_0，则有 $T_0 \subset T \cup \{\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_m\}$，由此 $|T_0| - |T| \le m - n$，由秩定义即为题目结论。

6. (1) 接例 8.13 继续，此时 T_2 可由 T_1 线性表出，且 $|T_2| = |T_1|$，由定理 8.9，T_2 是 $\mathrm{Span}(T_1)$ 的极大线性无关组，因此 T_1 可由 T_2 线性表出，即存在对应的 X。

   (2) 由 (1) 知 A, AB 的列向量组等价。同时行变换不改变列的相对关系，因此行变换后仍可以用相同的方式将 YA, YAB 的列向量组互相表出，由此得证。

7. 与习题 6 相同，取那题的 A, B, Y 为 A^{k-1}, A, A 即可。

8. 设 A 的列向量组 S_1 的极大线性无关组为 T，记 (A, B) 的列向量组 S_2，由习题 4(2) 过程可知 T 亦为 S_2 的极大线性无关组，因此 B 的列向量组可由 T 线性表出。由 $T \subset S_1$ 知 B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表出，即存在对应的 X。

9. 必要：类似习题 8 考虑行向量组可知存在 Y 使 $(C, D) = Y(A, B)$，再由习题 8 结论知存在 X 使 $B = AX$，由此得结论。

   充分：与 4.2 节例 4.6 相同说明。

10. 设 A, B 的列向量组为 S_A, S_B，极大线性无关组为 T_A, T_B，$A \pm B$ 的列向量组为 $S_{A\pm B}$。由于 $S_{A\pm B} \subset \mathrm{Span}(T_A, T_B)$，由定理 8.9 知 $\mathrm{rank}(S_{A\pm B}, S_A, S_B) \le \mathrm{rank}(T_A, T_B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$，因此 $\mathrm{rank}(A \pm B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$。右侧不等号取加号，左侧不等号取减号并代换即可。

§8.4　基与坐标

1. (1) 基为 $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_n,\dots,\mathbf{e}_{n-1}-\mathbf{e}_n$，维数 $n-1$，$(a_1,\dots,a_n)$ 坐标为 $(a_1,\dots,a_{n-1})$。

   (2) 基为一切 $\mathbf{e}_{ij},i\leq j$，维数 $\dfrac{n(n+1)}{2}$，坐标直接确定即可。

   (3) 基为一切 $\mathbf{e}_{ij},i\neq j$ 与 $\mathbf{e}_{11}-\mathbf{e}_{nn},\mathbf{e}_{22}-\mathbf{e}_{nn},\dots,\mathbf{e}_{n-1,n-1}-\mathbf{e}_{nn}$，维数 n^2-1，坐标类似 (1) 可确定。

   (4) 基为 $1,(x-1)^2,(x-1)^3,\dots,(x-1)^{n-1}$，维数 $n-1$,，类似例 8.17 可知坐标。

   (5) 基为一切 $\mathbf{e}_{ij}-\mathbf{e}_{ji},i\leq j$，维数 $\dfrac{n(n-1)}{2}$，坐标直接确定即可。

   (6) 基为一切 $\mathbf{e}_{kj}-\mathbf{e}_{jk},(\mathbf{e}_{kj}-\mathbf{e}_{jk})\mathrm{i},k\leq j$，维数 $n(n-1)$，坐标直接确定即可。

   (7) 基为 $x-\mathrm{i},(x-\mathrm{i})^2,\dots,(x-\mathrm{i})^{n-1}$，维数 $n-1$,，类似例 8.17 可知坐标。

   (8) 基为 $x-\mathrm{i},(x-\mathrm{i})^2,\dots,(x-\mathrm{i})^{n-1},(x-\mathrm{i})\mathrm{i},(x-\mathrm{i})^2\mathrm{i},\dots,(x-\mathrm{i})^{n-1}\mathrm{i}$，维数 $2n-2$，类似例 8.17 可知坐标。

2. (1) $\begin{pmatrix}3&3&4\\-1&-3&-3\\4&4&6\end{pmatrix}$

   (2) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

   (3) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$

   (4) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\dfrac{1}{2}&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\dfrac{\sqrt{3}}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. 左推右：由基的定义，基可互相线性表出，利用定理 8.13-1 知结论。

   右推左；利用 P^{-1} 可将 a_i 用 b_i 线性表出，因此 b_i 包含一组 V 的基，再由数量关系知其即为基。

4. 利用矩阵乘法展开即可。

5. 新坐标 (a,b) 则原坐标 $(a\cos\theta-b\sin\theta,a\sin\theta+b\cos\theta)$，因此 $f(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)=0$。

6. 由习题 5 假设有 $2(x\cos\theta-y\sin\theta)^2+(x\cos\theta-y\sin\theta+x\sin\theta+y\cos\theta)^2=1$，交叉项为 $(2(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)-4\cos\theta\sin\theta)xy=0$，化简得 $\cos2\theta=\sin2\theta$，取 $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ 得标准方程为 $(2+\sqrt{2})x^2+(2-\sqrt{2})y^2=1$。

7. 同构。设 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的基为 $a_t(t\in I)$，则 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的基为 $a_t,a_t\mathrm{i}(t\in I)$，下面说明 $|I|=|\mathbb{R}|$。

   令 $\{q_n\}$ 为所有有理数的某个排列，$A_r=\displaystyle\sum_{q_n<r}\frac{1}{n!}$，且 $A=\{A_r|r\in\mathbb{R}\}$。由定义 $0<A_r<\mathrm{e}$，且 $|A|=|\mathbb{R}|$，下证 A 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。

   由于有理数稠密性，$A_r=A_s\Leftrightarrow r=s$。若线性相关，设 $\alpha_1A_{r_1}+\cdots+\alpha_kA_{r_k}=0,\alpha_i\in\mathbb{Q},r_1>\cdots>r_k$，同乘可以使 $\alpha_i\in\mathbb{Z}$。由有理数稠密性，可以取任意大的 n 使 $r_1>q_n>r_2$。等式两边同乘 $n!$，可得 $z=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sum_{q_m<r_i,m>n}\frac{n!}{m!},z\in\mathbb{Z}$，又由于 $r_1>q_n>r_2$ 类似证明 e 是无理数那样，取足够大的 n

可以使 $\sum_{i=1}^{k}|a_i|\sum_{m>n}\frac{n!}{m!}$ 任意小，由此可得得 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sum_{q_m<r,m>n}\frac{n!}{m!}$ 只能为 0。计算可知 $z=0$ 等价于 $\alpha_1=-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sum_{q_m<r_i,m<n}\frac{n!}{m!}$。右侧必为 n 的倍数，取 $n>|\alpha_1|$ 知 $\alpha_1=0$，同理可得 $\alpha_i=0$，与线性相关矛盾。

由此，利用 8.3 节定理 8.10 可知 $A\subset I\subset\mathbb{R}|$，由康托-伯恩斯坦定理知 $|I|=|\mathbb{R}|$。

利用定理 8.12 知只需说明两组基等势，由 $|I|=|\mathbb{R}|$，$\mathbb{C}$ 基数为 $|\mathbb{R}|+|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}\times(0,1)|$，构造 $(a,0)\to\arctan a,(a,1)\to\begin{cases}a+\dfrac{\pi}{2} & a>0,a\notin\mathbb{Z}\\ a-\dfrac{\pi}{2} & a<0\\ a+\dfrac{\pi}{2}+1 & a\in\mathbb{N}\end{cases}$，即成立。

8. 不同构。反证，$\mathbb{R}[x]$ 的基为 $1,x,x^2,\dots$，若其可以与 $\mathbb{R}[[x]]$ 的基作一一映射，不妨设这组基为 $t_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_{1n}x^n,t_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^n,\dots$，利用方程知识知，任取 b_1，可取 b_2 使 b_1+b_2x 不能用 t_1 前两项表出，因此 b_1+b_2x 为前两项的幂级数不可由 t_1 表出；接着可取 b_3 使 $b_1+b_2x+b_3x^2$ 不能用 t_1,t_2 前三项表出，由此归纳构造可构造出 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，其前 $n+1$ 项不可由 t_1 到 t_n 前 n 项表出，因此其不可由 t_1 到 t_n 表出对任意 n 成立，与其可以被有限表出矛盾 (此即说明 $\mathbb{R}[[x]]$ 的基不为可数)。

9. 设 M 为线性空间，且其中所有矩阵的秩最大值为 p，只需证明 $\dim(M)\le pn$ 即可。

由于对可逆阵 P,Q，M 中所有矩阵左乘 P，右乘 Q 后相当于所有基对应相乘，空间维数不变，因此不妨左右乘合适的 P,Q 使 $Y=\begin{pmatrix}I_p & O\\ O & O\end{pmatrix}\in M$。

令 $E=\left\{\begin{pmatrix}O & B\\ B^T & A\end{pmatrix},A\in M_{n-p\times n-p}(\mathbb{R}),B\in M_{p\times n-p}(\mathbb{R})\right\}$，则 $\dim(E)=n(n-p)$

设 $X=\begin{pmatrix}O & B_0\\ B_0^T & A_0\end{pmatrix}\in M\cap E$，由于 $Y\in M$，$X+aY\in M$，即 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}aI & B_0\\ B_0^T & A_0\end{pmatrix}\le p$。行列变换知 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}aI & O\\ O & A_0-a^{-1}B_0^TB_0\end{pmatrix}\le p$ 对任意 $a\ne 0$ 成立，故 $A_0=B_0^TB_0=O$，考察 $\operatorname{tr}(B_0^TB_0)$ 知 $A_0=B_0=O$，即 $M\cap N=\{O\}$。

由 8.5 节定理 8.15 知 $\dim(M)+\dim(E)=\dim(M+E)\le n^2$，因此 $\dim(M)\le pn$。

10. 归纳，一阶时成立，若 $n-1$ 阶时成立，则 n 阶时，类似习题 9 中的讨论，利用 5.2 节习题 10(1)，可不妨设 V 中全为上三角阵。记 $t_n=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$，下证 $\dim(V)\le t_n$。

若 $\dim(V)\ge t_n+1$，取 t_n+1 个线性无关的 V 中矩阵 $A_1,\dots,A_{t_n+1}$，将 A_i 的删去首行首列后的子方阵记为 M_i。分块计算可知，由于 A_i 可交换且为上三角阵，M_i 亦为一组可交换的 $n-1$ 阶上三角阵。设 $\{M_i\}$ 的秩 (此处含义为向量组的秩) 为 k，由归纳假设 $k\le t_{n-1}$，不妨设 $M_1,\dots,M_k$ 为其极大线性无关组，则 $\forall i>k,\exists n_{i1},\dots,n_{ik},M_i=\sum_{j=1}^{k}n_{ij}M_j$，此时记 $B_i=A_i-\sum_{j=1}^{k}n_{ij}A_j$，则 B_i 只有首行不为 0，且 $\{B_i\}$ 线性无关 $(i=k+1,k+2,\dots,t_n+1)$。类似地，我们可以得到线性无关的 $C_{s+1},\dots,C_{t_n+1}\in V,s\le t_{n-1}$，且 C_i 只有末列不为 0。由于 B_i,C_j 可交换，考察右上角可知一切 B_iC_j 的右上角为 0。

令 B 为所有 $\{B_i\}$ 行向量排成的 $(t_n+1-k)\times n$ 矩阵，C 为所有 $\{C_i\}$ 列向量排成的 $n\times(t_n+1-s)$ 矩阵，利用 8.3 节例 8.11 知 $\operatorname{rank}(B)=t_n+1-k,\operatorname{rank}(C)=t_n+1-s$，而由一切 B_iC_j 的右上角为 0 可知

$BC = O$。利用 4.2 节例 4.9，$\mathrm{rank}(B)+\mathrm{rank}(C) \le \mathrm{rank}(BC)+n$，即 $n \ge 2t_n+2-s-k \ge 2t_n-2t_{n-1}+2$，分奇偶讨论知矛盾。

由此，原命题成立。

§8.5　交空间与和空间

1. (1) $(-17,7,-16,0),(6,-6,3,-5)$ (2) $(10,-2,3,-6),(4,-9,-8,10)$

2. (1) $(0,1,1,0,1),(0,1,2,0,0),(1,0,2,-1,0)$

   (2) $(1,-1,0,0,0),(0,0,0,1,1),(0,1,-1,0,0),(0,0,3,1,0)$

3. (1) 设 $f \in V_1 \cap V_2$，则 $f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin^k x = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos^k x$，考虑 $\sin x$ 值域知 $\forall s \in [-1,1], \sum\limits_{k=1}^{n} a_k s^k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k (1-s^2)^{k/2}$，由此 $2 \nmid k$ 时 $b_k = 0$，又由常数项为 0，可知交空间的一组基为 $\cos^{2k} x - \cos^2 x, k \ge 2$。和空间的一组基为 $\cos^n x, \sin^{2n+1} x, n \ge 0$。计算知此集合生成空间即为 V_1+V_2。注意到，$\sin^{2n+1} x = h(\cos x)\sin x$，$h$ 为 $2n$ 次多项式。若 $f(\cos x) - g(\cos x)\sin x = 0$，$f, g$ 为多项式，将 $\sin x$ 写为 $\cos x$ 即可验证出 $f = g = 0$，由此知线性无关。

   (2) 交空间为 $\mathbf{0}$，和空间的基为两集合并集。

   利用积化和差可说明 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x = 0$。若 $f = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i \sin(m_i x) = \sum\limits_{i=1}^{t} b_i \cos(n_i x)$，则 $f^2 = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i \sin(m_i x) \sum\limits_{i=1}^{t} b_i \cos(n_i x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上积分为 0，因此只有 $f = \mathbf{0}$，由此可知和空间基为两集合并集。

4. 为子空间直接验证即可。类似 2.1 节习题 8(4) 可知 V_1 维数为 n，由定义可知 V_2 为 V_1 中每个矩阵转置所构成的空间，因此维数为 n，由其形式知其交为 $\{aI\}$，维数为 1，由定理 8.15 知和空间维数 $2n-1$。

5. 为子空间直接验证即可。

   计算可知其交为被 $f(x) = x(x-1)(x+1)$ 整除的多项式，基为 $f(x), xf(x), x^2 f(x), \ldots$；其和为被 x 整除的多项式，基为 $x, x^2, \ldots$。

6. 证明其逆否命题。设 V_1, V_2 的基为 $\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}$，由于不存在包含关系，必然有某个 α_s 不可被 $\{\beta_j\}$ 线性表出，某个 β_k 不可被 $\{\alpha_i\}$ 线性表出。考虑 $\mathrm{Span}(\alpha_s, \beta_k)$，其包含于 V_1+V_2，若包含于 V_1，则 β_k 可被表出，矛盾，同理其不包含于 V_2，因此原命题得证。

7. (1) $V_1 \cap W \subset V_1, V_2 \cap W \subset V_2 \Rightarrow (V_1 \cap W) + (V_2 \cap W) \subset V_1 + V_2$

   $V_1 \cap W \subset W, V_2 \cap W \subset W \Rightarrow (V_1 \cap W) + (V_2 \cap W) \subset W$

   综合以上两式知成立。

   (2) $V = \mathbb{R}^2, V_1 = \{(a,0)\}, V_2 = \{(0,a)\}, W = \{(a,a)\} \Rightarrow V_1 \cap W = V_2 \cap W = \mathbf{0}, (V_1+V_2) \cap W = W$

   (3) 证明第一个等号，第二个类似即可。

   设 $V_1 \cap W$ 基为 $\{\alpha_i\}$，$V_2 \cap W$ 基为 $\{\beta_j\}$，利用 8.3 节定理 8.10 知可设 V_2 的基为 $\{\beta_j, \gamma_k\}$，反证可知 $\{\gamma_k\} \cap W = \varnothing$。左侧即为 $\mathrm{Span}\{\alpha_i, \beta_j\}$，而右侧为 $\mathrm{Span}\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_k\} \cap W$，由定义可知 $\{\alpha_i, \beta_j\} \subset W$，再由 $\{\gamma_k\} \cap W = \varnothing$ 知右侧即为 $\mathrm{Span}\{\alpha_i, \beta_j\}$，与左侧相同。

8. (1) $V_1\cap V_2\subset V_1\Rightarrow(V_1\cap V_2)+W\subset V_1+W$，同理得另一部分，由此成立。

(2) 与习题 7(2) 解答相同构造即可。

(3) 证明第二个等号，第一个类似即可。由于 $W=W\cap(V_2+W)$，利用习题 7(3)，

$(V_1+W)\cap(V_2+W)=(W\cap(V_2+W)+V_1)\cap(V_2+W)=W\cap(V_2+W)+V_1\cap(V_2+W)=V_1\cap(V_2+W)+W$

9. 错误。取习题 7(2) 解答中的 V_1,V_2,W 取为 V_1,V_2,V_3 即为反例。

§8.6　直和与补空间

1. 任意矩阵 $A=\dfrac{A+A^T}{2}+\dfrac{A-A^T}{2}$，前者对称后者反对称，且计算知既对称又反对称的实方阵只有 O，由此得证。

2. 任意多项式 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，前者偶后者奇，且计算知既偶又奇的多项式只有零多项式，由此得证。

3. (1) 由定义可发现，V_2 为与 V_1 中任何向量内积均为 0 的向量所构成的空间，且包含满足此条件的全部向量。由于只有零向量与自身内积为 0，$V_1\cap V_2=\mathbf{0}$。利用 4.2 节定理 4.8-2 与 8.3 节例 8.11 可知 $\dim(V_1)+\dim(V_2)=n$，由 8.4 节定理 8.15 知 $\dim(V_1+V_2)=n$，因此 $V_1+V_2=\mathbb{R}^n$，由定理 8.16 知结论。

(2) 不成立。例如，复数域中取 $A=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}$，则 $(1,\mathrm{i})\in V_1\cap V_2$，因此矛盾。

4. 充分性：利用定义 8.14 与定理 8.16 归纳即可.

必要性：反证，利用定理 8.18 得矛盾。

5. 1 推 2：由直和定义知成立。

2 推 4：反证，由线性相关定义，若线性相关，必可取出有限个空间，其中有线性相关的向量，由定理 8.18 知矛盾。

4 推 3：若基相交，取出相交的基向量则与条件 4 矛盾。由于 $\bigcup\limits_{i\in I}S_i$ 可生成 $\sum\limits_{i\in I}V_i$，只需证明其线性无关。若否，存在不全为 0 的 λ_{ij}，使 $\lambda_{11}s_{11}+\cdots+\lambda_{1k_1}s_{1k_1}+\lambda_{21}s_{21}+\cdots+\lambda_{2k_2}s_{2k_2}+\cdots+\lambda_{n1}s_{n1}+\cdots+\lambda_{nk_n}s_{nk_n}=0$，其中 $s_{ij}\in S_i$，则取 $\alpha_i=\lambda_{i1}s_{i1}+\cdots+\lambda_{ik_i}s_{ik_i}$，即与条件 4 矛盾。

3 推 1：取出条件 3 中取出的基对应 $\sum\limits_{i\in I}V_i$ 的坐标，由坐标为唯一表示可知此和为直和。

6. 类似 8.4 节例 8.17 知满足 $f(1)=0$ 的多项式可唯一写为 $(x-1)\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x+1)^k=(x-1)\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x+1)^k+a_0(x-1)$，因此补空间为 $x-1$ 生成的空间。

7. 与习题 1 类似得补空间为一切反对称方阵，类似 8.5 节习题 1(6) 知补空间维数为 $n(n-1)$。

8. 与习题 1 类似得补空间为一切反对称方阵，类似 8.5 节习题 1(5) 知补空间维数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$。

9. 利用习题 3 证明过程中的结论，可发现 $\bigcap\limits_{i\in I}V_i$ 中的向量与任何 U_i 中的向量内积为 0，因此与 $\sum\limits_{i\in I}U_i$ 中的任何向量内积为 0。反之，与 $\sum\limits_{i\in I}U_i$ 中的任何向量内积为 0 的向量必须与每个 U_i 中的向量内积均为 0，因此属于 $\bigcap\limits_{i\in I}V_i$。由此，构造 A 使得 A 的行向量组生成 $\bigcap\limits_{i\in I}V_i$(注意到 A 的行向量组生成的子空间可以为任意 $\mathbb{R}^n$ 的子空间)，则 $Ax=\mathbf{0}$ 的解空间即为 $\sum\limits_{i\in I}U_i$，因此两空间互补，结论成立。

10. 未必，如 $V=\mathbb{R}^2,V_1=\{(a,0)\},V_2=\{(0,a)\},U_1=U_2=\{(a,a)\}$ 即为反例。

§8.7　直积与商空间

1. 构成线性空间验证即可。将每个 $f(x)$ 映射至对 $\forall i \in I$ 下的坐标分量为 $f(i)$，即为同构映射。

2. (1) 由于子空间的和仍为子空间，只需说明对 V_i 的子空间 T_i，$T_1 \times T_2$ 是 $V_1 \times V_2$ 的子空间。直接验证为子集与封闭性即可。

   (2) 错误，右侧两者之交为 $\mathbf{0} \times V_2$，V_2 不为 $\mathbf{0}$ 时不为直和。

   若将所有直和改为和则正确：左侧的每个元素可写为 $(u+w,v)$，其中 u,v,w 分别取遍 U_1,V_2,W_1，右侧即为 $(u,v_1)+(w,v_2)$，直接计算可发现左右相等。

3. 设 $U \cap W$ 对 U 的补空间为 A，由定理 8.22，只需证明 $W \oplus A = U + W$。由定义 W 与 A 交为 $\mathbf{0}$。另一方面，设 $U \cap W$ 的基为 $\{\alpha_i\}$，利用 8.3 节定理 8.10 知可设 U 的基为 $\{\alpha_i,\beta_j\}$，W 的基为 $\{\alpha_i,\gamma_k\}$，而 A 的基为 $\{\beta_j\}$，因此 $W + A = \mathrm{Span}\{\alpha_i,\gamma_k,\beta_j\} = U + W$，由 8.6 节定理 8.16 知结论成立。

4. 取出 V 的基，则与这组基内积全为 0 的向量构成线性空间 U，类似 8.6 节习题 3 得 U 为 V 的补空间，维数为 $n-r$，取 U 的基作为 A 的行向量，类似计算验证知成立。

5. 利用 8.6 节习题 3，构造 $a+W \to a, a \in U$，由直和可知 a 取遍 U 中元素后一切 $a+W$ 即为 $\mathbb{F}^n/W$，验证其为同构即可。

6. 为子空间直接验证即可。

   由于 $V = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in V_i\}, W = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in W_i\}$，将 $(x_i)_i \in I$ 商 W 后的等价类映射至每个 x_i 商 W_i 后的等价类，验证可知定义合理 (同一等价类中相差 W 中元素，各分量相差 W_i 中元素)，再类似验证单射、满射、保加法、乘法可知为同构。

7. 利用例 8.25，取 $V_i = \{ax^i, a \in \mathbb{R}\}, W_i = \mathbf{0}, i \in \mathbb{N}$ 即可。

第九章　线性变换

§9.1　基本概念

1. (1) $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) + \mathcal{A}(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

   (2) 由定义展开即得结果。

   (3) 利用 (1) 与 (2) 得结论。

   (4) 利用 (1) 与 (2) 得结论。

   (5) $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}\beta, \alpha \neq \beta \Leftrightarrow \mathcal{A}(\alpha - \beta) = \mathbf{0}$

   (6) 利用 (2) 即可知结论。

2. (1) 是。

   (2) 是。

   (3) 是。

   (4) 不是。$I \to I$，但 $\mathrm{i}I \to -\mathrm{i}I \neq \mathrm{i}I$。

   (5) 是。

   (6) 不是。$I \to I$，但 $2I \to \dfrac{1}{2}I \neq 2I$。

   (7) 是。

(8) 不是。$1+x \Rightarrow (1+x)^2 \neq 1+x^2$。

(9) 是。

(10) 是由。$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+t)^2}p(t^2)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}p((t-x)^2)\mathrm{d}(t-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}p((t-x)^2)\mathrm{d}t$ 可验证。

3. 是线性映射、单射。不是满射，因此不为双射，不可逆。

4. 1 推 2：由定理 9.1 直接得结果。

2 推 1：利用定理 9.2，考虑线性映射：将 $\{\alpha_i\}$ 的极大线性无关组映射到对应的 β_i，将此无关组扩充为 U 的一组基，并将这组基中剩下的元素映射到 $\mathbf{0}$。验证可知此线性映射即符合要求。

5. (1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(2) 利用 2.1 节习题 6(6) 的结果，注意到两题对应的转轴相同，取出的 α,β,γ 相同，直接得到包含 θ 的结果。

(3) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{11} \\ a_{12} & 0 & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{21} \\ a_{22} & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

(6) 利用 2.2 节习题 9 可知结果为 $P\otimes Q^T$，即 $\begin{pmatrix} p_{11}q_{11} & p_{11}q_{21} & p_{12}q_{11} & p_{12}q_{21} \\ p_{11}q_{12} & p_{11}q_{22} & p_{12}q_{12} & p_{12}q_{22} \\ p_{21}q_{11} & p_{21}q_{21} & p_{22}q_{11} & p_{22}q_{21} \\ p_{21}q_{12} & p_{21}q_{22} & p_{22}q_{12} & p_{22}q_{22} \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} p_{11}q_{11} & p_{12}q_{11} & p_{11}q_{21} & p_{12}q_{21} \\ p_{11}q_{12} & p_{12}q_{12} & p_{11}q_{22} & p_{12}q_{22} \\ p_{21}q_{11} & p_{22}q_{11} & p_{21}q_{21} & p_{22}q_{21} \\ p_{21}q_{12} & p_{22}q_{12} & p_{21}q_{22} & p_{22}q_{22} \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. * 设 $\beta_i = \sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k$，则 $a_k \to \sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k$，而 $\beta_i = \sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k \to \sum_{k=1}^{n} a_k\beta_k$，由此 α, β 表示下矩阵相同。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. * 记 E_{ij} 为只有第 i 行第 j 列为 1，其他为 0 的方阵，$\mathbf{e}_i$ 为只有第 i 个分量为 1，其他为 0 的向量。

(1) $\mathcal{A}E_{ij} = \mathcal{A}E_{ji}$，因此 $\mathcal{A}(E_{ij} - E_{ji}) = O$，由 8.4 节习题 1(5) 知 $\mathcal{A}$ 需满足将反对称方阵映射为 O。

(2) $\mathcal{A}E_{ij} = (\mathcal{A}E_{ji})^T$，因此 $\mathcal{A}(E_{ij} + E_{ji}) = (\mathcal{A}E_{ji})^T + \mathcal{A}E_{ji}$，类似 8.4 节习题 1(5) 知 $\mathcal{A}$ 需满足将对称阵映射为对称阵。

(3) 由于 $\mathcal{A}(E_{i1}E_{1j}) - \mathcal{A}(E_{1j}E_{i1}) = \mathcal{A}E_{ij} = O, i \neq j$，且 $\mathcal{A}(E_{ij}E_{ji}) - \mathcal{A}(E_{ji}E_{ij}) = \mathcal{A}(E_{ii} - E_{jj}) = O, i \neq j$，可推知 $\mathcal{A}X$ 恒为 O。

(4) 若 $\mathcal{A}X$ 恒为 O 显然满足要求，下面设 $\mathcal{A}$ 不恒为 O。

引理：$\operatorname{rank}(X) \le \operatorname{rank}(Y) \Rightarrow \exists P, Q, X = PYQ$。不妨只考虑相抵标准型，由 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_t & O \\ O & O \end{pmatrix}, t = \min(r, s)$ 可构造出合适的 P, Q。

第一步：$\mathcal{A}X = O \Leftrightarrow X = O$。$\mathcal{A}X = O \Rightarrow \mathcal{A}(PXQ) = O$，$P, Q$ 为任意方阵。由引理可知一切秩小于等于 X 的矩阵均被映射至 O。若 X 的秩至少为 1，可知 $\mathcal{A}E_{ij} = O$ 对一切 E_{ij} 成立，由此 $\mathcal{A}X$ 恒为 O，矛盾，因此只能 $X = O$。

第二步：$\mathcal{A}$ 是双射，$\mathcal{A}I = I$。若 $\mathcal{A}$ 的像空间的维数不足 n^2，$\mathcal{A}E_{ij}, 1 \le i, j \le n$ 必然线性相关，因此存在非零 X 使 $\mathcal{A}X = O$，矛盾。由此可知 $\mathcal{A}$ 是满射。利用定理 9.1-5 知 $\mathcal{A}$ 是单射，由此其是双射。设 $\mathcal{A}X = I$，则 $\mathcal{A}(XI) = \mathcal{A}X\mathcal{A}I$，化简即为 $\mathcal{A}I = I$。

第三步：记 $A_{ij} = \mathcal{A}E_{ij}$，则 $\operatorname{rank}(A_{ij}) = 1$。由于 $I = \mathcal{A}(P^{-1}P) = \mathcal{A}P^{-1}\mathcal{A}P$，可知可逆阵的像仍然可逆。由此，若 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}X) = r$，则 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}(PXQ)) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}P\mathcal{A}X\mathcal{A}Q) \le r$。若 P, Q 可逆，则等号成立。由引理，$\operatorname{rank}(X) < \operatorname{rank}(Y) \Rightarrow \operatorname{rank}(\mathcal{A}X) \le \operatorname{rank}(\mathcal{A}Y)$，且秩相同的矩阵的像仍然秩相同。由此，若某个 $\operatorname{rank}(A_{ij}) \neq 1$，由其不为 O 知大于 1，则所有非零矩阵的像的秩均大于 1，与双射矛盾。

第四步：存在可逆阵 P 使 $A_{ii} = P^{-1}E_{ii}P, i = 1, \ldots, n$。由于 $\operatorname{rank}(A_{ii}) = 1$，利用 4.1 节习题 4 可设 $A_{ii} = \alpha_i\beta_i^T$，其中 α_i, β_i 为 n 维列向量。令 $Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}^T$，计算知使 $A_{ii} = QE_{ii}P$，只需证明 $PQ = I$。由于 $E_{ii}^2 = E_{ii}$，可知 $A_{ii}^2 = \alpha_i\beta_i^T\alpha_i\beta_i^T = (\beta_i^T\alpha_i)\alpha_i\beta_i^T = A_{ii} = \alpha_i\beta_i^T$，由于 $A_{ii} \neq O$，$\beta_i^T\alpha_i = 1$。而由于 $E_{ii}E_{jj} = O, i \neq j$，类似有 $(\beta_i^T\alpha_j)\alpha_i\beta_j^T = O$，由秩可知 α_i, β_j 均不为 $\mathbf{0}$，因此 $\alpha_i\beta_j^T \neq O$，$\beta_i^T\alpha_j = 0$。由于 PQ 的第 i 行第 j 列为 $\beta_i^T\alpha_j$，由此即得证。

第五步：上一步中构造的 P 使 $\mathcal{A}X = P^{-1}\mathcal{B}XP$，其中 $\mathcal{B}$ 将 E_{ij} 映射为其倍数。由于只需要说明基的情况，需证 $A_{ij} = cP^{-1}E_{ij}P$，不失一般性，说明 $A_{12} = cP^{-1}E_{12}P$。设 $PA_{12}P^{-1} = B = \alpha\beta^T$，由于 $E_{11}E_{12} = E_{12}$，计算得 $E_{11}B = B$，也即 $(\mathbf{e}_1^T\alpha)\mathbf{e}_1\beta^T = \alpha\beta^T$。由 $\beta \neq \mathbf{0}$ 可知 $(\mathbf{e}_1^T\alpha)\mathbf{e}_1 = \alpha$，再由

$\alpha \neq \mathbf{0}$ 可推出只能 α 为 $\mathbf{e}_1$ 倍数；再由 $E_{12}E_{22} = E_{12}$，类似可证 β 为 $\mathbf{e}_2$ 倍数，因此 $B = cE_{12}$，由此得证。

第六步：存在可逆对角阵 Q 使上一步中的 $\mathcal{B}X = Q^{-1}XQ$。由假设知 $\mathcal{B}E_{ii} = E_{ii}$，且计算得 $\mathcal{B}(XY) = \mathcal{B}X\mathcal{B}Y$。设 $\mathcal{B}E_{ij} = b_{ij}E_{ij}$，下面证明取 $Q = \mathrm{diag}(1, b_{12}, \ldots, b_{1n})$ 即可。由于 $(E_{ij}+E_{ji})^2 = E_{ii}+E_{jj}$，代入计算可发现 $b_{ij}b_{ji} = 1$；又由于 $E_{i1}E_{1j} = E_{ij}$，可算得 $b_{i1}b_{1j} = b_{ij}$。由此可知 $b_{ij} = \dfrac{b_{1j}}{b_{1i}}$，代入计算知 Q 符合要求。

综合第五步第六步的结果，取 $R = QP$，可知 $\mathcal{A}X = R^{-1}XR$，再验证充分性可知其为充要条件。

(5) 验证知将 (4) 中所有的解复合转置变换即得 (5) 的所有解。

§9.2　线性映射的运算

1. 定理 9.4：验证双射、保加法、数乘即可。

   定理 9.5：利用线性映射矩阵表示的定义，类似 2.1 节例 2.3 验证即可。

2. $\mathbf{e}_k \to \begin{cases} \mathbf{e_j} & k = i \\ \mathbf{0} & k \neq i \end{cases}$，$i, j$ 分别取遍 1 到 m，1 到 n，即为一组基。设 e_k 的像为 $\sum\limits_{t=1}^{n} a_{kt}\mathbf{e_t}$，按 i 先 j 后的顺序，坐标即为 $(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$。

3. 利用矩阵表示，设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 的矩阵表示为 A, B，恒等变换的矩阵表示为 I。由于 $\mathrm{Char}\, F \nmid n$，利用定理 2.2-6 可知 $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0 \neq n = \mathrm{tr}(I)$，由此即得证。

4. 利用 2.2 节习题 9，可知此线性映射可矩阵表示为 $P \otimes Q^T$，因此问题变为此矩阵何时存在逆/左逆/右逆，类似 2.4 节习题 9、3.3 节习题 8 考虑行列变换，再还原为线性变换，可得此题的结论。

   (1) P 有左逆 P_0，Q 有右逆 Q_0 时，$\mathcal{A}$ 有左逆 $X \to P_0XQ_0$，所有左逆即为 P_0, Q_0 分别取遍 P 的左逆与 Q 的右逆。

   (2) P 有右逆 P_0，Q 有左逆 Q_0 时，$\mathcal{A}$ 有右逆 $X \to P_0XQ_0$，所有右逆即为 P_0, Q_0 分别取遍 P 的右逆与 Q 的左逆。

   (3) P, Q 可逆时，$\mathcal{A}$ 有逆 $X \to P^{-1}XQ^{-1}$。

5. (1) 当 $a = \pm b$ 时，$\mathcal{A}$ 的像均为对称/反对称阵，因此其不为满射，不可逆。

   其他情况，构造变换 $X \to -\dfrac{b}{a^2 - b^2}X + \dfrac{a}{a^2 - b^2}X^T$，验证可发现其即为 $\mathcal{A}^{-1}$。

   (2) 若 $b = 0$，最小多项式为 $x - a$；若 $b \neq 0$，最小多项式不为一次，计算可验证 $(\mathcal{A} - a\mathcal{I})^2 = b^2\mathcal{I}$，因此最小多项式为 $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$。

6. (1) 法一：由于 $\dim L(V) = n^2$，$I, A, \ldots, A^{n^2}$ 必然线性相关，由此存在所求多项式。

   法二：考虑其矩阵表示，矩阵的最小多项式即为所求的 p。

   (2) 单射推可逆：考虑 V 的一组基。若这组基的像线性相关，则存在某个非零元素的像为 $\mathbf{0}$，与单射矛盾。由 8.3 节定理 8.10,8.11 可知这组基的像亦为空间的一组基，由此即知可逆。

   满射推可逆：考虑 V 的一组基。若这组基的像线性相关，则像空间的维数低于 V 的维数，与满射矛盾。由 8.3 节定理 8.10,8.11 可知这组基的像亦为空间的一组基，由此即知可逆。

   (3) 未必成立。

   考虑例 9.1 中的微分变换，若其存在化零多项式，则意味着 $\forall f, a_nf^{(n)} + \cdots + a_1f' + a_0f = 0$，$a_i$ 不全为 0。取次数超过 n 的多项式，考虑最高次项即矛盾。

   微分变换为满射，但不可逆；$f(x) \to xf(x)$ 为单射，但不可逆。

7. (1) 线性变换直接验证即可，其逆为 $f(x) \to f(x-1)$，因此可逆。

(2) 计算可知第 i 行第 j 列为 C_{j-1}^{i-1}(约定 $\mathrm{C}_0^0=1$，$a>b$ 时 $\mathrm{C}_b^a=0$)。

(3) 考虑 $f(x+t)$ 在 x 处泰勒展开为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}t^n$，由题设，$n$ 阶及以上导数均为 0，取 $t=1$ 即得结论。

8. (1) $\mathcal{D}\circ\mathcal{S}=\mathcal{I}$，$\mathcal{S}\circ\mathcal{D}$ 为 $f(x)\to f(x)-f(0)$。由此 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{S}$ 左逆，$\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{D}$ 右逆，而 $\mathcal{D}$ 不为单射，$\mathcal{S}$ 不为满射，因此均不可逆，另一侧逆不存在。

(2) $(xf(x))'-xf'(x)=f(x)$，由此得证。

(3) 归纳构造。设 $\deg(f)=n$。$\mathcal{A}\circ\mathcal{D}(1)=\mathcal{A}(0)=0$，因此 $\mathcal{D}\circ\mathcal{A}(1)=0$，即 $\mathcal{A}(1)$ 为常数，记为 a_n。当 $\mathcal{A}(1),\mathcal{A}(x),\dots,\mathcal{A}(x^{k-1})$ 已确定，类似可发现 $\mathcal{A}(x^k)-k\mathcal{S}\circ\mathcal{A}(x^{k-1})$ 为常数，令其为 $\frac{a_{n-k}}{k!}$。由于对 n 次多项式 f，只需确定 $n+1$ 个像，最后一项即为 $\frac{a_0}{n!}$，利用 $\mathcal{D}\circ\mathcal{S}=\mathcal{I}$ 计算验证可知此时 $\mathcal{A}$ 即为题目条件所述形式。

(4) 由于从 1 出发可通过 $p(\mathcal{S})$ 成为任何多项式，可设 $\mathcal{A}(1)=p(\mathcal{S})(1)$。由于 $\mathcal{A}(x^n)=S\circ\mathcal{A}(nx^{n-1})$，此时 $\mathcal{A}$ 已唯一确定，计算验证可知 $\mathcal{A}$ 满足题设。

§9.3　对偶空间

1. 由定义 $\alpha_k^*\left(\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i\right)=x_k$，即 $\sum_{j=1}^n b_{kj}\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}x_j=x_k$。取 $x_t=1$，其他为 0 知 $\sum_{j=1}^n b_{kj}a_{tj}=\begin{cases}1 & t=j\\0 & t\neq j\end{cases}$，由此考虑 BA^T 的各分量即得证。

2. (1) 设 S^* 元素为 α_i^*，由例 9.8 得 $\alpha_i^*:f(x)\to\frac{f^{(0)}(1)}{(i-1)!}$，由定义 9.7 得 $\sigma=\left(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n}\right)$。

(2) 设 T^* 元素为 β_i^*，由例 9.8 得 $\beta_i^*:f(x)\to\frac{f^{(i-1)}(1)}{(i-1)!}$，由定义 9.7 得 $\sigma=\left(1,-\frac{1}{2},\dots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$。

3. 考虑 $f(x)\to f'(0)$。若存在 $\sum_{i=1}^t a_if(b_i)=f'(0)$ 对任意多项式成立，考虑零次项可知 $\sum_{i=1}^t a_is_i=0$ 对任意 s_i 成立，于是只能 a_i 全为 0，矛盾。

4. 设基分别为 s_i,t_i,s_i^*,t_i^*，设 $t_j=\sum_{i=1}^n p_{ij}s_i, s_j=\sum_{i=1}^n q_{ij}t_i, P=(p_{ij}), Q=(q_{ij})$，由 8.4 节定理 8.13-1 知 $Q=P^{-1}$，且 $t_j^*=\sum_{i=1}^n t_j^*(s_i)s_i^*=\sum_{i=1}^n t_j^*\left(\sum_{k=1}^n q_{ki}t_k\right)s_i^*$。由定义可知 $t_j^*\left(\sum_{k=1}^n q_{ki}t_k\right)=q_{ji}$，因此 $t_j^*=\sum_{i=1}^n q_{ji}s_i^*$，由此利用定义可知所求过渡矩阵为 P^{-T}。

5. (1) 验证线性性可知 $f_\alpha\in V^{**}$，设 V 维数为 n，由定义可知矩阵表示为 $\begin{pmatrix}s_1^*(\alpha) & s_2^*(\alpha) & \cdots & s_n^*(\alpha)\end{pmatrix}$。

(2) 直接验证可知 τ 为线性映射。设 α 在 S 表示下的坐标为 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$，则 (1) 中的矩阵表示可以化为 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，由此可证明其是同构。

6. (1) 为子空间直接验证即可。由 f 的线性性可验证 $f(x)=0,x\in S\Rightarrow f(x)=0,x\in\mathrm{Span}(S)$，而由于 $S\subset\mathrm{Span}(S)$，$f(x)=0,x\in\mathrm{Span}(S)\Rightarrow f(x)=0,x\in S$，由此可知 $\mathrm{Ann}(S)=\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(S))$。

(2) 设 S 的极大线性无关组为 $s_1,\dots,s_k$，扩充为 V 的基为 $s_1,\dots,s_n$。由于 $f(s_i)=0,i\le k$，可直接验证 $\mathrm{Ann}(S)$ 的一组基为 $f_i(s_j)=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}, i=k+1,\dots,n$，由此知 $\dim\mathrm{Ann}(S)=n-k=\dim(V)-\mathrm{rank}(S)$。

(3) $f \in \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2) \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in V_1 \cap V_2$，类似 (2) 的过程，考虑基可知此即等价于 $f \in \mathrm{Span}(\mathrm{Ann}(V_1), \mathrm{Ann}(V_2))$，即 $f \in \mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)$。

$f \in \mathrm{Ann}(V_1+V_2) \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in V_1+V_2 \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in \mathrm{Span}(V_1 \cup V_2) \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in V_1 \cup V_2 \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in V_1$ 且 $f(x) = 0, x \in V_2 \Leftrightarrow f \in \mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$

(4) 由 (3)，$\mathrm{Ann}(V_1)+\mathrm{Ann}(V_2) = \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2) = \mathrm{Ann}(\mathbf{0}) = V^*, \mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2) = \mathrm{Ann}(V_1+V_2) = \mathrm{Ann}(V) = \mathbf{0}$，由此得证。

§9.4　核空间与像空间

1. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AX + XA = \begin{pmatrix} 2a+b-c & -a-d \\ a+d & b-c-2d \end{pmatrix}$，$\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ 的一组基为 $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$，$\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 的一组基为 $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$。

2. $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ 为全体反对称方阵，$\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 为全体对称方阵，类似 8.4 节习题 1(5) 可知基。

3. 由 8.7 节定理 8.23，考虑 $(U_1 \cap W)/(U_2 \cap W)$ 到 U_1/U_2 的映射 $\pi : a + U_2 \cap W \to a + U_2$。由于 $a+U_2 \neq b+U_2 \Rightarrow a-b \notin U_2 \Rightarrow a-b \notin U_2 \cap W \Rightarrow a+U_2 \cap W \neq b+U_2 \cap W$，因此同一个元素的像唯一，此映射定义合理。

   而若 $a \notin U_2 \cap W$，由 $a \in U_1 \cap W$ 知 $a \notin U_2$，因此 $a + U_2 \neq U_2$，也即 $\mathrm{Ker}\,\pi = \{\mathbf{0}\}$，此映射为单射，由此知维数关系。

   若等号成立，则意味着此映射为满射，利用定理 8.22 设 U_2 对 U_1 一个补空间为 U_3，若 $\exists a \in U_3, a \notin W$，取此 $a + U_2$ 即无原象，反之，若 $U_3 \subset W$，可发现此即为满射，因此充要条件为 $U_3 \subset W$，进一步由题目条件可写为 $\mathcal{A}U_1 = \mathcal{A}U_2$。

4. (1) $\mathcal{A}x = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{B}\mathbf{0} = \mathbf{0}$，由此知 Ker 的关系；$\mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \mathcal{B}y$，由此知 Im 的关系。

   (2) 由条件，若 $x = \mathcal{A}y, \mathcal{B}x = \mathbf{0}$，则只有 $x = \mathbf{0}$，因此限制在 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 上的 $\mathcal{B}$ 为单射。由此存在限制在 $\mathrm{Im}\,\mathcal{B}\mathcal{A}$ 上的 $\mathcal{C}$(可验证其为线性映射) 使得 $\forall x \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}, \mathcal{C}\mathcal{B}x = \mathcal{B}x$，令 $x = \mathcal{A}y$ 可发现其已经满足题目条件，再将 $\mathrm{Im}\,\mathcal{B}\mathcal{A}$ 的一个补空间全部映射到 $\mathbf{0}$ 即可。

   (3) 对 V 的一组基 $\{c_i\}$，由条件可设 $\mathcal{B}\mathcal{A}t_i = \mathcal{B}c_i$，则令 $\mathcal{C}c_i = t_i$。利用线性性可验证对 V 中的元素均有 $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}c = \mathcal{B}c$，由此知构造出的 $\mathcal{C}$ 符合要求。

5. (1) 取 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ 的补空间 V，由 8.7 节定理 8.20 与定理 9.1 可知 V 与 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 同构，令 B 限制在 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 上为到 V 的同构映射，再将 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 的一个补空间全部映射到 $\mathbf{0}$，计算验证知成立。

   (2) * 结论应该为 $\mathcal{A}$ 为双射或零映射 (即像恒为 $\mathbf{0}$)

   右推左：$\mathcal{A}$ 为双射时，$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$，由此得 $\mathcal{B}$ 只能为 $\mathcal{A}^{-1}$。

   $\mathcal{A}$ 为零映射时，$\mathcal{B}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathcal{B}x) = \mathbf{0}$，由此唯一。

   左推右：先证明引理，U 为 V 子空间，其补空间唯一当且仅当 $U = \{\mathbf{0}\}$ 或 $U = V$。直接验证知当成立，对于仅当，若 U 两者均非，取 U 的某个补空间，从中取出一组基，由选择公理取出一个基 s，再用选择公理取出 U 的一个基 t，则将 s 替换为 $s+t$ 即获得了与原本不同的补空间。

   利用引理，在 5(1) 的构造中，可发现只要取的补空间不同，构造出的 $\mathcal{B}$ 即不同。由此，若 $\mathcal{B}$ 唯一，只能 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}, \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 均为 $\{\mathbf{0}\}$ 或全空间，分类讨论即得 $\mathcal{A}$ 为双射或零映射。

6. (1) 设 $x \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \cap \mathrm{Im}\,\mathcal{B}$，则 $x = \mathcal{B}y = \mathcal{B}\mathcal{A}(\mathcal{B}y) = \mathcal{B}\mathbf{0} = \mathbf{0}$，由此 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \cap \mathrm{Im}\,\mathcal{B} = \{\mathbf{0}\}$。

若 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \oplus \operatorname{Im}\mathcal{B} \neq U$，由定义知存在 $a \in U$ 使 $a + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 均不在 $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ 中，由此不存在 x 使 $\mathcal{A}(\mathcal{B}x - a) = \mathbf{0}$，与 $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{A}a - a) = \mathbf{0}$ 矛盾。

同理可说明第二个式子。

(2) 设 $x = \mathcal{B}t \in \operatorname{Im}\mathcal{B}$，代入 $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}t = \mathcal{B}t$ 知 $\mathcal{B}\mathcal{A}x = x$，同理 $y \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$ 可推出 $\mathcal{A}\mathcal{B}y = \mathcal{A}$，分别限制在像空间中可知互为逆映射。

7. 设 $U_3 = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}$，$U_3$ 对 U 的一个补空间为 U_0，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 限制在 U_0 上为 $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$，$U_2 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}', U_1 = \operatorname{Ker}\mathcal{B}'$，接下来验证这样的 U_1, U_2, U_3 即符合要求。

   $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = U_2 \oplus U_3$：由 $U_2 \in U_0, U_0 \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$ 知 $U_2 \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$，将 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 中的元素拆分为 $a_1 + a_2, a_1 \in U_3, a_2 \in U_0$ 可发现 $\mathcal{A}'a_2 = \mathbf{0}$，由此知成立。同理有 $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = U_1 \oplus U_3$。

   $U_1 + U_2 + U_3$ 是直和：定义可算出 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}' \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}' = \{\mathbf{0}\}$，即 $U_1 + U_2$ 是直和。再由 $U_3 + (U_1 \oplus U_2) = U_3 + U_0$ 是直和，利用 8.6 节习题 4 可知结论。

   $U_0 = U_1 + U_2$：计算知 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B} \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$，由此拆分可发现 $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{A}', \operatorname{Im}\mathcal{B} = \operatorname{Im}\mathcal{B}', \operatorname{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \operatorname{Im}(\mathcal{A}' + \mathcal{B}')$，因此 $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ 也满足条件式。任取 $c \in U_0$, 考虑 $\mathcal{A}c \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \oplus \operatorname{Im}\mathcal{B}$，由条件 $\mathcal{A}c = (\mathcal{A} + \mathcal{B})t$，因此 $\mathcal{A}(c - t) = \mathcal{B}t$，由 $\operatorname{Im}\mathcal{A} + \operatorname{Im}\mathcal{B}$ 是直和知只能 $\mathcal{A}(c - t) = \mathcal{B}t = \mathbf{0}$，由此 $t \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}, c - t \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Rightarrow c = (c - t) + t \in U_1 + U_2$，原命题得证。

   $U = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$：结合以上两条即可推出。

   $\mathcal{A}$ 的限制映射可逆：利用 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = U_2 \oplus U_3$ 可知 $U = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \oplus U_1$，由例 9.14 得结论。

8. (1) 右推左：$x = \mathcal{A}t \Rightarrow x = \mathcal{B}(\mathcal{A}t) \in \operatorname{Im}\mathcal{B}$，同理有另一边包含，由此知 $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{B}$。

   左推右：由例 9.15，$\mathcal{A}$ 在 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 上为恒等映射，$\mathcal{B}x \in \operatorname{Im}\mathcal{B} = \operatorname{Im}\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{B}x) = \mathcal{B}x$，同理可证另一边。

   (2) 右推左：$\mathcal{A}x = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{B}x = \mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{B}\mathbf{0} = \mathbf{0}$，同理有另一边包含，由此知 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$。

   左推右：利用例 9.15，任意 V 中元素，设其为 $u + v, u \in \operatorname{Im}\mathcal{A}, v \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$，$\mathcal{B}\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{B}\mathcal{A}u$，由 $\mathcal{A}$ 在 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 上为恒等映射知此即为 $\mathcal{B}u = \mathcal{B}(u + v)$，同理可证另一边。

   (3) 右推左：$\operatorname{rank}\mathcal{A} = \operatorname{rank}(\mathcal{A}\mathcal{C}) = \operatorname{rank}(\mathcal{C}\mathcal{B}) = \operatorname{rank}\mathcal{B}$。

   左推右：考虑对应的矩阵表示，由于 $A^2 = A$，其相似标准型亦满足此性质，可发现只能为 0 与 1 构成的对角阵，再由秩相同知 A, B 相似标准型相同，因此存在可逆阵 C 使 $C^{-1}AC = B$，将 C 对应为线性变换即为所求。

9. (1) 左推右：考虑基可知 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 包含 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 的一个补空间，由例 9.14 可知其为满射。

   右推左：若有某个 $a + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 均不在 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 中，考虑 $\mathcal{A}a$，利用例 9.14 知 $\mathcal{A}x = \mathcal{A}a$ 的解为 $x = a + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$，因此 $\mathcal{A}a \notin \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A})$，而 $\mathcal{A}a \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$，与满射矛盾，由此知结论成立。

   (2) 左推右：由例 9.14 直接得成立。

   右推左：设 $\mathcal{A}$ 在 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 上的限制映射为 $\mathcal{A}'$，由于 $\mathcal{A}'$ 为单射，$\operatorname{Ker}\mathcal{A}' = \mathbf{0}$，类似习题 7 证明过程知 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}' = \{\mathbf{0}\}$，再结合 (1) 知结论。

10. 对 m 归纳，$m = 1$ 时直接成立，若 $m - 1$ 时成立，考虑 m 时：

    由 $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$，可知限制在 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 的 $\mathcal{A}^{m-1} = \mathcal{O}$。取 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 的子空间 U_0 使 $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathcal{A}^{i-1}U_0$。设 U_0 的一组基为 $\{\mathcal{A}\alpha_i\}$，记 $V_0 = \operatorname{Span}\{\alpha_i\}$。

    $V_0 \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$：由归纳假设，$\mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}) \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$，而 $\mathcal{A}V_0 \subset U_0$，由此 $\mathcal{A}V_0 \cap \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}) = \{\mathbf{0}\}$，即 $V_0 \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A}$。由 V_0 定义，$\mathcal{A}\alpha_i$ 线性无关，因此 $\mathcal{A}v = \mathbf{0}, v \in V_0$ 当且仅当 $v = \mathbf{0}$，即 $V_0 \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$，结合 $V_0 \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 即有结论。

$V=V_0+\operatorname{Im}\mathcal{A}+\operatorname{Ker}\mathcal{A}$：由 U_0 定义，$\forall\alpha\in V,\exists\beta_i\in\mathcal{A}^{i-1}U_0,\mathcal{A}\alpha=\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i$。对 $i>1$，$\beta_i\in\operatorname{Im}\mathcal{A}$，由于 $U_0\operatorname{Im}\mathcal{A}$，$\beta_i\in\operatorname{Im}\mathcal{A}$，设其原象为 γ_i，当 $i>1$ 时，$\beta_i\in\mathcal{A}U_0\in\operatorname{Im}\mathcal{A}^2$，由此可取 $\lambda_i\in\operatorname{Im}\mathcal{A}$，而 $\beta_1\in U_0$，因此由 V_0 定义可取 $\gamma_1\in V_0$。此时，$\mathcal{A}(\alpha-\gamma_1-\sum_{i=2}^{m-1}\gamma_i)=\mathbf{0}$，因此 $\alpha-\gamma_1-\sum_{i=2}^{m-1}\gamma_i\in\operatorname{Ker}\mathcal{A}$，即有 $\alpha\in V_0+\operatorname{Im}\mathcal{A}+\operatorname{Ker}\mathcal{A}$。

存在符合要求的 U：由于 $V_0\cap\operatorname{Im}\mathcal{A}=\{\mathbf{0}\}$，分析基可知，可取出 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 的一个子空间 W 使得 $V=V_0\oplus\operatorname{Im}\mathcal{A}\oplus W$，取 $U=V_0\oplus W$，计算可知 $\mathcal{A}U=U_0$，由此利用归纳假设知结论成立。

§9.5 不变子空间

1. $\mathcal{A}U$ 不变：$\alpha=\mathcal{A}u,u\in U\Rightarrow\mathcal{A}\alpha=\mathcal{A}(\mathcal{A}u)$，由 U 不变知 $\mathcal{A}u\in U$，因此 $\mathcal{A}\alpha\in\mathcal{A}U$，由此得证。

   $\mathcal{A}^{-1}U$ 不变：$\mathcal{A}\alpha\in U\Rightarrow\mathcal{A}\mathcal{A}\alpha\in U\Rightarrow\mathcal{A}\alpha\in\mathcal{A}^{-1}U$，由此得证，

2. (此处 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$，否则无统一结论)

   由定义可发现，设 $t(a,b)$ 为一维不变子空间 (t 为参数)，则存在 r 使得 $a+b=ra,a-b=rb$，且 a,b 不全为 0，由此解得结果为 $t(\sqrt{2}+1,1)$ 与 $t(1-\sqrt{2},1)$。

3. 由 9.4 节习题 1，类似习题 2 解出 r 只能为 0，因此结果为 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 的一维子空间。

4. 利用 9.4 节习题 2 可知 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 与 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$。

   设 $\mathcal{A}'$ 为 A 在 U 上的限制映射，$\operatorname{Ker}\mathcal{A}'\subset\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 为反对称方阵的子空间。而由不变子空间定义，$\operatorname{Im}\mathcal{A}'\in U$，其为实对称方阵的一个子空间。由于 $\mathcal{A}'^2=2\mathcal{A}'$，类似 9.4 节例 9.15 可知 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}'\oplus\operatorname{Im}\mathcal{A}'=U$，由此 U 可拆分成一个对称方阵子空间与一个反对称方阵子空间的直和。

   若 U 为一个对称方阵子空间与一个反对称方阵子空间的直和，分析基可验证其为不变子空间，因此此为充要条件，由此可知 $k=1,2,3$ 时的 U。

   (本题实际证明的结论：幂等变换的不变子空间一定为 Ker 的子空间与 Im 的子空间的直和)

5. 设 V 的一组基为 $\{\alpha_i\}$，由一维子空间均为不变子空间可知 $\mathcal{A}\alpha_i$ 为 α_i 倍数，记某个基为 α，$\mathcal{A}\alpha=a\alpha$，下证 $\mathcal{A}=a\mathcal{I}$。

   若对另一个基 $\beta\in\{\alpha_i\},\mathcal{A}\beta=b\beta$，由于 $\mathcal{A}(\alpha+\beta)=c(\alpha+\beta)$，由 α,β 线性无关可算得只能 $c=b=a$，由此，$\forall\alpha_i,\mathcal{A}\alpha_i=a\alpha_i$，利用 $\{\alpha_i\}$ 为一组基计算得 $\mathcal{A}=a\mathcal{I}$，原命题得证。

6. 须先证明此映射良好定义：考虑 $[u]$ 中的 $u+w_1,u+w_2,w_1,w_2\in W$，由于 $\mathcal{A}(u+w_1)=\mathcal{A}u+\mathcal{A}w_1,\mathcal{A}(u+w_2)=\mathcal{A}u+\mathcal{A}w_2$，由 W 不变，$\mathcal{A}w_1,\mathcal{A}w_2\in W$，因此 $[\mathcal{A}(u+w_1)]=[\mathcal{A}(u+w_2)]=[\mathcal{A}u]$，由此映射良好定义。

   (1) * 此题须 $W\subset U$

   由定义，$u\in U\Rightarrow\mathcal{A}u\in U$，因此 $[u]\in U/W\Rightarrow u\in U\Rightarrow\mathcal{A}u\in U\Rightarrow\mathcal{B}[u]=[\mathcal{A}u]\in U/W$。

   (2) 取 $U=\{u_i\mid[u_i]\in\tilde{U}\}$，直接验证可知其线性。$u\in U\Rightarrow[u]\in\tilde{U}\Rightarrow[\mathcal{A}u]=\mathcal{B}[u]\in\tilde{U}\Rightarrow\mathcal{A}u\in U$。

7. (1) 错误。$V=\mathbb{F}^2,\mathcal{A}=\mathcal{O},U=\{(a,0)\}$，则 $\operatorname{Ker}p(\mathcal{A})$ 只可能为 $\{(0,0)\}$ 或 $\mathbb{F}^2$，因此不存在。

   (2) 错误。反例同 (1)，$\operatorname{Im}p(\mathcal{A})$ 只可能为 $\{(0,0)\}$ 或 $\mathbb{F}^2$，因此不存在。

   (3) 错误。$V=\mathbb{F}^2,\mathcal{A}(x,y)=(x,0),U=\{(a,0)\}$，验证可知 U 的任何补空间均不为不变子空间。

   (4) 错误。$V=\mathbb{F}^2,\mathcal{A}(x,y)=(x,0),\mathcal{B}(x,y)=(0,y),U=\{(a,0)\}$，$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{O}$，而 U 不为 $\mathcal{B}$ 的不变子空间。

(5) 错误。V 为一切 $\dfrac{g(x)}{h(x)}, g, h \in \mathbb{F}[x], h \neq 0$ 构成的集合，$\mathcal{A}f(x) = xf(x), \mathcal{B}f(x) = \dfrac{1}{x}f(x)$，$U = \mathbb{F}[x]$，可验证 $1 \in U, \dfrac{1}{x} \notin U$，由此 U 为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，但不为 $\mathcal{B}$ 的不变子空间。

§9.6　根子空间

1. 考虑其矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，因此特征值 1 对应特征子空间 $\{c \mid c \in \mathbb{R}\}$，亦为根子空间；特征值 0 对应特征子空间 $\{c(x^3 - 3x^2 + 2x) \mid c \in \mathbb{R}\}$，亦为根子空间；特征值 2 对应特征子空间 $\{cx \mid c \in \mathbb{R}\}$，根子空间 $\{c_1x^2 + c_2x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$。

2. 任何实数 a 均为特征值，对应特征子空间 $\{ce^{ax} \mid c \in \mathbb{R}\}$，考虑每阶导数对应微分方程可知根子空间为 $\{f(x)e^{ax} \mid f \in \mathbb{R}[x]\}$。

3. 1 推 3：取每个不变子空间的基，利用直和定义可知其构成 V 的一组基，再由不变子空间定义知此基下的 $\mathcal{A}$ 矩阵表示为对角阵。

   3 推 4：由 5.4 节定理 5.14 知成立。

   4 推 2：由定理 9.15 知成立。

   2 推 1：考虑每个特征子空间 $\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})$ 的一组基，由于这组基均满足 $\mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha$，因此每个基都生成了一维不变子空间，由此拆分可知成立。

4. 左推右：λ 为 $\mathcal{A}$ 特征值 $\Rightarrow \exists\alpha \neq \mathbf{0}, \mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \exists\alpha \neq \mathbf{0}, d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\alpha = d_{\mathcal{A}}(\lambda)\alpha \Rightarrow \exists\alpha \neq \mathbf{0}, d_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mathbf{0} \Rightarrow d_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$

   右推左：若 λ 不为特征值，记 $d'(x) = \dfrac{d_{\mathcal{A}}(x)}{x - \lambda}$ 由定义知 $\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}) = \{\mathbf{0}\}$，由此 $(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})(d'\mathcal{A}) = \mathcal{O} \Rightarrow d'\mathcal{A} = \mathcal{O}$，因此 d' 亦为化零多项式，且次数更小，矛盾。

5. 由根子空间定义，利用定理 9.13 知其中任意有限个的和为直和，再由 8.6 节习题 5 知结论。

6. $(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})f_i(\mathcal{A}) = d_A(\mathcal{A})\prod\limits_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)^{-1} = \mathcal{O}$，因此 $f_i(\mathcal{A})\alpha \in \mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})$。而 $\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x) - 1$ 为 $k-1$ 次多项式，代入可验证 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 均为其零点，因此其只能恒为 0，即 $\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x) = 1 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(\mathcal{A}) = \mathcal{I}$，由此得证。

7. 习题 6 的证明过程可发现，将 $d_{\mathcal{A}}$ 改为 $\mathcal{A}$ 的任何一个化零多项式均成立，而 $x^n - 1 = \prod\limits_{i=0}^{n-1}(x - \omega^i)$，由此利用习题 6 只需说明 $\prod\limits_{j \neq k} \dfrac{x - \omega^j}{\omega^k - \omega^j} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} \omega^{-kj}x^j$。

   记 $f(x) = \prod\limits_{j \neq k}(x - \omega^j)$，有 $f(x)(x - \omega^k) = x^n - 1$，而 $1 = (\omega^k)^n$，因式分解得 $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{n-1}(\omega^k)^{n-1-j}x^j = \sum\limits_{j=0}^{n-1}\omega^{-k-kj}x^j$。由此，$\prod\limits_{j \neq k} \dfrac{x - \omega^j}{\omega^k - \omega^j} = \dfrac{f(x)}{f(\omega^k)} = \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-k-kj}x^j}{\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-k}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\omega^{-kj}x^j$，原命题得证。

8. (1) 由于 $\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^m \subset \mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^n, \forall m < n$，只需证明 $\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^n = W_i, \forall n > m_i$。由于 $d_{\mathcal{A}}(x)(x - \lambda_i)^{n - m_i}$ 亦为化零多项式，利用定理 9.15 可知 $\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^n$ 与 W_i 均为 $\bigoplus\limits_{j \neq i} W_j$ 的补空间，再由包含关系分析基知只能相等，由此即得证。

(2) 由 W 定义可知 $d_i(x)$ 为化零多项式，因此最小多项式为其因式。若 $m < m_i$，$(x-\lambda_i)^m$ 为最小多项式，可发现 $W_i = \mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^m$。由此利用定理 9.15 写为直和可计算发现 $\dfrac{d_{\mathcal{A}}(x)}{(x-\lambda_i)^{m_i-m}}$ 亦为化零多项式，与 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 最小性矛盾，由此最小多项式即为 $d_i(x)$。

(3) 左侧不等号：由于 W_i 上存在最小多项式次数为 m_i 的线性映射 (由 (2) 知即为 $\mathcal{A}$ 在其上的限制映射)，考虑矩阵表示即知至少为 m_i 阶矩阵，即 $\dim W_i \geq m_i$。

右侧不等号：先证明，当 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}, \mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$ 为有限维时，$\dim\mathrm{Ker}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \dim\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} + \dim\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$。

由 $\mathcal{A}\mathcal{B}x = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{B}x \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$，设 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$ 的补空间为 U，利用 9.4 节例 9.14，$\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}\cap\mathrm{Im}\,\mathcal{B}$ 在 U 上的原象 W 维数为 $\dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}\cap\mathrm{Im}\,\mathcal{B}) \leq \dim\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$，而一切满足要求的 x 为 $W+\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$，利用 8.5 节定理 8.15 知不等式成立。

由此归纳可得 $\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^m \leq m\,\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})$，原结论成立。

9. $\alpha \in W \Leftrightarrow \exists n, \alpha \in \mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^n \Leftrightarrow (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^n\alpha = \mathbf{0} \Leftrightarrow \exists n, d_{A,\alpha}(x) | (x-\lambda)^n \Leftrightarrow \exists m, d_{A,\alpha} = (x-\lambda)^m$

10. (1) $xf'(x) = \lambda f(x)$，可解得一切自然数 n 为特征值，对应的特征子空间为 $\{cx^n \mid c \in \mathbb{F}\}$，其亦为根子空间。

(2) 设 α 次数为 n，可考虑 $\mathcal{A}$ 限制在 $\mathbb{F}_{n+1}[x]$ 上的矩阵表示，其为 $\mathrm{diag}(0,1,\ldots,n)$。由此，对任意次数的 α 可知，若 α 的 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 次项不为 0，最小多项式即为 $\prod\limits_{i=1}^{k}(x-a_i)$。

§9.7 循环子空间

1. (1) 对于 n 次多项式 f，考虑最高次项可知 $f, \mathcal{D}f, \ldots, \mathcal{D}^n f$ 可生成 $\mathbb{F}_{n+1}[x]$。由此，考虑不变子空间 (由非平凡设其非空) 中次数最高的多项式，若不存在，则一列次数趋于无穷的 f 可生成 $\mathbb{F}[x]$，平凡。若存在，此不变子空间包含于 $\mathbb{F}_{n+1}[x]$，又由 $\mathbb{F}[\mathcal{D}]f = \mathbb{F}_{n+1}[x]$ 知其只能为 $\mathbb{F}_{n+1}[x]$，即为 f 生成的循环子空间。

(2) 考虑不变子空间 (由非平凡设其非空) 中次数最低的多项式 f。若有 $g \in \mathbb{F}[\mathcal{A}]f$，设 $\deg g - \deg f = n$，则每次考虑最高次项，直接构造 a_i 可使 $g - a_n\mathcal{S}^n f - \cdots - a_1\mathcal{S}f - a_0 f$ 次数比 f 更低，矛盾，由此得证。

2. (1) 设 $U_1 = \mathbb{F}[\mathcal{A}]\alpha$，由 9.5 节例 9.17-3 可知 $U_1 \cap U_2$ 亦为不变子空间，其中每个元素均可写成 $f(\mathcal{A})\alpha, f \in \mathbb{F}$(若有多个 f 可以表示，取其中次数最小的 f 作为表示)，考虑其中次数最小的 f 对应的 $f(\mathcal{A})\alpha$，若有某个 $g(\mathcal{A})\alpha$ 不在其生成的循环子空间中，即 $f \nmid g$，由裴蜀定理可知 $\gcd(f,g)(\mathcal{A})\alpha \in U_1 \cap U_2$，$\dim\gcd(f,g) < \dim f$，矛盾，由此知结论成立。

(2) $V = \mathbb{F}^2, \mathcal{A} = \mathcal{I}, U_1 = \{(a,0)\}, U_2 = \{(0,a)\}$，分析知 $\mathcal{A}$ 的循环子空间为一切一维子空间，因此 U_1, U_2 皆循环，$U_1 \oplus U_2 = V$ 不循环。

(3) 取习题 1 中的微分变换，$U_1 = \mathbb{F}_1[x]$，由习题 1 知其不变子空间只能为 $\mathbb{F}_n[x]$，因此不存在 U_2。

3. 1、2 等价：利用习题 2(1) 可知 $\mathcal{A}$-循环子空间的任何不变子空间仍为 $\mathcal{A}$-循环子空间，由此由 1 可推出 2；而 V 为不变子空间，由此 2 可推出 1。

1 推 4：设线性空间维数为 n，循环向量为 α，取基为 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$，计算验证知成立。

4 推 3：由 5.4 节例 5.14 知成立。

3 推 1：由定理 9.19，取 α 使得 $d_{\mathcal{A},\alpha} = d_{\mathcal{A}} = \varphi_{\mathcal{A}}$，可直接验证其生成的循环子空间维数等于空间维数，因此其即为循环向量。

4. * 设线性空间维数为 n，循环向量为 α

左推右：若否，设 $\varphi_{\mathcal{A}} = fg$，$f,g$ 均不为零次，则 $g(\mathcal{A})f\mathcal{A}\alpha$，由此 g 为 $\mathcal{A}$ 对 $f\mathcal{A}\alpha$ 的化零多项式，其次数小于 $\varphi_{\mathcal{A}}$，与其为循环向量矛盾。

右推左：由于 $d_{\mathcal{A},\alpha} \mid d_{\mathcal{A}} \mid \varphi_{\mathcal{A}}$，由于 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 不可约，$d_{\mathcal{A},\alpha}$ 只能为零次多项式或 $\varphi_{\mathcal{A}}$，而 $\alpha \neq \mathbf{0}$，因此只能为 $\varphi_{\mathcal{A}}$。由此，$\alpha, \mathcal{A}\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 线性无关，生成空间维数为 n，因此其为循环向量。

5. 数学归纳法可证明 9.4 节习题 10 结论，由此构造：

由于 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m = V$，可取出 $U \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 的一组基，扩充为 $U \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2$ 的一组基，依次进行，最后一步是扩充为 $U \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m = U$ 的一组基。设这组基为 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$。

由 9.4 节习题 10 的构造过程，设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}\alpha_{s+1}, \dots, \mathcal{A}\alpha_k$ 线性无关，且生成了 $\mathcal{A}U$。以此类推可证明，$\mathcal{A}^t\alpha_i$ 中不为 $\mathbf{0}$ 者生成了 $\mathcal{A}^tU$，由于 $V = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{A}^iU$，因此 $V = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{F}[\mathcal{A}]\alpha_i$。

6. (1) 设循环向量为 α，由定义存在 g 使得 $\mathcal{B}\alpha = g(\mathcal{A})\alpha$，从而，对 V 中任何 $\beta = f(\mathcal{A})\alpha$，$\mathcal{B}\beta = \mathcal{B}f(\mathcal{A})\alpha$，由可交换可算得其与任何 $\mathcal{A}$ 的多项式交换，因此其为 $f(\mathcal{A})\mathcal{B}\alpha = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\alpha = g(\mathcal{A})f(\mathcal{A})\alpha = g(\mathcal{A})\beta$。两映射对 V 中任何向量的像都相同，因此相等。

(2) 考虑限制在 (U, V) 上的 $\mathcal{B}$，证明方式与上一问完全相同，可知 $\exists f, \mathcal{B}\beta = f(\mathcal{A})\beta, \forall \beta \in U$，将 β 写为 $g(\mathcal{A})\alpha$，α 为生成此空间的向量，可知 $\mathcal{B}\beta$ 仍在此循环子空间中，由此其为 $\mathcal{B}$ 的不变子空间。

第十章　内积空间

§10.1　基本概念

1. (1) 取 $x = (0,0,1)$ 知不满足正定性，不为内积。

(2) 不满足对称性，不为内积。

(3) 为内积。

(4) 取 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知不满足正定性，不为内积。

(5) 值域不在 $\mathbb{R}$ 中，不为内积。

(6) 为内积。

2. * 此处只计算基的内积结果，由结果可直接构造出矩阵

(1) 相异基内积为 1，相同基内积为 2。

(2) 同为 $E_{ii} - E_{11}$ 时内积为 2，同为 E_{ij} 或为 $E_{ii} - E_{11}, E_{jj} - E_{11}, i \neq j$ 时内积为 1，其余情况内积为 0。

(3) 类似 8.5 节 3(2) 可说明相异基内积为 0，计算可得同为 1 内积为 2π，其余情况内积为 π。

(4) $\int_0^1 x^k |\ln x| \mathrm{d}x = -\int_0^1 x^k \ln x \mathrm{d}x$，分部积分递推可算出其为 $\dfrac{1}{(k+1)^2}$，由此可知内积结果。

3. (1) $V = \mathbb{R}_n[x], \rho(f,g) = \int_0^1 xf(x)g(x)\mathrm{d}x, S = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$，验证知 A 构成度量矩阵，由定理 10.1 知正定。

(2) $V = \mathbb{R}_n[x], \rho(f,g) = -\int_0^1 x\ln x f(x)g(x)\mathrm{d}x, S = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$，验证知 A 构成度量矩阵，由定理 10.1 知正定。

(3) $V=\mathbb{R}_n[x],\rho(f,g)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,S=\left\{1,\frac{x}{2},\dots,\frac{x^{n-1}}{n!}\right\}$，验证知 A 构成度量矩阵，由定理 10.1 知正定。

4. * 此题正定指为对称阵且正定

左推右：若 S 不对称，设 $s_{ij}\neq s_{ji}$，取 $X=E_{1i},Y=E_{1j}$(仅一个分量为 1，其他为 0 的方阵) 可算出与内积对称性矛盾。若 S 不正定，存在非零 y 使 $y^TSy\leq 0$，取 Y 第一列为 y，其余为 0，与内积正定性矛盾。

右推左：$Y=\begin{pmatrix}y_1 & \cdots & y_n\end{pmatrix}$，则 $\rho(Y,Y)=\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i^TSy_i$，由此知正定。利用 2.1 节定理 2.2-6 与 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^T)$ 可知对称。直接计算可知线性。

5. (1) 计算知对称、线性必然成立，由此只需证明正定与 $w(x)>0,x\in[0,1]$ 等价。

左推右：若否，可用多项式 $f(x)$ 逼近 $\sqrt{-\max(w(x),0)}$ 可验证充分接近时其内积小于 0，由此不正定。

右推左：若 f 不为 0，其零点有限，因此 $f^2(x)$ 在除了有限点外均大于 0，由此必有 $f^2(x)w(x)>0$ 的点 (否则由连续知 $w(x)$ 恒为 0)，再由 $f^2(x)w(x)$ 连续非负可知积分大于 0，再验证得 f 为 0 时积分为 0，由此正定。

(2) 右推左与 (1) 相同知成立，左推右未必成立：取 $V=\mathbb{R}_2[x],w(x)=|6x-3|-1$，几何比较或计算验证可知此满足正定性，为内积。

6. (1) 设列向量 x 分量为 $x_1,\dots,x_n$，计算得 $x^TGx=\rho\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i\right)$，由内积正定性知其大于等于 0，因此半正定。

(2) 1,3 等价：利用第一问结论，其正定当且仅当不存在非零 x 使 $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i=\mathbf{0}$，即等价于线性无关。

1,2 等价：由 G 半正定，利用 7.4 节定理 7.4-2,7.5-2 可知结论。

7. 由定义直接计算，第三问平方后利用定理 10.3 即可。

8. (1) 若有 $n+2$ 个合要求的向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+2}$，由 $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}$ 线性相关，有不全为 0 的 x_i 使 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}x_i\alpha_i=0$，由此 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}x_i(\alpha_i,\alpha_{n+2})=0$。由于每个内积都小于 0，$x_i$ 必然有正有负，由此可分为 $\displaystyle\sum_t x_t\alpha_t=-\sum_s x_s\alpha_s$，$x_t>0,x_s<0$，左右均不为 $\mathbf{0}$。记左右结果为 β，则 $(\beta,\beta)=\displaystyle\sum_{s,t}x_t(-x_s)(\alpha_t,\alpha_s)<0$，矛盾。

(2) 归纳，一维时直接计算知成立。

假设 $n-1$ 维时成立，n 维时，若能取出 $2n+1$ 个合要求的向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_{2n+1}$，设每个向量在包含 α_1 的一组正交基的表示为 $(a_{i1},\dots,a_{in})$，其中 α_1 为 $(1,0,\dots,0)$。由 $(\alpha_1,\alpha_i)<0$，可知 $a_{i1}\leq 0,i>1$。若有其他除第一个分量外全为 0 的向量，计算知其只能为 $(-t,0,\dots,0),t>0$，且最多存在一个。因此，可不妨设 $\alpha_3,\dots,\alpha_{2n+1}$ 后 $n-1$ 个分量不全为 0。由归纳假设，其中必有两向量后 $n-1$ 个分量的内积大于 0，又由于第一个分量同号，此两向量内积 >0，矛盾。

9. $p(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=2^{1/p}>2=p(\mathbf{e}_1)+p(\mathbf{e}_2)$，由此其不为范数。

§10.2 标准正交基

1. 例 10.5：$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

   例 10.7：Gram-Schmidt 标准正交化可得 $1, x-1, \dfrac{x^2-4x+2}{2}$

2. (1) $\rho(f,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$

   证明：分析知 $\deg P_n(x)=n$，由此为说明正交性，只需证明 $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(x)x^m\mathrm{d}x$ 对 $m<n$ 成立。利用分部积分可算出 $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(x)x^m\mathrm{d}x=-\frac{m}{2n}\int_{-1}^{1}P_{n-1}(x)x^{m-1}\mathrm{d}x$，原命题化为 $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(x)\mathrm{d}x$ 当 $n>0$ 时为 0，再次分部积分可说明这个结论。

   (2) $\rho(f,g)=\displaystyle\int_{0}^{2\pi}f(\cos\theta)g(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$

   (3) $\rho(f,g)=\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\sin^2\theta f(\cos\theta)g(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$

3. 左推右：由定理 10.4 直接得结论。

   右推左：设 $T=\{t_1,\dots,t_n\},S=\{s_1,\dots,s_n\}$，过渡矩阵 P，计算知 $(t_i,t_j)=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_{ki}s_k,\sum_{k=1}^{n}p_{kj}s_k\right)$，由 S 为标准正交基知其为 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_{ki}p_{kj}=(P^TP)_{ij}=I_{ij}$，由此知结论。

4. 设 $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则 $AX=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\3a+6c&3b+6d\end{pmatrix}$，可发现 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 的一组基 $\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}$ 正交，由此类似得：

   $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 一组标准正交基为 $\dfrac{\sqrt5}{5}\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\dfrac{\sqrt5}{5}\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}$；

   $(\operatorname{Ker}\mathcal{A})^\perp$ 的一组标准正交基为 $\dfrac{\sqrt5}{5}\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\dfrac{\sqrt5}{5}\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$；

   $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 的一组标准正交基为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix},\dfrac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}$；

   $(\operatorname{Im}\mathcal{A})^\perp$ 的一组标准正交基为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix}-3&0\\1&0\end{pmatrix},\dfrac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix}0&-3\\0&1\end{pmatrix}$。

5. 设 $B=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q,P,Q$ 可逆，令 $x=Q^{-1}y$，则 $Bx=\mathbf{0}\Leftrightarrow P^{-1}Bx=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}y=\mathbf{0}$，可发现此时 y 前 r 个分量为 0，其余可任取，由此 $y=\begin{pmatrix}O_{r\times r}&O\\O&I_{n-r}\end{pmatrix}z,z\in\mathbb{R}^n$，记 $A'=AQ^{-1}\begin{pmatrix}O&O\\O&I_{n-r}\end{pmatrix}$，则问题变为求 $||A'z-\alpha||,z\in\mathbb{R}^n$ 的最小值，由例 10.13 知结果。

6. 若否，不妨设有不全为 0(可设 $\lambda_1\neq0$) 的 λ_i 使 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k=\mathbf{0}$，但类似定理 10.7-2 知 $\left|\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k\right|\right|^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2||\alpha_k||^2\geq\lambda_1^2||\alpha_1||^2>0$，矛盾。

7. 考虑 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $V=\operatorname{Span}\{\cos(ax),a\in(0,1]\}$，定义内积为 $\rho(f,g)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t}{x}$。

类似 8.2 节习题 3(1) 可说明 $\{\cos(ax), a\in(0,1]\}$ 线性无关，将 f,g 写为基的和可说明内积定义合理。a,b 不同时，$\int_0^x \cos(at)\cos(bt)\mathrm{d}t$ 有界，因此内积为 0；而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^x\cos^2(at)\mathrm{d}t}{x}=\dfrac{2a}{\pi}\int_0^{\pi/a}\cos^2(at)\mathrm{d}t$ $=1$，由此其构成标准正交基。

8. 考虑 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $V=\mathrm{Span}\{\cos(nx),\sin(nx),\mathrm{e}^x,n\in\mathbb{N}^*\}, U=\mathrm{Span}\{\cos(nx),n\in\mathbb{N}^*\}$，定义内积 $\rho(f,g)=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x$，则 $U^\perp=\mathrm{Span}\{\sin(nx),n\in\mathbb{N}^*\},(U^\perp)^\perp=U$，但 $U\oplus U^\perp\neq V$。

9. (1) $x\in(U_1+U_2)^\perp\Leftrightarrow x\in\mathrm{Span}\{U_1,U_2\}^\perp\Leftrightarrow\forall u_1+u_2,u_1\in U_1,u_2\in U_2,x\perp(u_1+u_2)$；左推右取 u_1,u_2 分别为 $\mathbf{0}$ 可知 $x\perp u_1,x\perp u_2$，由此成立；右推左由内积线性性得成立。

   $x\in U_1^\perp+U_2^\perp\Rightarrow x=y+z,y\in U_1^\perp,z\in U_2^\perp$，由 $y,z\in(U_1\cap U_2)^\perp$ 与内积线性性知 $x\in(U_1\cap U_2)^\perp$。

   (2) 当 V 维数有限时，由 8.5 节定理 8.15，$\dim(U_1\cap U_2)^\perp=\dim V-\dim(U_1\cap U_2)=\dim V-\dim U_1-\dim U_2+\dim(U_1+U_2)=\dim U_1^\perp+\dim U_2{}^\perp-\dim(U_1+U_2)^\perp=\dim U_1^\perp+\dim U_2{}^\perp-\dim(U_1^\perp\cap U_2^\perp)=\dim(U_1^\perp+U_2^\perp)$，再由 (1) 中包含关系知结论。

   当 V 维数无限时，记 $W\subset U_1+U_2$ 对 U_1+U_2 的正交补空间为 W'，由上方分析知 $U_1'+U_2'=(U_1\cap U_2)'$，而分析基可知 $W^\perp=W'\oplus(U_1+U_2)^\perp$，由此可知结论。

   (3) 习题 8 的解答中，取 $U_1=\mathrm{e}^x,U_2=\mathrm{Span}\{\cos(nx),n\in\mathbb{N}^*\}$，则 $(U_1\cap U_2)^\perp$ 为全空间，$U_1^\perp=\{\mathbf{0}\},U_2^\perp=\mathrm{Span}\{\sin(nx),n\in\mathbb{N}^*\}$，由此不等。

10. 未必。习题 8 的解答中，可验证 $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\mathrm{e}^{4\pi}-1}}\mathrm{e}^x\right\}$ 构成极大标准正交向量组 (由于除零向量外没有其他向量与其垂直)，估算可发现取 $\alpha=\sin x$ 不满足等式。

§10.3 正交变换

1. $||\mathcal{A}\mathcal{B}\alpha||=||\mathcal{B}\alpha||=||\alpha||$

   $||\mathcal{A}^{-1}\alpha||=||\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\alpha||=||\alpha||$

2. (1) $||\mathcal{A}(x+y)-\mathcal{A}x-\mathcal{A}y||^2$

   $=(\mathcal{A}(x+y),\mathcal{A}(x+y))+(\mathcal{A}x,\mathcal{A}x)+(\mathcal{A}y,\mathcal{A}y)-2(\mathcal{A}(x+y),\mathcal{A}y)-2(\mathcal{A}(x+y),\mathcal{A}x)+2(\mathcal{A}x,\mathcal{A}y)$

   $=(x+y,x+y)+(x,x)+(y,y)-2(x+y,y)-2(x+y,x)+2(x,y)=||x+y-x-y||^2=0$

   $||\mathcal{A}(rx)-r\mathcal{A}x||^2=(\mathcal{A}(rx),\mathcal{A}(rx))+r^2(\mathcal{A}x,\mathcal{A}x)-2r(\mathcal{A}(rx),\mathcal{A}x)=(rx,rx)+r^2(x,x)-2r(rx,x)=0$

   由此知结论成立。

   (2) $V=\mathbb{R}[x]$，内积 $\rho\left(\sum\limits_k a_kx^k,\sum\limits_k b_kx^k\right)=\sum\limits_k a_kb_k$，$\mathcal{A}f(x)=xf(x)$，其保内积但不为满射，故不可逆。

   (3) $V=\mathbb{R}$，$\mathcal{A}x=\begin{cases}x & |x|\neq 1\\ -x & |x|=1\end{cases}$，保范数但不为线性映射。

3. 在定理 10.10 证明中将 $e_1,\dots,e_n$ 改为 $\{e_i\}$ 中的任意有限个向量即可说明。

4. 由可逆知其为单射，因此 $\mathcal{A}\alpha=\mathbf{0}\Leftrightarrow\alpha=\mathbf{0}$。任取非零 α_0，记 $\lambda=\dfrac{||\alpha_0||}{||\mathcal{A}\alpha_0||}>0$，下证 $\forall\alpha,\lambda||\mathcal{A}\alpha||=||\alpha||$，由此即得证。

   设 $||\alpha||=c||\alpha_0||,c>0$，可发现 $(\alpha-c\alpha_0)\perp(\alpha+c\alpha_0)$，因此 $\mathcal{A}(\alpha-c\alpha_0)\perp\mathcal{A}(\alpha+c\alpha_0)$，展开计算得 $||\mathcal{A}\alpha||=c||\mathcal{A}\alpha_0||$，因此 $\lambda||\mathcal{A}\alpha||=||\alpha||$。

5. (1) 设特征值对应特征向量 α，则 $||\alpha|| = ||\mathcal{A}\alpha|| = ||\lambda\alpha|| = |\lambda|||\alpha||$，由此可知 $\lambda = \pm 1$。

   (2) $(\alpha, \beta) = (\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, -\beta)$，由此知 $(\alpha, \beta) = 0$。

   (3) 先证明：$\mathrm{Ker}(\mathcal{I} - \mathcal{A}) \perp \mathrm{Im}(\mathcal{I} - \mathcal{A})$。

   设 $x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{I} - \mathcal{A}), y = (\mathcal{I} - \mathcal{A})z$，则 $(x, y) = (x, (\mathcal{I} - \mathcal{A})z) = (x, z) - (x, \mathcal{A}z) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}z) - (x, \mathcal{A}z) = ((\mathcal{A} - \mathcal{I})x, \mathcal{A}z) = (\mathbf{0}, \mathcal{A}z) = 0$，由此得证。

   因此，$x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{I} - \mathcal{A})^2 \Leftrightarrow (\mathcal{I} - \mathcal{A})x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{I} - \mathcal{A})$，但由两空间垂直可知交为 $\mathbf{0}$，因此只能 $(\mathcal{I} - \mathcal{A})x = \mathbf{0}$，即 $x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{I} - \mathcal{A})$。

   对 $\mathcal{I} + \mathcal{A}$，类似证明即可。

   (4) 构造复线性空间 $V' = \{u + \mathrm{i}v, u, v \in V\}$ 与其上变换 $\mathcal{A}'(u + \mathrm{i}v) = \mathcal{A}u + \mathrm{i}\mathcal{A}v$，计算知其为酉变换且最小多项式与 $\mathcal{A}$ 相同。

   与 (1) 类似知 $\mathcal{A}'$ 任一特征值 λ 的模长为 1，若 λ_i 不为特征值，则 $\mathcal{A}' - \lambda_i\mathcal{I}$ 可逆，因此除去这项后仍然为化零多项式，与最小矛盾；若有某个特征值出现两次，与 (3) 类似知 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}' - \lambda\mathcal{I}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}' - \lambda\mathcal{I})^2$，因此去除一次后仍然为化零多项式，与最小矛盾。由此知结论成立。

§10.4　伴随变换

1. 若有 $B, \mathcal{B}'$ 均为 $\mathcal{A}$ 的伴随变换，有 $((\mathcal{B}' - \mathcal{B})\alpha, \beta) = (\mathcal{B}'\alpha, \beta) - (\mathcal{B}'\alpha, \beta) = 0$，取 $\beta = (\mathcal{B}' - \mathcal{B})\alpha$ 知 $\mathcal{B}'\alpha = \mathcal{B}\alpha$，因此两变换相等。

2. (1) 由定理 10.15 知结论。

   (2) 即为 10.2 节定理 10.4。

3. 由定义 $(x + (\alpha, x)\beta, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$，化简得 $(x, (\beta, y)\alpha + y - \mathcal{A}^*y) = 0$，取 $x = (\beta, y)\alpha + y - \mathcal{A}^*y$ 知 $\mathcal{A}^*y = (\beta, y)\alpha + y$。

4. 由定义 $\mathrm{tr}(Q^TX^TP^TY) = \mathrm{tr}(X^T\mathcal{A}^*Y)$。由 2.1 节定理 2.2-6 知 $\mathrm{tr}(Q^TX^TP^TY) = \mathrm{tr}(X^TP^TYQ^T)$，由此 $\mathcal{A}^*Y = P^TYQ^T$。

5. 由定义 $\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(-x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\mathcal{A}^*g(x)\mathrm{d}x$。由于 $\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(-x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)(-x)g(-x)\mathrm{d}x$，$\mathcal{A}^* : g(x) \to -xg(-x)$。

6. $1, x, x^2$ 下度量矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$，类似例 10.19 知 $\mathcal{D}^*$ 矩阵表示 $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}$。

7. $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 是自伴变换 $\Leftrightarrow (x, \mathcal{B}(\mathcal{A}y)) = (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (x, \mathcal{A}\mathcal{B}y) \Leftrightarrow \forall y, \mathcal{A}\mathcal{B}y = \mathcal{B}(\mathcal{A}y) \Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$。

8. (1) $(x, (\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^*y) = (\mathcal{A}^{-1}x, \mathcal{A}^*y) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}x, y) = (x, y)$，因此 $(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = \mathcal{I}$，同理 $\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{I}$，由此得证。

   (2) $(x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y)$，由此得证。

   (3) $\mathcal{A}^*x = \mathbf{0} \Leftrightarrow ||\mathcal{A}^*x||^2 = 0 \Leftrightarrow ||\mathcal{A}x||^2 = 0$，由 $\mathcal{A}$ 可逆知 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}^* = \{\mathbf{0}\}$，由此得证。

   (4) 利用 10.3 节习题 2(2) 解答中定义的内积。设 $\mathcal{A}f(x) = f(x) + \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$，可验证 $\mathcal{A}^*f(x) = (1 + x)f(x)$。考虑基可知 $\mathcal{A}$ 可逆，但 $\mathcal{A}^*$ 不可逆。

9. (1) 仅当：$\mathcal{A}$ 斜自伴 $\Rightarrow (\alpha, \mathcal{A}\alpha) = (-\mathcal{A}\alpha, \alpha) \Rightarrow (\alpha, \mathcal{A}\alpha) = 0$。

当：$(\alpha, \mathcal{A}\alpha) = 0 \Rightarrow (x, \mathcal{A}y) + (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) + (\mathcal{A}x, y) + (x, \mathcal{A}x) + (y, \mathcal{A}y) = (x+y, \mathcal{A}(x+y)) = 0$。

(2) 先说明 $\mathcal{I} \pm \mathcal{A}$ 可逆：$(\mathcal{I}+\mathcal{A})x = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = -\mathcal{A}x \Leftrightarrow (x, -\mathcal{A}x) = -||x||^2 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$，因此其是单射，由有限维知可逆，对 $\mathcal{I} - \mathcal{A}$ 同理。

计算知 $(\mathcal{I}+\mathcal{A})^* = \mathcal{I} - \mathcal{A}$，利用习题 8 知 $((\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1})^* = (\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}$，再由定理 10.16 知 $((\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I}-\mathcal{A}))^* = (\mathcal{I}+\mathcal{A})(\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}$，由于 $\mathcal{A}$ 的有理函数互相可交换，其即为逆，由此为正交变换。

(3) 未必。考虑习题 5 中的 $\mathcal{A}$，由习题 5 知其为斜自伴变换，而 $\mathcal{I} \pm \mathcal{A}$ 的像集均没有 1，因此其不为满射，不可逆。

10. (1) 计算知 $||d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^*)x||^2 = (d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^*)x, d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^*)x) = (d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^*)x, x) = 0$，若有次数更小的 g 为 $\mathcal{A}^*$ 的化零多项式，类似可得 $g(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$，矛盾，由此得证。

(2) 类似 10.3 节习题 5 将 $\mathcal{A}$ 扩充为复线性空间上的线性变换，从而完全分解 $d_{\mathcal{A}}$。对某个特征值 λ，先说明 $\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}^*)$。记 $\mathcal{B} = \lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$，由定理 10.16 知 $\mathcal{B}^* = \lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}^*$，由于 $\mathcal{A}$ 规范，$\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 多项式，$||\mathcal{B}x||^2 = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{B}x, \mathcal{B}x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{B}^*\mathcal{B}x, x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{B}\mathcal{B}^*x, x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{B}^*x, \mathcal{B}^*x) = 0 \Leftrightarrow ||\mathcal{B}^*x||^2 = 0$，因此 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B} = \mathrm{Ker}\,\mathcal{B}^*$，从而得证。

设 $x \in \mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}), y = (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})z$，则 $(x, y) = (x, (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})z) = (x, \lambda z) - (x, \mathcal{A}z) = (\lambda x, z) - (\mathcal{A}^*x, z)$，由上一部分证明知其为 0，由此可知 $\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}) \perp \mathrm{Im}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})$。类似 10.3 节习题 5(5) 知 $d_{\mathcal{A}}$ 没有相同特征根。

(3) 右推左：直接计算验证即可。

左推右：类似 6.2 节习题 8，利用 9.6 节定理 9.15 拆分为各个根子空间，由 (2) 证明过程知 $\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}$ 与 $\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}^*$ 对应根子空间相同，再对每个根子空间的最小多项式使用中国剩余定理即可。

§10.5　复内积空间

1. 所有结论仍均正确，计算验证即可 (余弦定理可定义夹角为 $\dfrac{\mathrm{Re}(a,b)}{||a|| \cdot ||b||}$)。

2. 类似实内积空间中对应定理验证即可。

3. $\gamma_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{i}, 1, 0), \gamma_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}(1, \mathrm{i}, 2), \gamma_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}(1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, \mathrm{i}-1)$

4. 由于实际计算过程与实内积空间时并无区别，因此结果与 10.2 节例 10.10 相同。

5. (1) $(\mathcal{A}x, y) = \overline{(\alpha, x)}(\beta, y) = (x, \alpha)(\beta, y) = (x, (\beta, y)\alpha)$，由此 $\mathcal{A}^*y = (\beta, y)\alpha$。

(2) $\mathrm{tr}(Q^H X^H P^H Y) = \mathrm{tr}(X^H \mathcal{A}^* Y)$。由 2.1 节定理 2.2-6 知 $\mathrm{tr}(Q^H X^H P^H Y) = \mathrm{tr}(X^H P^H Y Q^H)$，由此 $\mathcal{A}^*Y = P^H Y Q^H$。

(3) $1, x, x^2$ 下度量矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$，类似 10.4 节例 10.19 知 $\mathcal{A}^*$ 矩阵表示 $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ -\frac{15}{2} & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$。

6. * 题目有误，应为 $\mathrm{tr}(X^H S Y)$

(1) 与 6.1 节习题 4 类似知结论等价于 S 正定 (Hermite 阵意义下)。

(2) 设一组基为 $E_{11}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}$，则 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示为 $P^T \otimes Q$，而度量矩阵为 $S \otimes I_n$，由 2.2 节习题 7,8 与 2.4 节习题 9，类似 10.4 节例 10.19 知 $\mathcal{A}^*$ 的矩阵表示为 $S^{-1}PS \otimes Q^T$，由此：

酉变换 $\Leftrightarrow \mathcal{A}^*=\mathcal{A}^{-1}\Leftrightarrow P^TS^{-1}PS\otimes QQ^T=I$，分析知其等价于 $P^TS^{-1}PS=aI,QQ^T=bI,ab=1$。

自伴变换 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$，分析知须 $P^T=aS^{-1}PS,Q=bQ^T,ab=1$，分析对应元素知只能 $P^T=S^{-1}PS,Q=Q^T$ 或 $P^T=-S^{-1}PS,Q=-Q^T$。

斜自伴变换 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$，分析知须 $P^T=aS^{-1}PS,Q=bQ^T,ab=-1$，分析对应元素知只能 $P^T=-S^{-1}PS,Q=Q^T$ 或 $P^T=S^{-1}PS,Q=-Q^T$。

规范变换 $\Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$，分析知须 P^T 与 $S^{-1}PS$ 可交换，Q 与 Q^T 可交换。

§10.6　内积的推广

1. 记 $f(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)+\rho(y,x)}{2},g(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)-\rho(y,x)}{2}$，可验证符合要求。由 $f(x,y)+g(x,y)=\rho(x,y),f(x,y)-g(x,y)=\rho(y,x)$ 可解出唯一解，因此唯一。

2. (1) $\rho(x,y)+\rho(y,x)=\rho(x,y)+\rho(y,x)+\rho(x,x)+\rho(y,y)=\rho(x+y,x+y)=0$，由此得证。

   (2) $\mathbb{F}_2$ 上定义 $\rho(x,y)=xy$，可验证其符合要求 (当 $\mathrm{Char}\,\mathbb{F}\neq 2$ 时，由于 $\rho(\alpha,\alpha)=-\rho(\alpha,\alpha)$ 可知反对称)。

3. 利用双线性性类似 10.1 节定理 10.1-2 验证即可。

4. 1 推 2：直接展开计算即可。

   2 推 1：当 $\rho(x,y)$ 恒为 0 时满足，否则，取 x,y 使 $\rho(x,y)\neq 0$，变形有 $\rho(\alpha,\beta)=\dfrac{\rho(\alpha,y)\rho(x,\beta)}{\rho(x,y)}$，取 $f(\alpha)=\dfrac{\rho(\alpha,y)}{\rho(x,y)},g(\beta)=\rho(x,\beta)$，可验证其线性，由此知成立。

5. (1) 记 n 维时的结果为 a_n，归纳。当 $n=1,2$ 时验证知成立。若 $n=k$ 时成立，当 $n=k+2$ 时：

   由于 $\alpha_i^T\alpha_i=0$，每个 α_i 必然有偶数个分量为 1，又由于同时翻转 (即 0 变为 1，1 变为 0) 所有向量的偶数个位置不会影响结果，不妨设 $\alpha_1=(1,1,0,\dots,0)$。由于此 α_1 的存在，所有 α_i 的前两位只能全为 0 或全为 1，否则其与 α_1 内积为 1。前两位全为 0 的不同向量相当于 k 维情形，至多有 a_k 个，同理前两位全为 1 的也至多有 a_k 个，因此 $a_{k+2}\leq 2a_k$，由此得证。

   (2) 记 $\beta_i=(\alpha_i,1)$，则 $\beta_i\in\mathbb{F}^{n+1},\beta_i^T\beta_j=0$，利用 (1) 可知结论。

6. 设变换 $\mathcal{A}$ 矩阵表示为 A，类似 10.4 节例 10.19 知 $\mathcal{A}^*$ 矩阵表示为 $G^{-1}A^TG$，由此：

   辛变换 $\Leftrightarrow G^{-1}A^TG=A^{-1}$，即 $A^TGA=G$(由 G 可逆，此蕴含 A 可逆)。可验证辛变换在复合、取逆下仍然是辛变换，由此辛变换形成群。由于 A^{-1} 与 A^T 相似，进而与 A 相似，辛变换的特征值的倒数仍为特征值 (4.2 节例 4.12 有辛矩阵的一些性质)。

   自伴变换 $\Leftrightarrow G^{-1}A^TG=A$。将 A 分块为 $\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$ 计算可知 $A_4=A_1^T$，且 A_2,A_3 均为反对称阵。

   斜自伴变换 $\Leftrightarrow G^{-1}A^TG=-A$，分块计算可知 $A_4=-A_1^T$，且 A_2,A_3 均为对称阵。

   规范变换 $\Leftrightarrow G^{-1}A^TGA=AG^{-1}A^TG$。