

中国科学技术大学

本科毕业论文



理想磁流体动力学方程组的  
离散方法研究

|       |                |
|-------|----------------|
| 作者姓名: | 郑滕飞            |
| 学号:   | PB20000296     |
| 专业:   | 信息与计算科学        |
| 导师姓名: | 徐岩 教授          |
| 完成时间: | 2024 年 5 月 5 日 |

## 摘要

作为非线性偏微分方程的一大类，双曲守恒律在生产生活中有着诸多应用，因此对其的正确模拟成至关重要。其中，二维磁流体方程组在工程中使用广泛，但对守恒性的刻画与解符合物理的需求让离散变得困难。相比起基本的有限差分，有限体积方法能够更好刻画守恒性，而从有限体积法出发构造出符合熵条件的数值通量后，与有限元方法结合得到的非连续有限元方法可以精准捕获间断初值形成的激波与稀疏波，是理想的离散方案。将数值通量与离散有限元方法推广到二维后，结合数值积分可以得到一个对二维理想磁流体方程适用的离散算法，不过，它仍然具有数值振荡、物理性质未必保持等问题。引入 TVD 限制器与极值限制器可以有效减少结果的振荡与偏差，进一步对磁场进行散度限制可以保证麦克斯韦方程组不被破坏，此外，引入优化可以进一步增加迭代的效率。

**关键词：**二维理想磁流体方程组；非连续有限元；三角网格

## Abstract

As a large class of nonlinear partial differential equations, hyperbolic conservation laws have many applications in real life, so proper simulation becomes crucial. Among them, the two dimensional magnetohydrodynamic equation system is widely used in engineering, but the need to characterize the conservation and to solve it in accordance with the physics makes the discretization difficult. Compared with the basic finite difference, the finite volume method is able to better characterize the conservation, and after constructing a numerical flux that meets the entropy condition from the finite volume method, the discontinuous Galerkin method obtained by combining it with the finite element method can accurately capture the shocks and rarefaction waves formed by the discontinuous initial values, which is an ideal discretization scheme. After generalizing the numerical flux with the discrete Galerkin method to two dimensions, the combination of numerical integration can yield a discretization algorithm that is applicable to the two-dimensional ideal magnetohydrodynamic equations, but it still has the problems of numerical oscillations and physical properties may not be maintained. The introduction of TVD limiter and extreme value limiter can effectively reduce the oscillations and deviations of the results, and further scattering limitation of the magnetic field can ensure that the system match Maxwell's equations, in addition, the introduction of optimization can further increase the efficiency of the iteration.

**Key Words:** two dimensional MHD equations; Discontinuous Galerkin method; triangular mesh

# 目录

|                       |           |
|-----------------------|-----------|
| <b>第 1 章 前言</b>       | <b>3</b>  |
| 第 1 节 研究背景            | 3         |
| 第 2 节 本文工作            | 3         |
| <b>第 2 章 离散方法选择</b>   | <b>5</b>  |
| 第 1 节 双曲守恒律           | 5         |
| §2.1.1 基本方程           | 5         |
| §2.1.2 弱解与熵解          | 5         |
| 第 2 节 有限差分方法          | 6         |
| §2.2.1 差分近似           | 7         |
| §2.2.2 守恒型差分          | 12        |
| 第 3 节 有限体积方法          | 14        |
| §2.3.1 数值通量           | 14        |
| §2.3.2 Godunov 方法     | 15        |
| §2.3.3 熵修正            | 18        |
| 第 4 节 有限元方法           | 20        |
| §2.4.1 向量的 Godunov 通量 | 20        |
| §2.4.2 非连续有限元         | 22        |
| 第 5 节 本章小结            | 24        |
| <b>第 3 章 二维磁流体方程组</b> | <b>25</b> |
| 第 1 节 二维守恒格式          | 25        |
| §3.1.1 二维线性双曲型方程      | 26        |
| §3.1.2 一般二维守恒律        | 28        |
| 第 2 节 三角网格非连续有限元      | 28        |
| §3.2.1 一维欧拉方程         | 30        |
| §3.2.2 二维欧拉方程         | 32        |
| §3.2.3 二维理想磁流体方程      | 38        |
| 第 3 节 本章小结            | 42        |
| <b>第 4 章 算法改进</b>     | <b>43</b> |
| 第 1 节 限制器             | 43        |
| §4.1.1 TVD 限制器        | 43        |
| §4.1.2 正定性保持          | 46        |
| 第 2 节 符合物理的离散         | 47        |

|                          |           |
|--------------------------|-----------|
| §4.2.1 三角网格限制器 . . . . . | 48        |
| §4.2.2 无散度限制器 . . . . .  | 48        |
| §4.2.3 自适应步长 . . . . .   | 50        |
| 第 3 节 本章小结 . . . . .     | 52        |
| <b>第 5 章 总结与讨论</b>       | <b>53</b> |
| 第 1 节 讨论 . . . . .       | 53        |
| §5.1.1 存在问题 . . . . .    | 53        |
| §5.1.2 优化方向 . . . . .    | 53        |
| 第 2 节 总结 . . . . .       | 53        |

# 第 1 章 前言

## 第 1 节 研究背景

偏微分方程中，流体力学产生的方程组是一个重要的研究方向，对流体的模拟也在工程建设、计算机动画与医学等方面都有诸多应用。从 1942 年 Alfvén 等人提出磁流体描述开始<sup>[2]</sup>，结合了电磁场而产生的磁流体动力学方程就常被用于模拟和研究天体物理学中观测到的现象，其相对论形式更是在局部流速接近真空光速或局部内能密度极大等情况下显示出其必要性。

然而，其数值解法在模拟的稳定性或是对涡流的处理等方面很容易遇到困难，而考虑现实中更复杂的情况后，方程甚至更加难以求解。数值解法构造一般包含三方面的关键问题：收敛性，也即如何让算法在相对宽松的时间步长等情况下更容易收敛；精度，也即如何让算法在固定的采样下得到更接近真实的结果；复杂度，也即如何让算法在更少的计算资源下得到有效的结果。

对理想流体而言，由于不存在粘度项，方程形式会相对简单，并符合能量守恒性质，不过求解仍然是极为困难的。Torrihon 从有限体积出发，给出了局部非发散的守恒迎风格式离散<sup>[13]</sup>，而 Shan 等人则从有限元出发得到了磁流体方程的模拟<sup>[11]</sup>。然而，这些方法往往有着数值耗散、数值振荡的问题，或是对间断情况难以正确模拟。由此，我们一方面需要结合物理理论给出更符合实际的离散方案（如边界处取更密的网格）与迭代模式，另一方面也须从算法层面改进离散的方式。

我们以双曲守恒律组作为研究对象，主要讨论对其离散的各种算法，并最终在磁流体中测试其结果。

## 第 2 节 本文工作

第二章中，我们以一维标量守恒律与一维守恒律组为例子，从基本的有限差分格式出发，进一步引入了从有限体积分析得到的数值通量的概念，并分析了标量守恒律情况下迎风数值通量、LF 数值通量、LW 数值通量的特点，最终结合熵条件得到了可以正确模拟激波与稀疏波的 Godunov 通量。将几种数值通量推广到双曲守恒律组并结合有限元方法后，最终可以得到精准刻画间断性的非连续有限元法。

第三章中，我们将守恒差分与数值通量推广到了二维的情形。在通过有限体积方法分析出了各个数值通量在二维情况的表现后，最终发现修正的 LF 通量是相对最好的选择。以此可以构建出对应的三角网格下非连续有限元算法，通过数值积分估算内部与边界处的积分后，结合对多项式积分的精确计算，即能得到对二维双曲守恒律组的通用离散与迭代流程，并可应用在二维理想磁流体的模拟中。

第四章中，我们进行了对核心算法的改进，先在一维情况分析了 TVB 限制器与极值限制器的原理与降低数值振荡、保极值作用，再将它们推广到二维，成为离散方法的一部分。

此外，引入无散度限制器可以实现局部的无散度化，让解更加符合物理。进一步加入自适应方法以后，迭代速度可以得到加快。

综合上述内容，我们最终完成了一个二维双曲守恒律组的离散算法，并加入可选的降低振荡、保证符合物理的限制器。由于算法在三角网格中进行，可以按需进行网格设置，达到更加精确的效果。

## 第 2 章 离散方法选择

本章中，我们将介绍双曲守恒律的基本问题与弱解、熵解的概念，并考虑其一维情形，构造有限差分方法、有限体积方法与有限元方法进行实验，选择合适的离散算法与对应的数值通量。

### 第 1 节 双曲守恒律

理想磁流体方程是非线性双曲守恒律组的一种，为了研究如何对齐进行离散，我们需要对一般双曲守恒律的离散进行考察。

#### §2.1.1 基本方程

三维空间中一般的双曲守恒律组可以写为如下的形式<sup>[10]</sup>：

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y + h(u)_z = 0$$

这里下标表示求导， $u = u(x, y, z, t)$  是一个  $n$  维向量， $f, g, h$  都是  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的函数。

称其为双曲守恒律是因为两侧对  $x, y, z, t$  在四维矩体中积分可得：

$$\begin{aligned} \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} u(x, y, z, t_2) dx dy dz &= \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} u(x, y, z, t_1) dx dy dz \\ &+ \int_{t_1, y_1, z_1}^{t_2, y_2, z_2} f(x_1, y, z, t) dy dz dt - \int_{t_1, y_1, z_1}^{t_2, y_2, z_2} f(x_2, y, z, t) dy dz dt \\ &+ \int_{t_1, x_1, z_1}^{t_1, x_2, z_2} g(x, y_1, z, t) dx dz dt - \int_{t_1, x_1, z_1}^{t_2, x_2, z_2} g(x, y_2, z, t) dx dz dt \\ &+ \int_{t_1, x_1, y_1}^{t_1, x_2, y_2} h(x, y, z_1, t) dx dy dt - \int_{t_1, x_1, y_1}^{t_2, x_2, y_2} h(x, y, z_2, t) dx dy dt \end{aligned}$$

这称为守恒律组的积分形式，可以刻画流动中的质量守恒性。

此外，记  $f', g', h'$  为  $f, g, h$  对应的 Jacobi 阵，双曲型方程要求对任何  $u$ ，与方向向量  $\vec{n}$ ，存在  $n$  阶可逆方阵  $P$  使得

$$P^{-1}(n_1 f'(u) + n_2 g'(u) + n_3 h'(u))P$$

是对角阵，这也即代表各个分量存在某种可分离性。

#### §2.1.2 弱解与熵解

关于守恒律方程的研究，一个困难之处在于，哪怕对于光滑的初值，其解也可能会产生间断，由此，我们必须通过积分形式定义其解。除了直接考虑满足积分形式的解外，也可以



将原方程两侧同乘某定义在  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$  的紧支光滑函数  $\phi$ ，并对  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$  分部积分消去关于  $u$  导数的项。若积分方程对任何紧支光滑函数均成立，则该解称为弱解。

一个方程可能存在多个弱解，而其中符合物理实际的解称为熵解。熵解的条件可用熵不等式进行刻画，即对任何凸函数  $\eta$  与满足（这里的导数记号仍表示对应的 Jacobi 阵）

$$\psi'(u) = \eta'(u)f'(u), \quad \phi'(u) = \eta'(u)g'(u), \quad \varphi'(u) = \eta'(u)h'(u)$$

的函数  $\psi$ 、 $\phi$ 、 $\varphi$ ，不等式

$$\eta(u)_t + \psi(u)_x + \phi(u)_y + \varphi(u)_z \leq 0$$

的积分形式成立<sup>[10]</sup>。

对于非连续情况，我们希望守恒律的离散方式能收敛到熵解，或至少是弱解，以保持守恒性质，这就给数值离散带来了更大的挑战。下面，我们将先对一维的双曲守恒律与双曲守恒律组进行分析，并对比各离散方法的结果。我们考虑的非线性方程主要有三个：

1. Burgers 方程，即

$$u_t + uu_x = 0,$$

其中  $u$  为标量。

2. 另一形式的 Burgers 方程，即

$$u_t + u^3 u_x = 0,$$

其中  $u$  为标量。

3. 一维浅水波方程，即

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v^2/2 + \varphi \\ v\varphi \end{pmatrix}_x = 0.$$

这里的浅水波方程即为一维理想流体演化过程的一种近似，而第二章中没有并没有对于一维理想磁流体的测试，是因为其情况过于复杂，不适合进行离散方法的比对，当确定离散方法后方才进行理想磁流体的测试，详见第三章。对非连续情况，我们主要考虑 Riemman 问题，即初值某点左侧为  $u_l$ ，右侧为  $u_r$ ，且  $u_l \neq u_r$  的情况。由于实际离散区域有限，我们假设模拟时间较短，间断尚未传播到边界，于是左边界处固定为  $u_l$ ，右边界处固定为  $u_r$ 。

## 第 2 节 有限差分方法

最常见的偏微分方程数值求解方法是有限差分法，也即将导数离散为差分。以一维为例，我们令  $u$  在网格点  $(j\Delta x, n\Delta t)$  处的数值近似结果为  $u_j^n$ ，并约定以下记号：

1.  $\mathbb{I}$  代表恒等算子；

2.  $\mathbb{E}$  代表正向移位算子,  $\mathbb{E}f_j = f_{j+1}$ , 其复合代表多次进行。
3.  $\mathbb{E}^{-1}$  为反向移位算子, 即  $\mathbb{E}^{-1}f_j = f_{j-1}$ 。
4. 一阶向前差分算子  $\Delta = \mathbb{E} - \mathbb{I}$ ;
5. 一阶向后差分算子  $\Delta_- = \mathbb{I} - \mathbb{E}^{-1}$ ;
6. 一步中心差分算子  $\Delta_0 = \mathbb{E} - \mathbb{E}^{-1}$ ;
7. 半步中心差分算子  $\delta = \mathbb{E}^{1/2} - \mathbb{E}^{-1/2}$ ;
8. 二阶中心差分算子  $\delta^2 = \mathbb{E} - 2\mathbb{I} + \mathbb{E}^{-1}$ 。

当涉及的变量不同时, 以下标标注, 如一维可存在  $\delta_x^2$  与  $\delta_t^2$  表示  $x$ 、 $t$  方向的差分。

为了刻画差分格式的效果, 我们需要引入相容性与稳定性的定义。如无特殊说明, 下方的相容性指局部相容性, 即真解代入差分方程后所产生的误差阶, 而  $(m_1, m_2)$  阶相容即指其对  $x$  有  $m_1$  阶误差, 对  $t$  有  $m_2$  阶误差; 而稳定性指初值稳定性, 即对应齐次微分方程在给定初值  $u^0$  与离散范数  $\|\cdot\|$  后, 当  $\Delta x, \Delta t$  充分小时存在与  $\Delta x, \Delta t$  无关的  $K$  使得

$$\|u^n\| \leq K\|u^0\|, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{T}{\Delta t}.$$

对于一维方程组的情况,  $u$  变为向量, 上方的所有操作与定义仍然可以类似进行, 差分算子视为对每个分量进行, 并记

$$f(u_j^n) = f_j^n, \quad A_j^n = f'(u_j^n), \quad \nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

### §2.2.1 差分近似

考虑最简单的一阶非线性双曲守恒律, 这时  $A_j^n$  为标量  $a_j^n$ , 考虑三种常用的显式差分方法<sup>[1]</sup>:

1. 在离散焦点进行简单系数冻结的迎风格式:

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \nu a_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n) & a_j^n \geq 0 \\ u_j^n - \nu a_j^n (u_{j+1}^n - u_j^n) & a_j^n < 0 \end{cases}.$$

2. 利用算术平均虚化离散焦点的 LF 格式:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{1}{2}\nu a_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

3. 对时间 Taylor 展开后转换为空间导数可得 LW 格式, 当  $f$  充分光滑时, 记  $b_j^n = a_j^n a'(u_j^n)$ , 则有

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu a_j^n \Delta_{0x} u_j^n + \frac{1}{2}(\nu a_j^n)^2 \delta_x^2 u_j^n + \frac{1}{4}\nu^2 b_j^n (\Delta_{0x} u_j^n)^2.$$

计算可以得到，迎风格式具有无条件 (1,1) 阶局部截断误差，LW 格式有无条件 (2,2) 阶局部截断误差，而若网比固定，LF 格式也具有整体一阶的截断误差。此外，通过 CFL 条件<sup>[6]</sup> 判断可知三者模糊的稳定性条件均为

$$\max_{j,n} |a_j^n| \nu \leq 1.$$

根据离散最大模原理可以证明，上述条件成立时迎风格式与 LF 格式均最大模稳定，而 LW 格式只能保证  $L^2$  模稳定性。下面由以下两个算例对它们进行一些数值实验以观察在守恒型方程上的效果：

**算例 1.** 考虑最简单的线性方程组  $u_t + u_x = 0$ ，并考虑周期边界条件

$$x \in [0, \pi], u(0, t) = u(2\pi, t).$$

给定周期初值后，其真解应为  $u(x, t) = u_0(x - t)$ ，考虑初值光滑情况

$$u_0(x) = \sin x.$$

**算例 2.** 方程与边界条件同算例 1，但考虑间断初值

$$u_0(x) = \left\lceil \frac{\sin x}{2} \right\rceil.$$

对算例 1，给定  $\Delta x$  与  $\Delta t$  后，在不同时刻数值实验的结果如图 1。

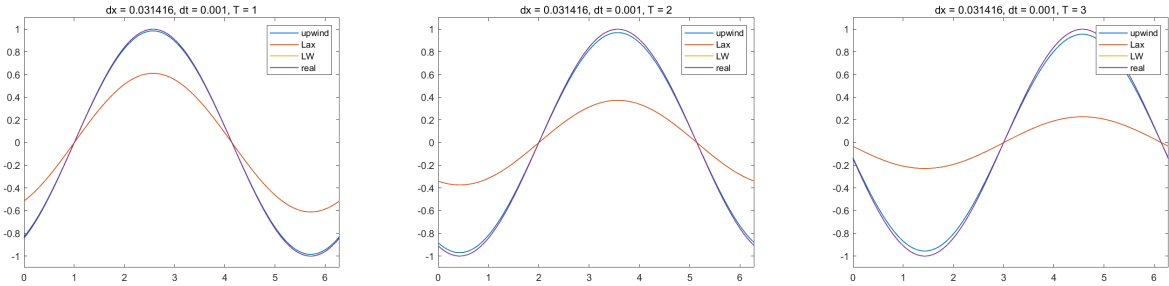


图 1: 算例 1 不同有限差分结果

其不同迭代步数的无穷范数误差对数如图 2。

从图中可以看出，就算例 1 而言，二阶的 LW 格式收敛情况远好于其他方法。此外，LF 格式的数值耗散现象非常严重，这可以通过色散分析解释：上述方程迎风格式可以改写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2},$$

而 LF 格式则为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

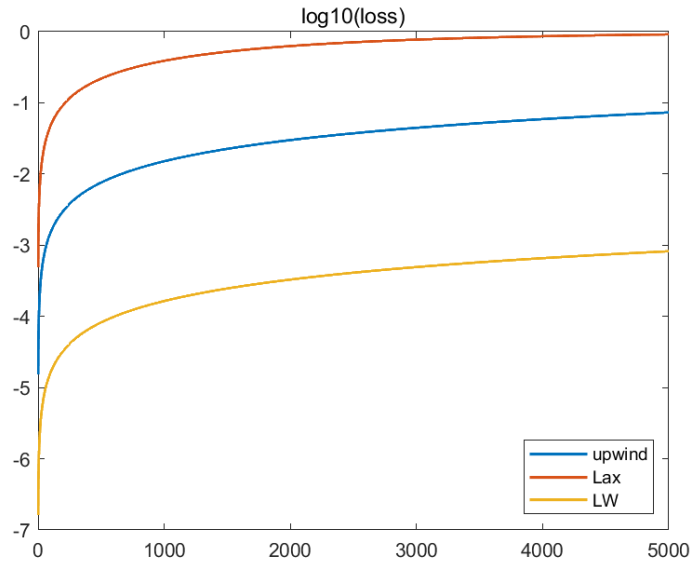


图 2: 算例 1 误差对数趋势

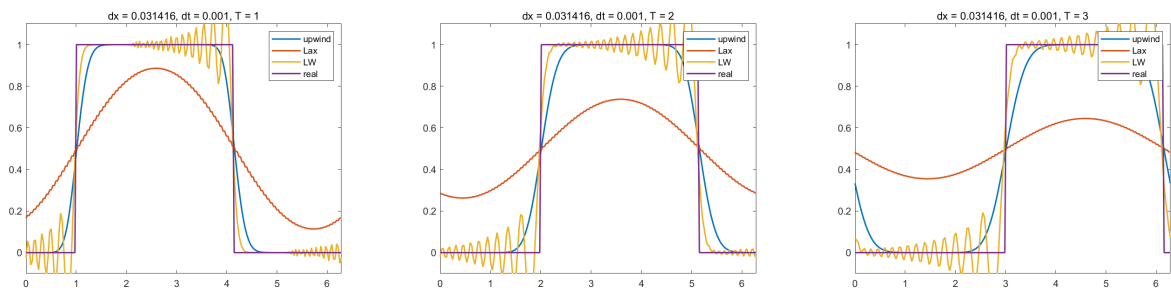


图 3: 算例 2 不同有限差分结果

两者有差别的项称为数值黏性系数，可以刻画数值耗散的程度。在上方例子  $\Delta x = \frac{\pi}{100}$ 、 $\Delta t = 0.001$  时，LF 格式的数值黏性系数是迎风格式的三十余倍，于是产生了严重的耗散。

而对算例 2，不同时刻数值实验的结果如图 3。

其不同迭代步数的无穷范数误差对数如图 4。

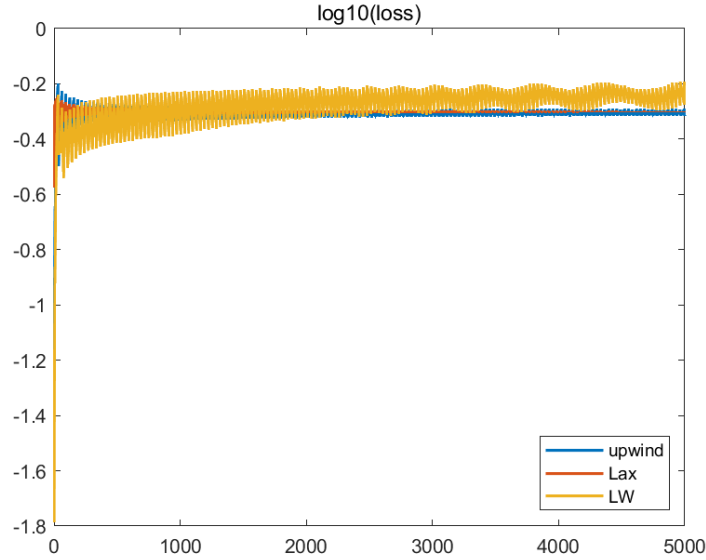


图 4: 算例 2 误差对数趋势

可以发现，间断情况下，LF 格式的耗散虽然导致间断处逐渐被抹平，但也同样使得函数更加稳定。反之，LW 格式数值耗散最小，但数值色散严重，尤其是对间断函数，其 Fourier 变换后的高频成分多，导致数值解出现了严重的振荡。两者折中的迎风格式也具有相对折中的效果，保留了一定的间断特性，且并没有出现严重色散。

但是，在对非线性情况进行运算时，三种方法都表现出了一些问题：

**算例 3.** 考虑对 Burgers 方程的 Riemman 问题，给定初值  $x < 0$  时 1、 $x \geq 0$  时 0，真解应为向右以速度  $\frac{1}{2}$  传播的激波。

差分结果如图 5。可以发现，初值特性导致迎风格的传播速度为 0，即恒不变，无法正确模拟激波的传播。类似地，LW 格式在数值振荡之外，也无法得到正确的推进速度，通过直接观察格式可以发现，在  $u_j^n = 0$  的点必然满足  $a_j^n = b_j^n = 0$ ，于是  $u_j^{n+1} = 0$ ，不可能获得正确的传播速度。相比之下，LF 格式的确可以找到正确的推进速度，但因为严重的数值耗散，间断界面被直接抹平，也难以刻画真实的激波。三种方法的误差如图 6，由于迎风格式与 LW 格式无法刻画推进，事实上只有 LF 格式的误差存在意义。

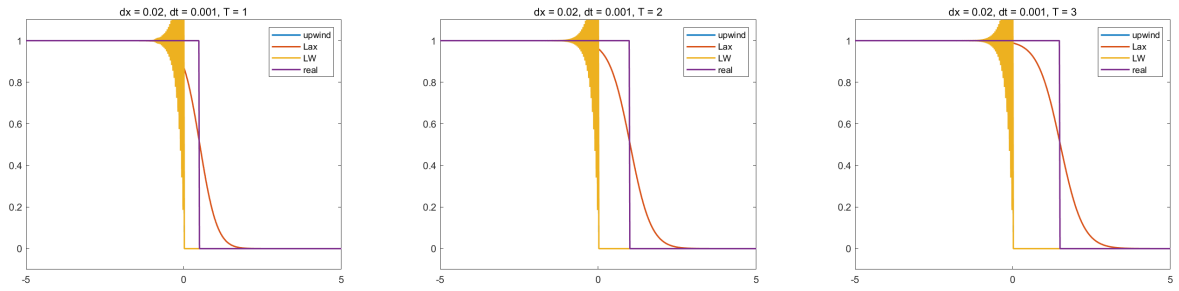


图 5: 算例 3 不同有限差分结果

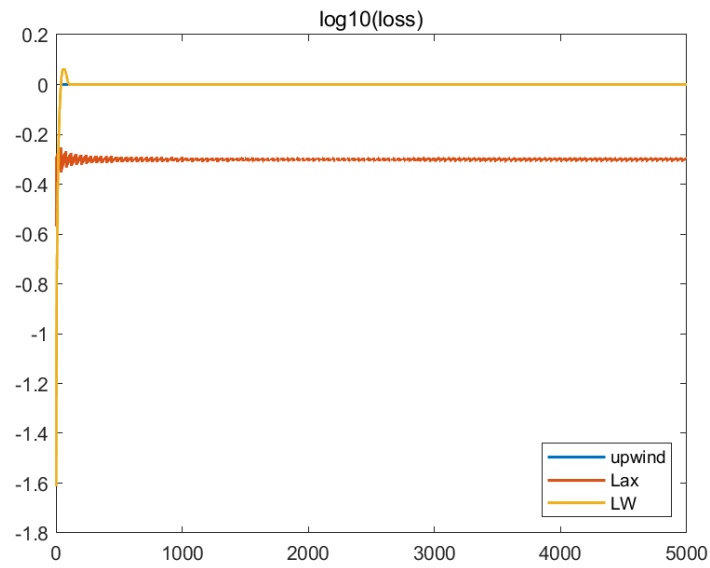


图 6: 算例 3 误差对数趋势

### §2.2.2 守恒型差分

为了正确模拟非线性守恒律的情况，我们试着从守恒型方程的形式出发直接构造差分。具体来说为：

1. 将  $f$  作为整体冻结可写出迎风格式

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \nu(f_j^n - f_{j-1}^n) & a_j^n \geq 0 \\ u_j^n - \nu(f_{j+1}^n - f_j^n) & a_j^n < 0 \end{cases}$$

2. 同样将  $f$  看作整体得到 LF 格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{1}{2}\nu(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)$$

3. 利用积分插值的思路可构造 LW 格式，记  $a_{j+1/2}^n = f'(u_{j+1/2}^n) = f'(\frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2})$ ，则

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(a_{j+1/2}^n(f_{j+1}^n - f_j^n) - a_{j-1/2}^n(f_j^n - f_{j-1}^n))$$

直接计算可以得到，上方三个格式对线性情况的迭代与非守恒形式完全一致，但理论来说，从守恒方程出发得到的格式应能更好刻画非线性双曲守恒律的演化过程。值得一提的是，对于激波，由于非连续情况间断界面只要存在捕获位置的差别，就会导致无穷范数误差为  $|l - r|$ ，二范数可以更好刻画真实误差。

仍对算例 3 进行离散，效果如图 7。可以看出，从守恒型方程出发的离散的确都正确刻画了激波的传播速度。

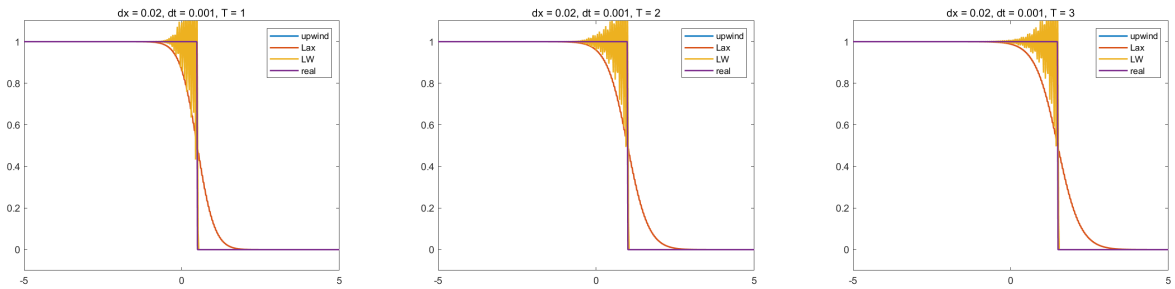


图 7: 算例 3 守恒型有限差分结果

其不同迭代步数的二范数误差对数如图 8。

图中可以看出，总体效果最好的是迎风格式，其不但正确描述了间断界面的位置，也保留了大部分的间断特性。与之相对，LF 格式的耗散过于严重，而 LW 格式则振荡过于剧烈。除了激波以外，Burgers 方程中还可能出现稀疏波，考虑如下算例：

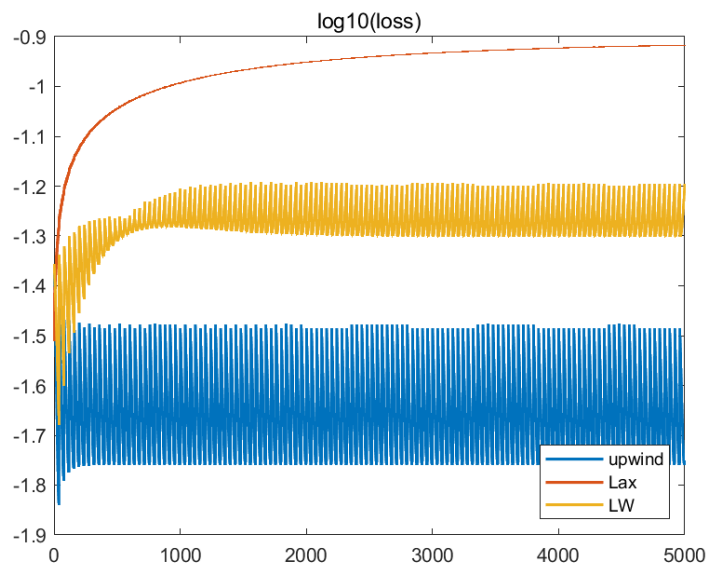


图 8: 算例 3 守恒型差分误差对数趋势

算例 4. 令 Burgers 方程初值为  $x < 0$  时  $-0.5$ 、 $x \geq 0$  时  $0.5$ ，真解为

$$u(x, t) = \begin{cases} -0.5 & x < -0.5t \\ \frac{x}{t} & x \in [-0.5t, 0.5t] \\ 0.5 & x > 0.5t \end{cases}.$$

此时离散效果如图 9，可以看出，数值耗散最高的 LF 格式此时表现出了相对稳定的性态，即使在稀疏波的情况也捕获了正确的变化范围，但迎风格式与 LW 格式都仍然出现了激波，没有正确刻画。相对来说，LW 格式的振荡仍然更加严重。不过，无论是哪种方法，都没有真正刻画出稀疏波的一阶间断结构（即函数连续但导函数间断）。

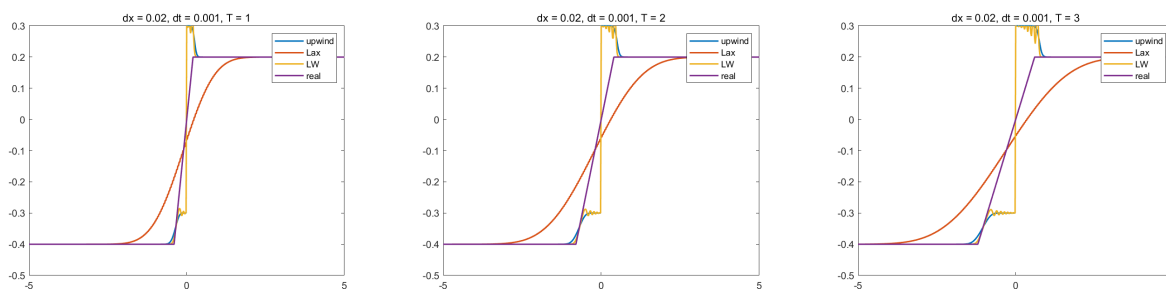


图 9: 算例 4 守恒型有限差分结果

其不同迭代步数的二范数误差对数如图 10。

这时，LF 格式因为稳定性，逐渐显示出了更好的结果，但其事实上仍然具有很大的误差。



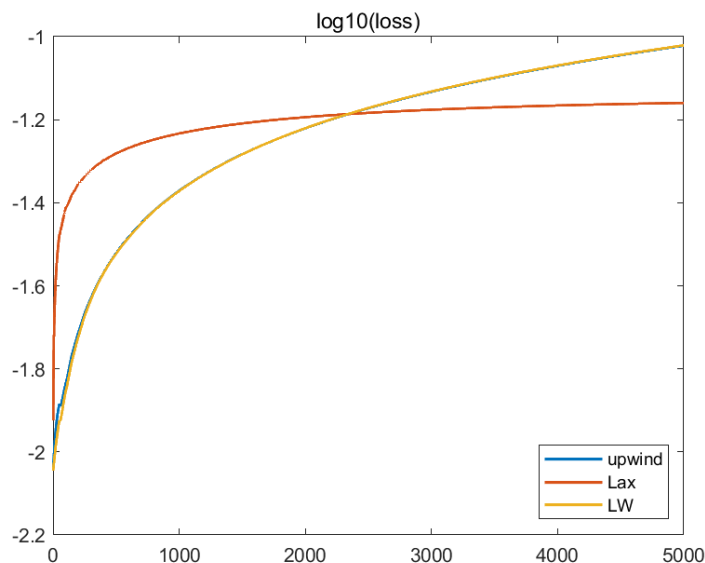


图 10: 算例 4 守恒型差分误差对数趋势

### 第 3 节 有限体积方法

为了探究更好的离散方法，我们需要先从理论上解释为何基于守恒形式方程得到的差分格式可以更好刻画间断初值时的解。注意到，间断初值时的弱解需要用积分定义，因此再考虑  $u_j^n$  作为点值的离散并不能精确刻画出性质，因此需要引入新的定义。

考虑新的剖分方式：先将空间区域进行单元剖分， $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ ，记  $\Delta x_j$  为  $I_j$  长度，其最大值  $\Delta x$  为剖分的参数。

将时间离散为有限个点， $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$  为局部时间步长，其最大值  $\Delta t$  为时间步长。

有限体积法数值求解的目标定义为

$$[\bar{u}]_j^n = [\bar{u}]_j(t^n) = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx,$$

即真解在不同单元的均值<sup>[9]</sup>。

#### §2.3.1 数值通量

利用 Green 公式对矩形时空区域积分可得，记  $F_{j+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt$ ，则有精确等式

$$[\bar{u}]_j^{n+1} = [\bar{u}]_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n),$$

这里  $F$  为真实平均通量，若有数值通量函数  $\hat{f}([\bar{u}]_{j-l-1}^n, \dots, [\bar{u}]_{j+r}^n)$  近似为  $F_{j+1/2}^n$ ，将其记为  $\hat{f}_{j+1/2}^n$  即有递推

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n).$$

对一维，不妨考虑  $\Delta x, \Delta t$  恒定的情况，这时递推即为

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \nu(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n).$$

事实上，数值通量函数  $\hat{f}(u_{j-l+1}^n, u_{j-l+2}^n, \dots, u_{j+r}^n)$  要求对于每个分量 Lipschitz 连续，且有相容性条件  $\hat{f}(p, p, \dots, p) = f(p)$ ，前者用于控制舍入误差，后者保证相容性。能写成上述形式的格式称为守恒格式，以下讨论中，将  $\bar{u}$  仍记为  $u$ ，并取有限体积理解。

利用数值通量的定义可以得到守恒格式满足的局部守恒性质：

$$\sum_{j=p}^q u_j^{n+1} = \sum_{j=p}^q u_j^n - \nu(\hat{f}_{q+1/2}^n - \hat{f}_{p-1/2}^n),$$

这即对应双曲守恒律的积分形式。

记 LF 数值通量为

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{1}{2\nu}(u_{j+1}^n - u_j^n),$$

LW 数值通量为

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{\nu}{2}a_{j+1/2}^n(f_{j+1}^n - f_j^n).$$

验证数值通量函数的条件即知二者均为合理的构造，以它们构造出的守恒格式恰好符合之前基于守恒形式方程得到的 LF 格式与 LW 格式，因此，之前的两种格式都可以作有限体积理解。

不过，两格式的数值通量也具有不同的性质，当 CFL 条件成立时，LF 数值通量对第一个变元不减，对第二个变元不增，称为熵数值通量，LW 格式则无此性质。可以证明，当数值通量是熵数值通量时，对应的数值解若收敛则收敛到熵解，这也解释了为何 LF 格式对激波与稀疏波都能有一定的刻画。与它们相对，直接通过守恒形式构造出的迎风格式并不能写成守恒格式，需要进行进一步的调整，这也是 Godunov 方法的来源。

## §2.3.2 Godunov 方法

Godunov 方法中，若  $u_j^n$  已知，计算  $u_j^{n+1}$  可以分为两步（这称为 EA 过程）：

1. 局部推进：在  $x_{j+1/2}$  处构造局部 Riemman 问题，初值为

$$u(x, t^n) = \begin{cases} u_j^n & x < x_{j+1/2} \\ u_{j+1}^n & x > x_{j+1/2} \end{cases},$$

其真解可能是古典解、激波、接触间断或稀疏波等，当  $u_{j+1}^n \neq u_j^n$  时记  $s_{j+1/2}^n = \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}$  表示（可能存在的）激波速度，若时间步长满足  $\max_j \{|s_{j+1/2}^n|, |f'(u_j^n)|\} \nu \leq \frac{1}{2}$ ，相邻的局部 Riemann 解在  $t^{n+1}$  前不会冲突，于是可拼接成整体函数，记为  $\tilde{u}(x, t^{n+1})$ 。

## 2. 单元平均：定义

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^{n+1}) dx,$$

由于其的逼近效果，计算可得这样得到的局部截断误差为整体一阶。

以线性情况  $f(u) = au$  为例，解得局部

$$\tilde{u}(x, t^{n+1}) = \begin{cases} u_j^n & x < x_{j+1/2} + a\Delta t \\ u_{j+1}^n & x > x_{j+1/2} + a\Delta t \end{cases}.$$

不妨设  $a > 0$ ，积分即有（按上方推导，这里时间步长应满足  $\nu a \leq \frac{1}{2}$ ）

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n \nu a + (1 - \nu a) u_j^n,$$

这事实上就是线性双曲方程的迎风格式。此外，数值通量  $au_j^n$  恰为局部 Riemman 解  $\tilde{u}$  在  $x_{j+1/2}$  的通量取值  $f(\tilde{u}(x_{j+1/2}, t^{n+1}))$ 。因此，直接使用的 Godunov 方法可以看作迎风格式的推广。

关于数值通量的结论事实上普遍成立，因其实现过程等同于双曲守恒律在  $I_j \times (t^n, t^{n+1})$  的积分，即其满足

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n), \quad \hat{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\tilde{u}(x_{j+1/2}, t)) dt.$$

另一方面，根据 PDE 知识， $\tilde{u}$  可表示为  $\mathcal{R}(\frac{x-x_{j+1/2}}{t-t^n}; u_j^n, u_{j+1}^n)$ ，这里  $\mathcal{R}$  称为局部 Riemman 解算子，于是  $f(\tilde{u}(x_{j+1/2}, t))$  在积分区域恒定，即有

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = f(\mathcal{R}(0; u_j^n, u_{j+1}^n)).$$

于是，数值通量构造方式的核心工作为局部 Riemman 解的计算。对一般的非线性双曲守恒律，其往往难以准确计算，可以将其局部近似为线性双曲型方程  $u_t + a_{j+1/2}^n u_x = 0$ 。类似线性情况的计算知这样得到的数值通量为

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = \begin{cases} f_j^n & a_{j+1/2}^n \geq 0 \\ f_{j+1}^n & a_{j+1/2}^n < 0 \end{cases},$$

对应的守恒格式即为真正的守恒型迎风格式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2} ((1 - \text{sgn } a_{j+1/2}^n) \Delta_x f_j^n + (1 + \text{sgn } a_{j-1/2}^n) \Delta_{-x} f_j^n),$$

其中  $\text{sgn}$  代表符号函数。

更有效的局部线性化方式为定义系数  $a_{j+1/2}^n$  为单元界面的 Roe 平均值

$$a_{j+1/2}^n = \begin{cases} \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} & u_{j+1}^n \neq u_j^n \\ f'(u_j^n) & u_{j+1}^n = u_j^n \end{cases},$$

其满足离散版本 RH 跳跃条件

$$a_{j+1/2}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) = f_{j+1}^n - f_j^n,$$

因此可以更准确刻画激波条件，这样得到的迎风格式称为 **Roe** 型迎风格式。

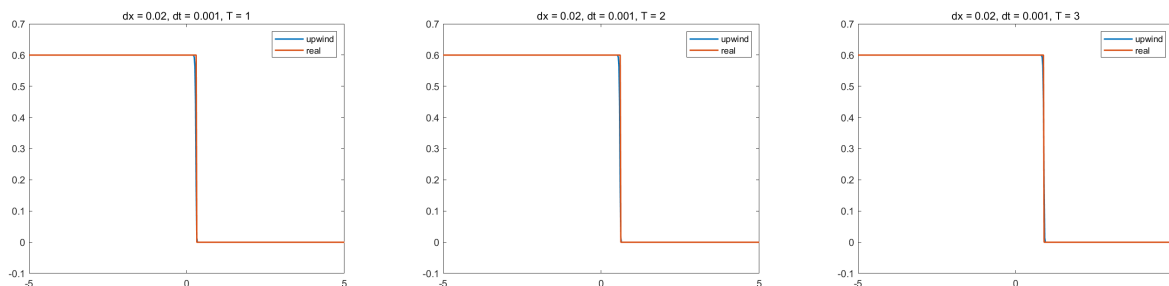


图 11: Roe 迎风格式模拟算例 3

Roe 迎风格式对算例 3 中 Burgers 方程的激波效果如图 11。事实上，计算可以发现 Burgers 方程的守恒迎风与 Roe 迎风格式完全一致，对更一般的情况，其在真解光滑时与守恒型迎风格式差异为二阶，但间断真解时效果更好。

对于稀疏波，Roe 迎风格式的效果如图 12。虽然在  $x > 0$  的部分对激波有了更准确的捕获，但  $x = 0$  处仍然呈现的激波的性质，这样的 Roe 迎风格式最终得到的解是弱解而非熵解。准确来说，这是由于我们进行局部近似求解时直接进行了线性化，但线性问题只会出现激波，不会出现稀疏波，因此需要额外的修正。

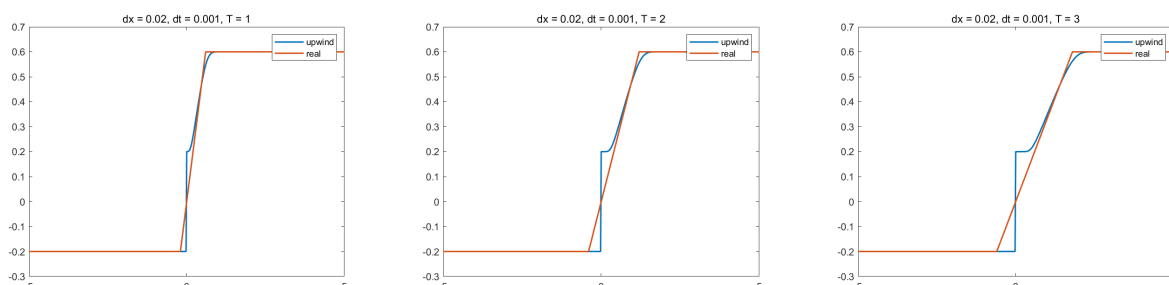


图 12: Roe 迎风格式模拟算例 4

考虑另一个算例：

**算例 5.** 偏微分方程为  $u_t + u^3 u_x = 0$ ，对 Riemann 问题，当其左侧  $u_l$ ，右侧  $u_r$ ， $u_l < u_r$  时真解为

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x < u_l^3 t \\ \sqrt[3]{\frac{x}{t}} & x \in [u_l^3 t, u_r^3 t] \\ u_r & x > u_r^3 t \end{cases}.$$

取定  $u_l = -0.7$ ， $u_r = 0.5$ 。

Roe 迎风格式对其的离散效果如图 13。

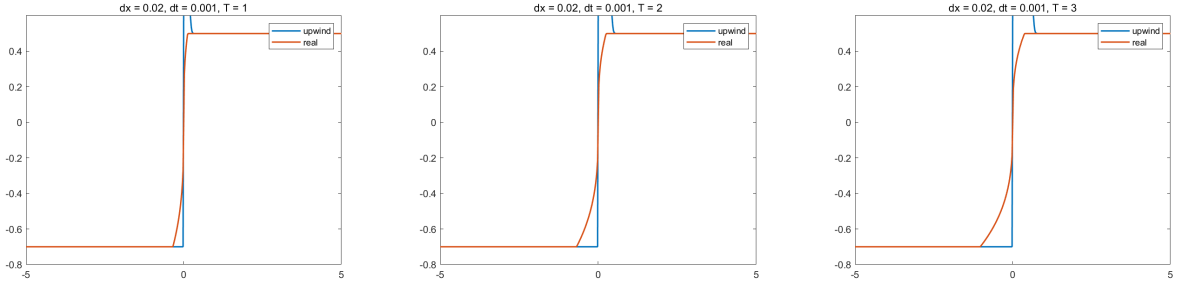


图 13: Roe 迎风格式模拟算例 5

可以发现，间断处 Roe 迎风格式仍然会因为突变导致无法正确刻画结果。

### §2.3.3 熵修正

为了正确刻画稀疏波，我们需要回到局部 Riemman 解算子  $\mathcal{R}(u_l, u_r)$  的估计，由于其事实上是原方程在  $t^n$  时刻  $x_{j+1/2}$  左侧  $u_l$ 、 $x_{j+1/2}$  右侧为  $u_r$  的 Riemman 问题在  $x_{j+1/2}, t > t^n$  处的解，假设  $f$  是凸函数（或至少在  $u_l, u_r$  间是凸的），标量情况可根据熵条件直接利用特征线计算出熵解，当  $u_l < u_r$  时为

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x - x_{j+1/2} < s(t - t^n) \\ u_r & x - x_{j+1/2} \geq s(t - t^n) \end{cases}, \quad s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r},$$

当  $u_l > u_r$  时为

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x - x_{j+1/2} < f'(u_l)(t - t^n) \\ u_r & x - x_{j+1/2} > f'(u_r)(t - t^n), \quad f'(v(\xi)) = \xi. \\ v(x/t) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此计算发现两种情况可以合并为

$$\mathcal{R}(u_l, u_r) = \begin{cases} u_l & f'(u_l), f'(u_r) \geq 0 \\ u_r & f'(u_l), f'(u_r) \leq 0 \\ u_l & f'(u_l) > 0 > f'(u_r), s > 0 \\ u_r & f'(u_l) > 0 > f'(u_r), s < 0 \\ u_s & f'(u_l) < 0 < f'(u_r) \end{cases}$$

这里  $u_s$  满足  $f'(u_s) = 0$ ，称为声波点，由于假设了  $f$  为凸函数， $u_l$  与  $u_r$  间这样的点唯一。

利用  $f$  的凸性，计算发现这五种情况可以最终统一为两种情况，即：

$$f(\mathcal{R}(u_l, u_r)) = \begin{cases} \min_{[u_l, u_r]} f(u) & u_l \leq u_r \\ \max_{[u_r, u_l]} f(u) & u_l > u_r \end{cases},$$

由此得到的数值通量

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = f(\mathcal{R}(u_j^n, u_{j+1}^n))$$

称为 Godunov 数值通量，或称为熵修正的迎风数值通量。其比起简单的迎风数值通量增添了  $f(u_s)$  的可能，此项即稀疏波的来源。根据之前的定义，可发现 Godunov 数值通量是一种熵数值通量。

对 Burgers 方程，其真实通量  $\frac{u^2}{2}$  为凸函数，符合格式要求，且  $u_s = 0$ ，由此可得到对应的 Godunov 格式，其对激波、稀疏波的离散效果如图 14、图 15。可以看出，两种情况下 Godunov 格式都进行了正确的刻画，效果远好于之前未经熵修正的格式，足以说明其有效性。

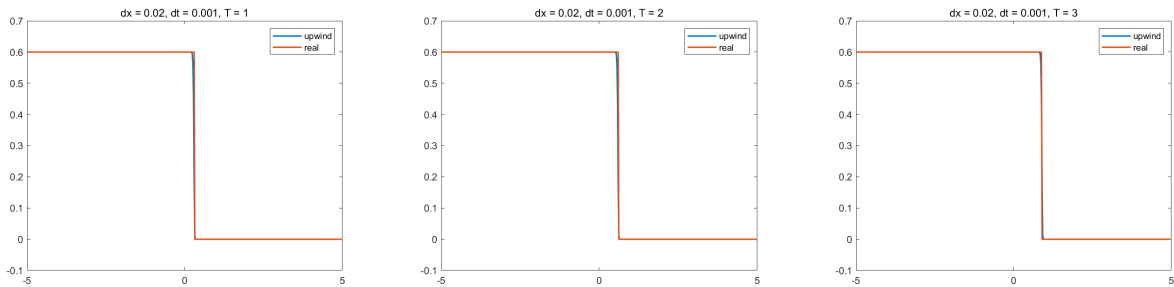


图 14: Godunov 格式模拟算例 3

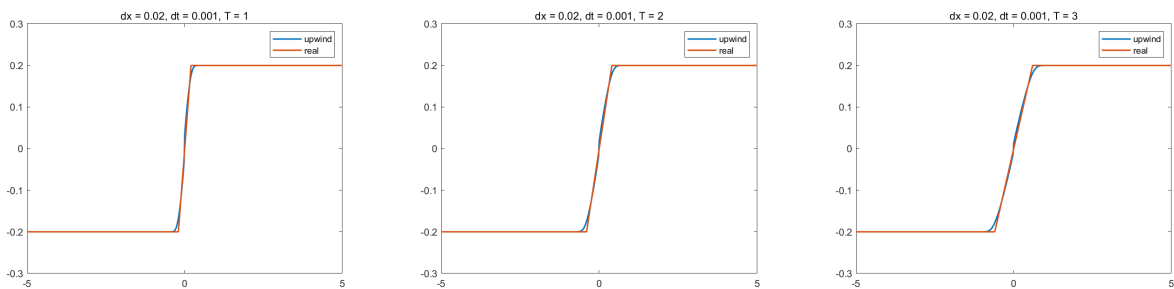


图 15: Godunov 格式模拟算例 4

两种情况下的二范数误差对数如图 16，由于界面捕获存在一定的前后偏移，激波情况的误差会有较大的波动，而稀疏波则相对稳定地减小。不过，可以发现，其在稀疏波时的过渡区域仍然相对光滑，这意味着它通过数值耗散保证了对稀疏波的正确刻画。

至此，我们似乎得到了双曲守恒律的一个理想的有限体积方法，但它仍然存在一些问题。除了过渡区域光滑以外，其阶数不易提升、且对向量情况难以计算，因此我们必须寻求更好的解决策略。

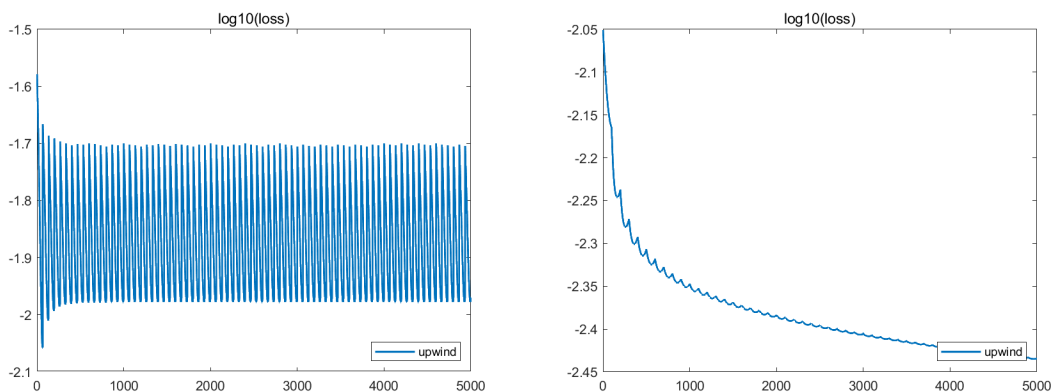


图 16: Godunov 格式对算例 3、算例 4 的误差对数趋势

## 第 4 节 有限元方法

有限元方法的基本思路为，将  $u$  在  $t^n$  时的每个区域  $[x_j, x_{j+1}]$  上的值近似为某有限维函数空间  $V$  中的元素（如  $k$  次以下的多项式），并通过增添空间的维数来达成更高阶的近似。不过，在引入有限元方法前，我们需要先考察向量情况的 Godunov 格式。

### §2.4.1 向量的 Godunov 通量

与 LF 格式、LW 格式在将标量  $a$  替换为矩阵  $A$  后直接能得到向量时对应的格式不同，想将 Godunov 通量推广到向量的情况，需要对更复杂的 Riemman 问题进行计算。一个常见的方法是利用 Roe 矩阵<sup>[10]</sup>，下面以浅水波方程为例进行计算。

先构造对应的 Roe 矩阵  $\hat{A}(u_l, u_r)$ ，由定义其需满足

$$\hat{A}(u_l, u_r) \begin{pmatrix} v_l - v_r \\ \varphi_l - \varphi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_l^2/2 + \varphi_l - v_r^2/2 - \varphi_r \\ v_l \varphi_l - v_r \varphi_r \end{pmatrix},$$

记  $\bar{u} = \frac{u_l + u_r}{2}$ ，直接计算可知

$$\hat{A}(u_l, u_r) = \begin{pmatrix} (v_l + v_r)/2 & 1 \\ (\varphi_l + \varphi_r)/2 & (v_l + v_r)/2 \end{pmatrix} = f'(\bar{u}).$$

由浅水波方程物理意义， $\varphi$  为正，注意到  $f'(u)$  的特征值  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\varphi} + v$ ，特征向量为

$$r_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm\varphi^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

则可记  $\hat{r}_{1,2}$  与  $\hat{\lambda}_{1,2}$  为把其中的  $v, \varphi$  替换为  $\bar{v}, \bar{\varphi}$  的结果。

根据估计 Riemman 算子的算法，先将  $u_r - u_l$  在  $\hat{r}_{1,2}$  上作分解

$$\begin{pmatrix} v_r - v_l \\ \varphi_r - \varphi_l \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \bar{\varphi}^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -\bar{\varphi}^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

可解得

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_l + \bar{\varphi}^{1/2}(v_r - v_l)), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_l - \bar{\varphi}^{1/2}(v_r - v_l)).$$

记  $f'(u_l)$  特征值为  $\lambda_{1l,2l}$ ,  $f'(u_r)$  为  $\lambda_{1r,2r}$ , 上标减表示和 0 取 min, 上标加表示和 0 取 max, 记

$$\hat{\lambda}_{pl} = \lambda_{pl}^- \frac{\lambda_{pr}^+ - \hat{\lambda}_p}{\lambda_{pr}^+ - \lambda_{pl}^-},$$

最终将数值通量取为

$$\hat{f}^{God}(u_l, u_r) = f(u_l) + \hat{\lambda}_{1l}\alpha_1\hat{r}_1 + \hat{\lambda}_{2l}\alpha_2\hat{r}_2.$$

考虑如下算例:

**算例 6.** 对浅水波方程研究 Riemman 问题, 初始  $v = 0$ , 而  $x < 0$  处  $\varphi = 0.1$ ,  $x > 0$  处  $\varphi = 0.3$ .

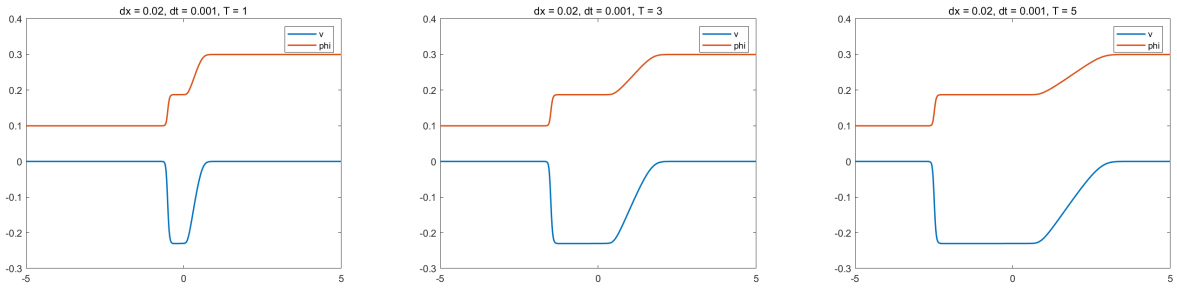


图 17: Godunov 格式模拟算例 6

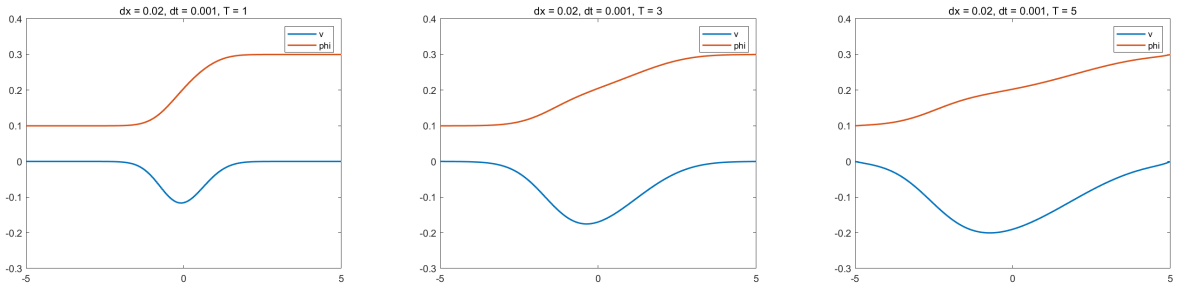


图 18: LF 格式模拟算例 6

以此通量构造 Godunov 格式的离散效果如图 17。与之相对的是直接使用 LF 格式的结果, 如图 18, 两者对比可以发现, 比起几乎全部被数值耗散的 LF 格式, Godunov 格式清楚描述了解中的激波与稀疏波结构。不过, Godunov 格式在这个例子中也表现出了明显的缺点, 例如数值通量形式复杂引起的计算开销过大, 以及稀疏波、激波的边界仍然过于光滑, 这都是需要解决的问题。

尽管如此, LF 通量与 Godunov 通量仍然表现出了各自的良好性质, 如果有更好利用数值通量的方法, 理论来说可以进行更好的模拟, 非连续有限元法即可做到这点, 下面仍然以浅水波方程为例进行推导。



## §2.4.2 非连续有限元

记  $h = \Delta x, s = \Delta t$ , 在任何一个区间  $[(i-1)h, ih]$  上, 利用分部积分, 可知在任何时刻  $t$ , 浅水波方程的任何弱解必然满足

$$\int_{(i-1)h}^{ih} v_t w_1 dx - \int_{(i-1)h}^{ih} (v^2/2 + \varphi) w_{1x} dx + \hat{f}_{1,i+1/2} w_1(x_{i+1/2}^-) - \hat{f}_{1,i-1/2} w_1(x_{i-1/2}^+) = 0$$

$$\int_{(i-1)h}^{ih} \varphi_t w_2 dx - \int_{(i-1)h}^{ih} (v\varphi) w_{2x} dx + \hat{f}_{2,i+1/2} w_2(x_{i+1/2}^-) - \hat{f}_{2,i-1/2} w_2(x_{i-1/2}^+) = 0$$

对任何在区间上连续的  $w_1, w_2$  成立, 这里  $\hat{f}_{d,i+1/2} = f(\mathcal{R}(u_{i+1/2}^-, u_{i+1/2}^+))_d$ , 上标  $-$  表示左极限,  $+$  表示右极限。实际上, 可取  $\hat{f}$  为某特定的数值通量进行估算。

不妨考虑  $v, w_d, \varphi$  在每个区间中均处在线性函数空间中, 于是每个区间上的值可被左右端点确定。记

$$V_{2k-1}^n = v(x_{k-1/2}^+, t^n), V_{2k}^n = v(x_{k+1/2}^-, t^n),$$

$w_d, \varphi$  同理记为  $W_d, \Phi$ , 由于  $W_{d,k}^n$  取任何值时等式都成立, 其前的系数必然为 0, 由此可直接计算出方程组

$$\begin{aligned} \frac{h}{3} \frac{V_{2k-1}^{n+1} - V_{2k-1}^n}{s} + \frac{h}{6} \frac{V_{2k}^{n+1} - V_{2k}^n}{s} + \frac{1}{6} ((V_{2k-1}^n)^2 + (V_{2k}^n)^2 + V_{2k-1}^n V_{2k}^n) \\ + \frac{1}{2} (\Phi_{2k-1}^n + \Phi_{2k}^n) - \hat{f}_{1,k-1/2} = 0 \\ \frac{h}{6} \frac{V_{2k-1}^{n+1} - V_{2k-1}^n}{s} + \frac{h}{3} \frac{V_{2k}^{n+1} - V_{2k}^n}{s} - \frac{1}{6} ((V_{2k-1}^n)^2 + (V_{2k}^n)^2 + V_{2k-1}^n V_{2k}^n) \\ - \frac{1}{2} (\Phi_{2k-1}^n + \Phi_{2k}^n) + \hat{f}_{1,k+1/2} = 0 \\ \frac{h}{3} \frac{\Phi_{2k-1}^{n+1} - \Phi_{2k-1}^n}{s} + \frac{h}{6} \frac{\Phi_{2k}^{n+1} - \Phi_{2k}^n}{s} + \frac{1}{3} \Phi_{2k-1}^n V_{2k-1}^n + \frac{1}{3} \Phi_{2k}^n V_{2k}^n + \frac{1}{6} \Phi_{2k-1}^n V_{2k}^n \\ + \frac{1}{6} \Phi_{2k}^n V_{2k-1}^n - \hat{f}_{2,k-1/2} = 0 \\ \frac{h}{6} \frac{\Phi_{2k-1}^{n+1} - \Phi_{2k-1}^n}{s} + \frac{h}{3} \frac{\Phi_{2k}^{n+1} - \Phi_{2k}^n}{s} - \frac{1}{3} \Phi_{2k-1}^n V_{2k-1}^n - \frac{1}{3} \Phi_{2k}^n V_{2k}^n - \frac{1}{6} \Phi_{2k-1}^n V_{2k}^n \\ - \frac{1}{6} \Phi_{2k}^n V_{2k-1}^n + \hat{f}_{2,k+1/2} = 0 \end{aligned}$$

这里已经将  $v_t$  与  $\varphi_t$  作了向前一步差分, 且假设  $v_t$  与  $\varphi_t$  在区间上也为线性函数。进一步地, 由于  $v, \phi, w_d$  在区间中都假设为了线性函数, 积分中均为多项式函数, 可精确计算得到结果。

求解上述方程组可得到

$$V_{2k-1}^{n+1} = V_{2k-1}^n - \nu((V_{2k-1}^n)^2 + (V_{2k}^n)^2 + V_{2k-1}^n V_{2k}^n) - 3\nu(\Phi_{2k-1}^n + \Phi_{2k}^n) + 4\nu\hat{f}_{1,k-1/2} + 2\nu\hat{f}_{1,k+1/2}$$

$$V_{2k}^{n+1} = V_{2k}^n + \nu((V_{2k-1}^n)^2 + (V_{2k}^n)^2 + V_{2k-1}^n V_{2k}^n) + 3\nu(\Phi_{2k-1}^n + \Phi_{2k}^n) - 2\nu\hat{f}_{1,k-1/2} - 4\nu\hat{f}_{1,k+1/2}$$

$$\Phi_{2k-1}^{n+1} = \Phi_{2k-1}^n - 2\nu\Phi_{2k-1}^n V_{2k-1}^n - 2\nu\Phi_{2k}^n V_{2k}^n - \nu\Phi_{2k-1}^n V_{2k}^n - \nu\Phi_{2k}^n V_{2k-1}^n + 4\nu\hat{f}_{2,k-1/2} + 2\nu\hat{f}_{2,k+1/2}$$

$$\Phi_{2k}^{n+1} = \Phi_{2k}^n + 2\nu\Phi_{2k-1}^n V_{2k-1}^n + 2\nu\Phi_{2k}^n V_{2k}^n + \nu\Phi_{2k-1}^n V_{2k}^n + \nu\Phi_{2k}^n V_{2k-1}^n - 2\nu\hat{f}_{2,k-1/2} - 4\nu\hat{f}_{2,k+1/2},$$

这就是非连续有限元方法的迭代形式，之所以称它为非连续，是因为与一般的有限元方法不同，我们并没有假设  $v$  与  $\phi$  的结果连续，从而取消了连续有限元方法中的限制

$$V_{2k} = V_{2k+1}, \quad \Phi_{2k} = \Phi_{2k+1}.$$

除了直接使用上一部分已经计算出的 Godunov 通量外，我们还可以考虑利用修正的 LF 通量。具体来说，我们先计算  $f$  的 Jacobi 阵

$$f'(u) = \begin{pmatrix} v & 1 \\ \varphi & v \end{pmatrix},$$

此时修正的 LF 通量定义为<sup>[4]</sup>

$$\hat{f}^{LF}(u_-, u_+) = \frac{1}{2}(f(u_-) + f(u_+) - \alpha(u_+ - u_-))$$

这里  $\alpha$  表示  $v$  在  $v_-$  与  $v_+$  之间， $\varphi$  在  $\varphi_-$  与  $\varphi_+$  之间时  $f'(u)$  特征值（计算得为  $\pm\sqrt{\varphi+v}$ ）绝对值的最大值，分析可知具体表达式为

$$\alpha = \max\{|v_{\pm} \pm \sqrt{\varphi_{\pm}}|\},$$

其中  $\max$  代表每个  $\pm$  任取时的最大值。

采用两种不同的数值通量后，非连续有限元法 [Discontinuous Galerkin Method, DG] 的离散效果如图 19 与图 20，这里初值与上一部分完全相同。可以看出，无论采用何种通量，DG 方法都正确捕获了间断界面，且具有明显的激波、稀疏波特征，效果远好于直接进行有限差分或有限体积离散。

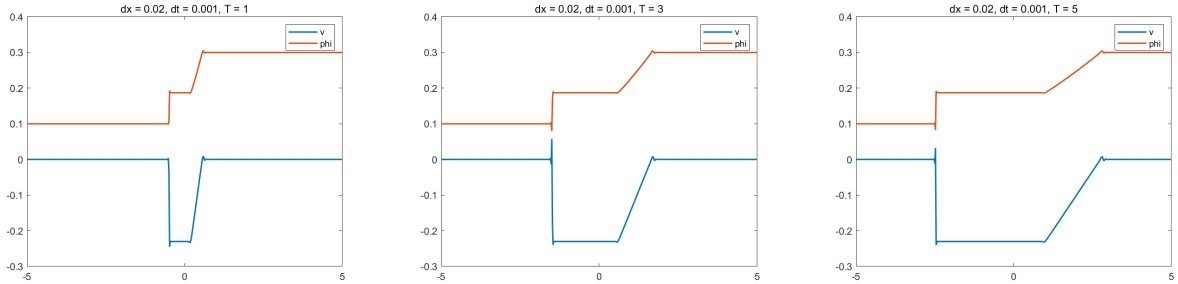


图 19: Godunov 通量 DG 模拟算例 6

值得一提的是，虽然 LF 通量与 Godunov 通量均为熵数值通量，二维时由于离散有限元一般不具有类似有限体积差分的保单调性质，仍然会出现振荡。不过，LF 通量的效果与 Godunov 几乎无差别，计算却更加简单，因此对 DG 方法是更好的选择。对数值振荡的解除等更多的优化方案将在第四章中进行更详细的讨论，而分析完一维的情况后，我们希望能对二维的磁流体方程找到可行的离散方案。

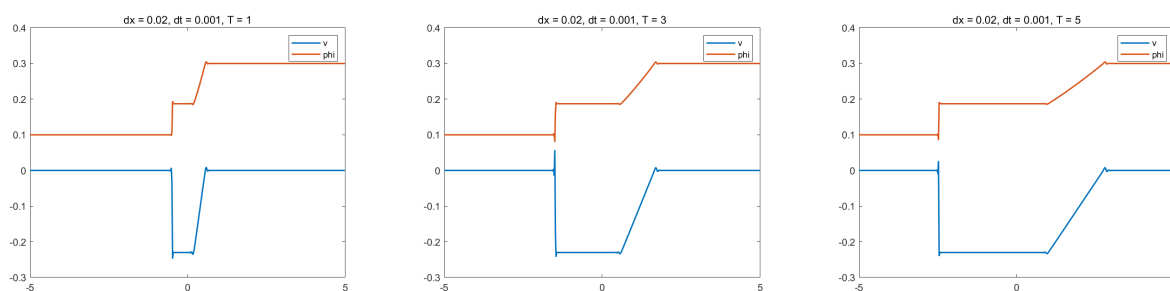


图 20: LF 通量 DG 模拟算例 6

## 第 5 节 本章小结

本章在介绍双曲守恒律、弱解、熵解的概念后，首先以有限差分方法对一维情况进行了分析，并发现守恒形式出发推导的有限差分可以比非守恒形式更加稳定。由此，通过构造有限体积法可以进一步得到数值通量的概念，且不同的数值通量有不同的捕获特性：LF 通量数值可以收敛到熵解但耗散相对严重；LW 通量无法保证无穷范数稳定，有严重的数值振荡；迎风通量结合了两者的优点，但无法捕获稀疏波；利用 Godunov 格式，将迎风通量作熵修正后，可以得到最好的效果。最后，利用非连续有限元的思路，结合 Godunov 通量或修正的 LF 通量可以对激波与稀疏波都实现精确的捕获。

## 第 3 章 二维磁流体方程组

本章中，我们将研究二维的双曲守恒律离散。将数值通量推广到二维后，可以采用类似的有限体积方法与有限元方法。分析了几种数值通量的性态后，我们仍然选择 Godunov 通量与修正的 LF 通量进行二维格式的构造。结合数值积分估算方法，即可以得到一个二维双曲守恒律组的离散方法。

### 第 1 节 二维守恒格式

由于我们仍然需要分析各个数值通量与二维方程的特性，我们先以有限体积守恒型离散进行分析，再选择合适的方式进行非连续有限元的构造。

为了与之后  $x$  方向的速度  $u$  区分，在讨论二维情况时，我们记需要求解的向量为  $\phi$ 。回到基本的定义，二维的双曲守恒律可以写为

$$\phi + f(\phi)_x + g(\phi)_y = 0,$$

且  $f'(\phi) \cos \theta + g'(\phi) \sin \theta$  对任何  $\phi, \theta$  可相似对角化。

不妨考虑矩形网格下的有限体积离散，记  $\nu_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \nu_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ ，与一维完全类似地，一个简单的思路是将二维守恒型格式写为

$$\phi_{jk}^{n+1} = \phi_{jk}^n - \nu_x (\hat{f}_{j+1/2,k}^n - \hat{f}_{j-1/2,k}^n) - \nu_y (\hat{g}_{j,k+1/2}^n - \hat{g}_{j,k-1/2}^n),$$

这里  $\phi_{ij}$  代表  $I_j^{(x)} \times I_k^{(y)}$  中的积分平均， $\hat{f}$  与  $\hat{g}$  为基于  $f, g$  构造的数值通量。

也可以考虑使用逐维迭代的思想，构成 LOD 格式

$$\begin{aligned} \phi_{jk}^{n+1/2} &= \phi_{jk}^n - \nu_x (\hat{f}_{j+1/2,k}^n - \hat{f}_{j-1/2,k}^n) \\ \phi_{jk}^{n+1} &= \phi_{jk}^{n+1/2} - \nu_y (\hat{g}_{j,k+1/2}^{n+1/2} - \hat{g}_{j,k-1/2}^{n+1/2}), \end{aligned}$$

或更进一步地采用双重循环策略优化：

$$\begin{aligned} \phi_{jk}^{n+1/2} &= \phi_{jk}^n - \nu_x (\hat{f}_{j+1/2,k}^n - \hat{f}_{j-1/2,k}^n) \\ \phi_{jk}^{n+1} &= \phi_{jk}^{n+1/2} - \nu_y (\hat{g}_{j,k+1/2}^{n+1/2} - \hat{g}_{j,k-1/2}^{n+1/2}) \\ \phi_{jk}^{n+3/2} &= \phi_{jk}^n - \nu_y (\hat{g}_{j,k+1/2}^{n+1} - \hat{g}_{j,k-1/2}^{n+1}) \\ \phi_{jk}^{n+2} &= \phi_{jk}^{n+3/2} - \nu_x (\hat{f}_{j+1/2,k}^{n+3/2} - \hat{f}_{j-1/2,k}^{n+3/2}). \end{aligned}$$

### §3.1.1 二维线性双曲型方程

先考虑线性标量守恒律  $\phi_t + a\phi_x + b\phi_y = 0$  的情况，不妨设  $a, b$  均为正，两方向的网比为  $\nu_x, \nu_y$ 。可直接构造其迎风格式：

$$\phi_{jk}^{n+1} = \phi_{jk}^n - \nu_x a (\phi_{jk}^n - \phi_{j-1,k}^n) - \nu_y b (\phi_{jk}^n - \phi_{j,k-1}^n).$$

为方便稳定性分析，假设  $a = b = 1$ ,  $\Delta x = \Delta y = h$ ，并记网比为  $\nu$ ，此时，空间点  $(x_j, y_k)$  在  $\Delta t$  时间的真实依赖区域边界点  $(x_j - \Delta t, y_k - \Delta t)$ ，而数值依赖区域是以此点为直角顶点，两直角边长为  $h$  的向左下延伸的直角三角形，直接计算可知 CFL 条件（即边界点包含在直角三角形中）为  $\nu \leq \frac{1}{2}$ 。对更一般的情况，CFL 条件大致相当于时间步长限制为原本的  $\frac{1}{2}$ ，不会存在量级上的差别。另一方面，直接利用 Fourier 方法代入二维模态解可得到  $L^2$  稳定性的充要条件即为  $\nu \leq \frac{1}{2}$ ，也即此 CFL 条件足以保证稳定。

此外，另一种常用的离散方式是利用中心差商离散空间导数可得 LW 格式

$$\phi_{jk}^{n+1} = \phi_{jk}^n - \frac{1}{2}(\nu_x a \Delta_{0x} \phi_{jk}^n + \nu_y b \Delta_{0y} \phi_{jk}^n) + \frac{1}{2}(\nu_x^2 a^2 \delta_x^2 \phi_{jk}^n + \nu_y^2 b^2 \delta_y^2 \phi_{jk}^n) + \frac{1}{4} \nu_x \nu_y ab \Delta_{0x} \Delta_{0y} \phi_{jk}^n,$$

其离散模板包含 9 个空间点，同样利用 Fourier 方法可知  $L^2$  模稳定性条件为

$$|\nu_x a| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad |\nu_y b| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

值得注意的是，二维 LW 格式并不是一维 LW 格式的直接推广，因为直接采用 LW 通量构造对应的守恒格式不包含最后一项，这会导致时间不再二阶相容，且线性无条件  $L^2$  模不稳定。考察两个线性算例：

**算例 7.** 考虑区域  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  上的方程  $\phi_t + 0.5\phi_x + 1.5\phi_y = 0$ ，周期边界条件为

$$\phi(0, y, t) = \phi(2\pi, y, t), \quad \phi(x, 0, t) = \phi(x, 2\pi, t).$$

取连续初值  $\phi_0(x, y) = \sin(x + y)$ 。

**算例 8.** 方程与边界条件同算例 7，但取间断初值  $\phi_0(x, y) = \lceil \frac{\sin(x+y)}{2} \rceil$ 。两算例的真解为

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x - 0.5t, y - 1.5t).$$

利用二范数刻画误差，迎风格式、LW 格式、双重循环 LOD 格式的离散效果如图 21 与图 22。观察可以发现，LW 格式如一维一样表现出了较强的振荡特性，LOD 格式的效果与 LW 几乎相同，而迎风格式在一定数值衰减的情况下表现出了更好的光滑性，连续与间断情况的二范数误差曲线如图 23。

虽然 LOD 与 LW 对应的误差曲线无法通过肉眼分辨差别，比较后可以得到 LW 格式两种情况的误差略小于双重循环下的 LOD 格式。不过，计算  $L^2$  稳定性条件可得 LOD 格式可以比 LW 格式选取更长的时间步长，稳定性更好，二者各有优劣。

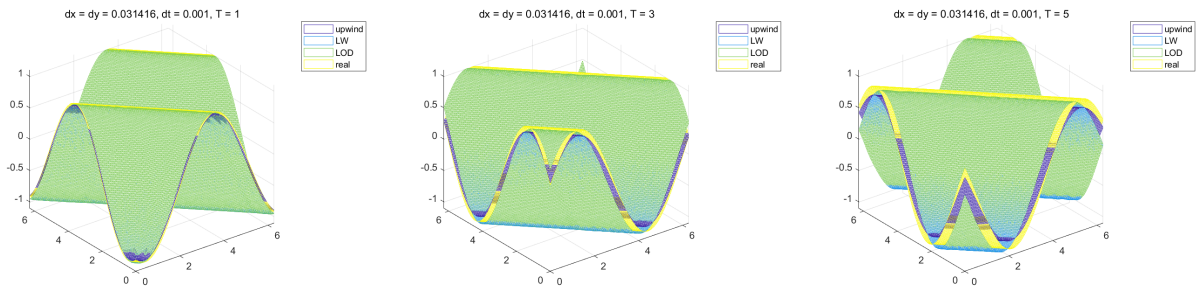


图 21: 二维线性双曲守恒律模拟算例 7

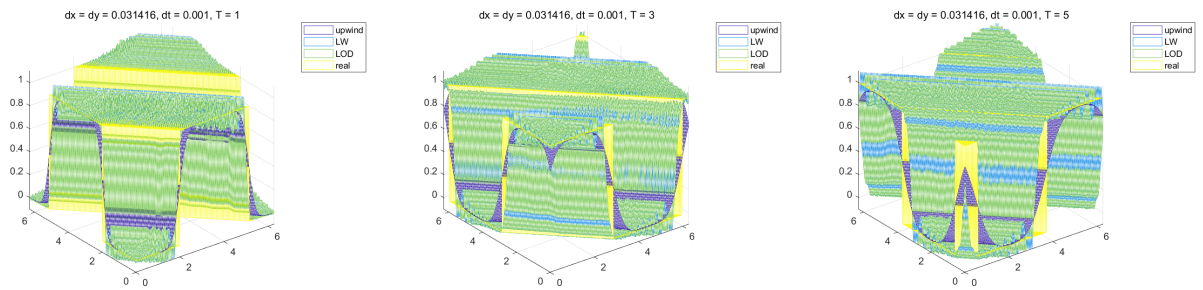


图 22: 二维线性双曲守恒律模拟算例 8

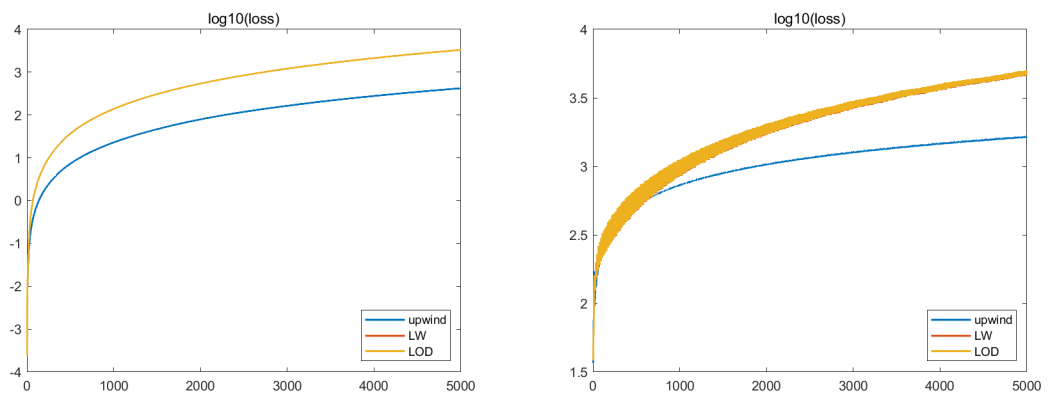


图 23: 二维线性双曲守恒律对算例 7、算例 8 离散误差

### §3.1.2 一般二维守恒律

在非线性的情况下，LW 格式由于涉及交叉项，事实上是难以推导的，因此由采用 LW 通量的 LOD 格式代替。完全类似地，可以考虑不同通量利用 LOD 格式后在非线性的守恒律离散中的效果。

**算例 9.** 考虑非线性方程

$$\phi_t + \phi\phi_x + \phi^3\phi_y = 0, \quad (x, y) \in [-5, 5] \times [-5, 5],$$

给定初值为

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 0.7 & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0.2 & x \geq 0, y < 0 \\ 0.3 & x < 0, y \geq 0 \\ 0.5 & x < 0, y < 0 \end{cases},$$

并保持边界值不变。

我们测试五种不同的通量，分别是迎风数值通量、LW 通量、LF 通量、修正的 LF 通量与 Godunov 通量，固定  $\Delta x = \Delta y = 0.05$ ， $\Delta t = 0.001$ ，利用双重循环的 LOD 格式，模拟到  $T = 3$  的时刻，得到的结果如图 24。

从图中可以直观看出，LF 通量由于数值耗散过于严重而导致光滑、LW 通量则因为数值振荡导致解不稳定、甚至溢出，剩下的三种通量都基本准确地捕获了解中的激波。不过，迎风数值通量并不能正确捕获稀疏波，而是仍当作激波处理，这与一维时的基本结果一致。修正的 LF 通量与 Godunov 通量均正确刻画了稀疏波，相比之下，修正的 LF 通量边界更加光滑，符合 LF 通量的性质，而 Godunov 通量的边界相对粗糙。

与一维情况类似，LF 通量、LW 通量都是易于推广到向量的，修正的 LF 通量虽然准确求解相对困难，我们稍后可以看到，保证  $\alpha$  为特征值最大值的某个估计也能得到较好的效果。比起计算更加复杂的迎风通量与 Godunov 通量，修正的 LF 通量是效果最好的。

## 第 2 节 三角网格非连续有限元

确定选择修正的 LF 通量后，我们将采用非连续有限元方式进行二维理想磁流体方程的离散。由于其形式相对复杂，我们拆分为三步：先对一维理想流体满足的欧拉方程进行离散，然后提升到二维三角形网格的理想流体中，最终完成二维理想磁流体方程的离散。

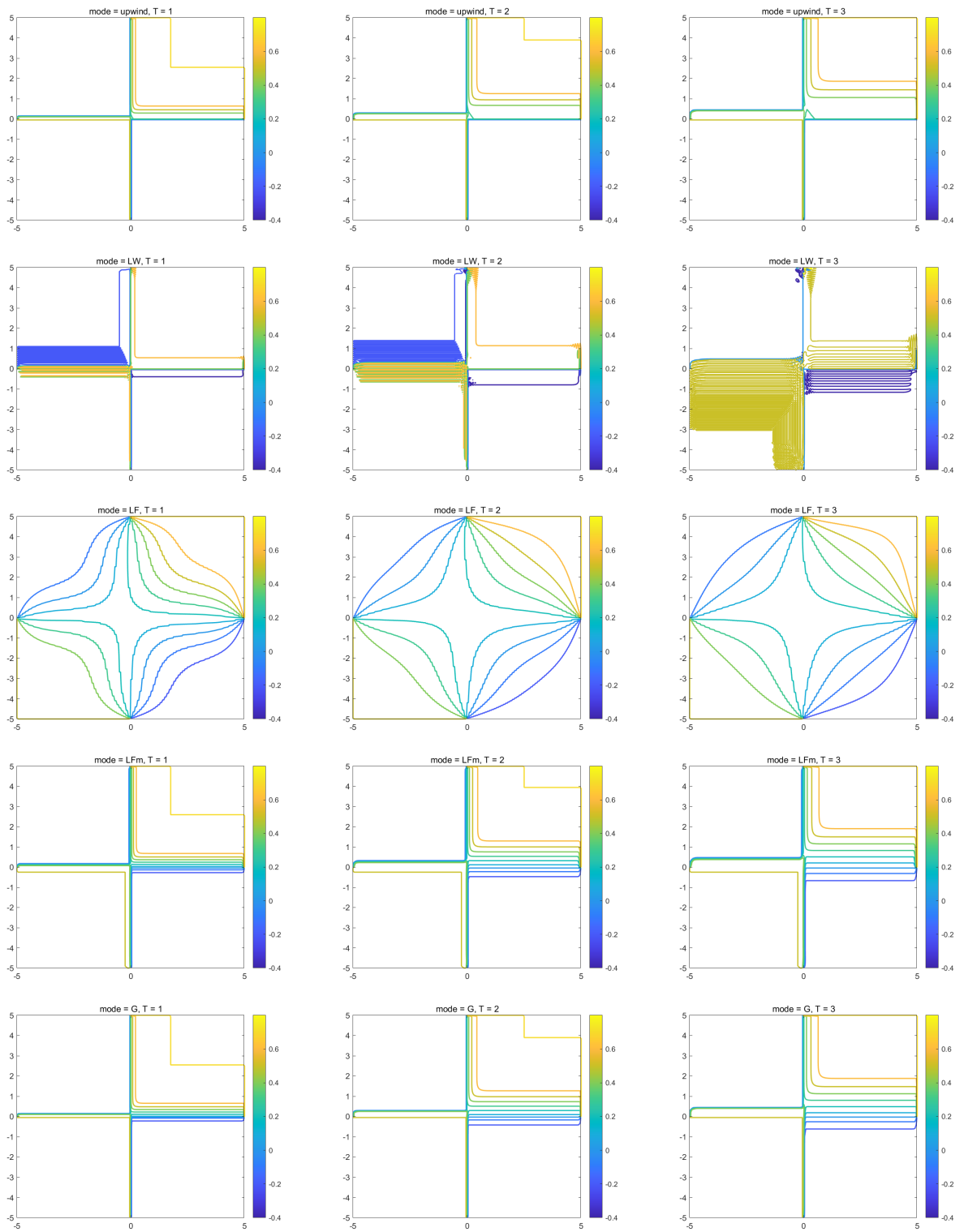


图 24: 五种数值通量捕获算例 9 激波与稀疏波结果对比



### §3.2.1 一维欧拉方程

一维欧拉方程的形式为

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}_x = 0, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho v^2.$$

视第一项  $(\rho, \rho v, E)^T$  为向量  $\phi$ ，将第二项看为  $\phi$  的函数，即可反解出  $\rho, v, p$  等在端点的值，从而将其写为了守恒形式。

计算可得其对应的

$$f'(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 3)v^2/2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ (\gamma - 1)v^3/2 - v(E + p)/\rho & (E + p)/\rho - (\gamma - 1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix},$$

进一步计算发现其特征值为

$$\lambda_1 = v - c, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = v + c, \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}},$$

且  $f'(\phi)$  可以进行相似对角化，从而其的确是双曲守恒律组。

采用修正的 LF 数值通量，也即

$$\hat{f}^{LF}(\phi_-, \phi_+) = \frac{1}{2}(f(\phi_-) + f(\phi_+) - \alpha(\phi_+ - \phi_-))$$

这里  $\alpha$  为对应的范围  $\rho, \rho v, E$  各自在区间中取值时  $f'(\phi)$  特征值绝对值的最大值，简单分析可发现最大值不可能在  $\lambda_2$  处取到，且必然取在端点处，又由单调性可知能取为

$$\alpha = \max \{|v_{\pm} \pm c_{\pm}|\},$$

其中下标表示最大值、最小值， $\max$  代表每个  $\pm$  任取时的最大值。

记  $m = \rho v$ ，将方程写为

$$\begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} m \\ (\gamma - 1)E + (3 - \gamma)m^2/(2\rho) \\ \gamma Em/\rho + (1 - \gamma)m^3/(2\rho^2) \end{pmatrix}_x = 0,$$

离散时取左侧为  $R, M, H$ ，与浅水波方程完全类似得到方程，从而进一步计算出迭代结果。理论来说，只涉及有理函数时可计算积分得到精确解，如仍考虑线性函数空间，将  $R_{2k-1}^n, R_{2k}^n$  记为  $R_1, R_2$ ， $M$  与  $H$  同理，记  $\Delta x = \Delta y = h$  可得迭代

$$\begin{aligned} M_{2k-1}^{n+1} &= M_1 - 3\nu(\gamma - 1)(H_1 + H_2) \\ &\quad - \frac{3(3 - \gamma)}{2(R_1 - R_2)^3} ((M_1 - M_2)(R_1 - R_2)(M_1 R_1 + 3M_2 R_1 - 3M_1 R_2 - M_2 R_2) \\ &\quad + 2(M_2 R_1 - M_1 R_2)^2 \ln(hR_1) - 2(M_2 R_1 - M_1 R_2)^2 \ln(hR_2)) \\ &\quad + 4\nu \hat{f}_{2,2k-1} + 2\nu \hat{f}_{2,2k} \end{aligned}$$

然而，这样迭代的计算量过大，因此采用精确计算结合估算的方式，最终迭代过程为

$$\begin{aligned}
 R_{2k-1}^{n+1} &= R_{2k-1}^n - 3\nu M_{2k-1}^n - 3\nu M_{2k}^n + 4\nu \hat{f}_{1,k-1} + 2\nu \hat{f}_{1,k} \\
 R_{2k}^{n+1} &= R_{2k}^n + 3\nu M_{2k-1}^n + 3\nu M_{2k}^n - 2\nu \hat{f}_{1,2k-1} - 4\nu \hat{f}_{1,k} \\
 M_{2k-1}^{n+1} &= M_{2k-1}^n - \frac{6\nu}{h} \int_{(k-1)h}^{kh} f_2(\phi^n) dx + 4\nu \hat{f}_{2,k-1} + 2\nu \hat{f}_{2,k} \\
 M_{2k}^{n+1} &= M_{2k}^n + \frac{6\nu}{h} \int_{(k-1)h}^{kh} f_2(\phi^n) dx - 2\nu \hat{f}_{2,k-1} - 4\nu \hat{f}_{2,k} \\
 H_{2k-1}^{n+1} &= H_{2k-1}^n - \frac{6\nu}{h} \int_{(k-1)h}^{kh} f_3(\phi^n) dx + 4\nu \hat{f}_{3,k-1} + 2\nu \hat{f}_{3,k} \\
 H_{2k}^{n+1} &= H_{2k}^n + \frac{6\nu}{h} \int_{(k-1)h}^{kh} f_3(\phi^n) dx - 2\nu \hat{f}_{3,k-1} - 4\nu \hat{f}_{3,k}.
 \end{aligned}$$

这里的积分中  $\phi^n$  指  $\rho, m, E$  满足分段线性所构造出的  $\phi$ ，其精确计算即得到精确解，而实际上采用高斯积分的方式进行估算，于是算法流程为：

1. 利用给定的初始  $\rho, m, h$  对  $R, M, H$  进行初始化。
2. 利用特征值计算出每个区间端点处的  $\alpha$ 。
3. 通过  $\alpha$  计算得到一切数值通量  $\hat{f}_{d,k}$ 。
4. 利用给定的  $N$ ，采用  $N$  点高斯积分估算  $f_2$  与  $f_3$  的积分。
5. 计算迭代并按所给边界条件修正边界值，回到第二步。

考察如下算例：

**算例 10.** 对欧拉方程在  $x \in [-5, 5]$  考虑 Riemman 问题，取左侧  $(\rho_l, m_l, h_l) = (1, 0, 1)$ ，右侧  $(\rho_r, m_r, p_r) = (0.125, 0, 0.1)$ 。

利用三点高斯积分估算  $f_2, f_3$  的积分，得到的迭代结果作  $\rho, v, p$  图像如图 25。可以发现，除了激波与稀疏波以外，还出现了接触间断，也即  $\rho$  连续、 $v$  与  $p$  间断的情况，符合欧拉方程的性质。

在这个过程中，我们已经应用到了高斯积分进行积分的估算，推广到二维后，整体的计算流程仍然类似，但计算会变得更加复杂。

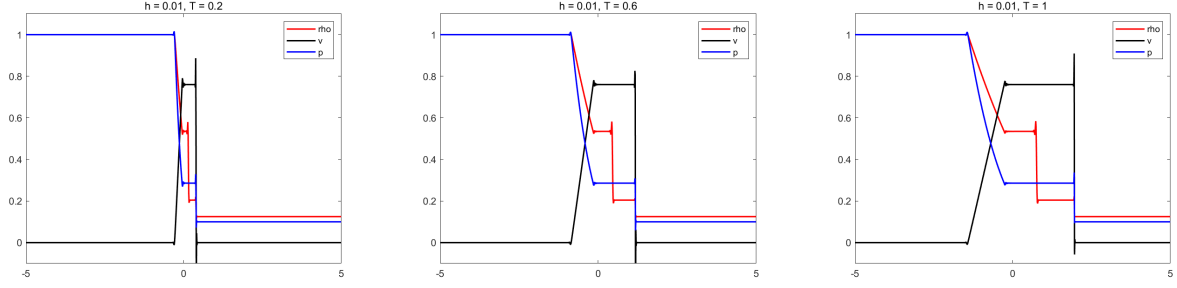


图 25: 欧拉方程算例 10 的激波、稀疏波、接触间断

### §3.2.2 二维欧拉方程

二维的欧拉方程形如

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E+p) \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) \end{pmatrix}_y = 0, \quad E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

记  $l = \rho u, m = \rho v$ , 向量记作  $\phi$ , 则方程可写为  $\phi_t + f(\phi)_x + g(\phi)_y = 0$  的形式, 即

$$\begin{pmatrix} \rho \\ l \\ m \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} l \\ \frac{l^2}{\rho} + (\gamma-1)(E - \frac{l^2}{2\rho} - \frac{m^2}{2\rho}) \\ \frac{lm}{\rho} \\ \gamma \frac{lE}{\rho} - (\gamma-1)\frac{l}{2\rho^2}(l^2 + m^2) \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} m \\ \frac{lm}{\rho} \\ \frac{m^2}{\rho} + (\gamma-1)(E - \frac{l^2}{2\rho} - \frac{m^2}{2\rho}) \\ \gamma \frac{mE}{\rho} - (\gamma-1)\frac{m}{2\rho^2}(l^2 + m^2) \end{pmatrix}_y = 0.$$

于是有

$$f'(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\rho^2}((\gamma-3)l^2 + (\gamma-1)m^2) & (3-\gamma)\frac{l}{\rho} & (1-\gamma)\frac{m}{\rho} & \gamma-1 \\ -\frac{lm}{\rho^2} & \frac{m}{\rho} & \frac{l}{\rho} & 0 \\ -\gamma\frac{lE}{\rho^2} + (\gamma-1)\frac{l}{\rho^3}(l^2 + m^2) & \gamma\frac{E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2\rho^2}(3l^2 + m^2) & (1-\gamma)\frac{lm}{\rho^2} & \gamma\frac{l}{\rho} \end{pmatrix},$$

$$g'(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{lm}{\rho^2} & \frac{m}{\rho} & \frac{l}{\rho} & 0 \\ \frac{1}{2\rho^2}((\gamma-1)l^2 + (\gamma-3)m^2) & (1-\gamma)\frac{l}{\rho} & (3-\gamma)\frac{m}{\rho} & \gamma-1 \\ -\gamma\frac{mE}{\rho^2} + (\gamma-1)\frac{m}{\rho^3}(l^2 + m^2) & (1-\gamma)\frac{lm}{\rho^2} & \gamma\frac{E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2\rho^2}(3m^2 + l^2) & \gamma\frac{m}{\rho} \end{pmatrix},$$

进一步计算  $f'(\phi) \cos \theta + g'(\phi) \sin \theta$  可发现其能相似对角化, 于是的确是二维双曲守恒律组。

二维三角网格中的有限元方法, 在某个三角形中的基本方程为<sup>[5]</sup>

$$\iint_{\Delta_j} \phi_t v dx dy - \iint_{\Delta_j} (f(\phi)v_x + g(\phi)v_y) dx dy + \oint_{\partial\Delta_j} (f(\phi)n_1 + g(\phi)n_2)v ds = 0,$$

这里  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  为边界的外法向量,  $v$  为任何可微函数。

为进行数值计算, 我们考虑  $\phi$  的每个分量与  $v$  均为分段线性函数的情况, 并将其改写成

$$\iint_{\Delta_j} \phi_t v dx dy - \iint_{\Delta_j} (f(\phi)v_x + g(\phi)v_y) dx dy + \oint_{\partial\Delta_j} \hat{F}_n(\phi_-, \phi_+) v ds = 0$$

此处  $\phi_-, \phi_+$  在每条边界上代表紧邻边界内与紧邻边界外处  $\phi$  的值 (对三条边可以不同),  $\hat{F}_n$  表示某数值通量, 如仍取为 LF 通量

$$\hat{F}_n(\phi_-, \phi_+) = \frac{1}{2}(f(\phi_-)n_1 + f(\phi_+)n_1 + g(\phi_-)n_2 + g(\phi_+)n_2 - \alpha(\phi_+ - \phi_-)),$$

这里  $\alpha$  为该边附近  $n_1 f'(\phi) + n_2 g'(\phi)$  特征值绝对值的某上界, 可通过矩阵一范数等估算。

下面考虑某三角形中, 设  $v$  在三个顶点  $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$  的值为  $V_i$ ,  $\phi$  在时刻  $ns$  的第  $k$  个分量顶点值为  $\Phi_{ki}^n$ 。为方便起见, 假设顶点已逆时针排列 (这样即可直接从边向量直接旋转得到法向量)。由于平移不影响积分结果, 可不妨设  $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = 0$ , 不会影响得到的方程。

记

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_v \\ b_v \\ c_v \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \frac{1}{s} M^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_{k1}^{n+1} - \Phi_{k1}^n \\ \Phi_{k2}^{n+1} - \Phi_{k2}^n \\ \Phi_{k3}^{n+1} - \Phi_{k3}^n \end{pmatrix},$$

则第一项的积分的第  $k$  个分量即为在三角形内对  $(a_v + b_v x + c_v y)(a_k + b_k x + c_k y)$  积分。由假设可知  $x, y$  积分均为 0, 进一步计算可发现

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_j} \phi_{k,t} v dx dy &= \Delta a_v a_k + \frac{\Delta}{12}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) b_v b_k + \frac{\Delta}{12}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) c_v c_k \\ &\quad + \frac{\Delta}{12}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)(b_v c_k + c_v b_k), \end{aligned}$$

这里  $\Delta = \frac{1}{2} |\det M|$  为三角形面积 (由逆时针排列, 事实上可去掉绝对值)。

同理代入  $v$  计算得第二项的第  $k$  个分量为

$$\iint_{\Delta_j} (f_k(\phi)v_x + g_k(\phi)v_y) dx dy = b_v \iint_{\Delta_j} f_k(\phi) dx dy + c_v \iint_{\Delta_j} g_k(\phi) dx dy.$$

第三项对边界的积分可拆分为 (此处两点间积分代表沿直线)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Delta_j} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) v ds &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) (a_v + b_v x + c_v y) ds \\ &\quad + \int_{(x_2, y_2)}^{(x_3, y_3)} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) (a_v + b_v x + c_v y) ds \\ &\quad + \int_{(x_3, y_3)}^{(x_1, y_1)} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) (a_v + b_v x + c_v y) ds. \end{aligned}$$

由于三项和为 0 对任何线性函数  $v$  成立，比较  $a_v, b_v, c_v$  前的系数可得到方程组

$$\Delta a_k + \int_{\partial\Delta_j} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) \mathbf{d}s = 0,$$

$$\frac{\Delta}{12}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)b_k + \frac{\Delta}{12}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)c_k - \iint_{\Delta_j} f_k(\phi) \mathbf{d}x \mathbf{d}y + \int_{\partial\Delta_j} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) x \mathbf{d}s = 0,$$

$$\frac{\Delta}{12}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)b_k + \frac{\Delta}{12}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)c_k - \iint_{\Delta_j} g_k(\phi) \mathbf{d}x \mathbf{d}y + \int_{\partial\Delta_j} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) y \mathbf{d}s = 0.$$

记每个三角形相关的系数

$$T_{xx} = \frac{\Delta}{12}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$T_{xy} = \frac{\Delta}{12}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3),$$

$$T_{yy} = \frac{\Delta}{12}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

这些系数可以预先计算（注意此处  $x, y$  均需要取平移后的结果），由于欧拉方程的复杂程度，直接计算积分解析解已经不现实（虽然它的确存在），下面对积分进行数值估算以确定最终的迭代过程。

先对边界上的积分进行估算。考虑高斯积分，假设在  $[-1, 1]$  上对应  $N$  个点的位置为  $g_p$ ，权重  $w_p$ ，则三角形上可以取  $3N$  个点，位置与权重分别为

$$x_p = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + g_p(x_2 - x_1)), \quad y_p = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + g_p(y_2 - y_1)),$$

$$\omega_p = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2} w_p,$$

$$x_{p+N} = \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + g_p(x_3 - x_2)), \quad y_{p+N} = \frac{1}{2}(y_2 + y_3 + g_p(y_3 - y_2)),$$

$$\omega_{p+N} = \frac{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}{2} w_p,$$

$$x_{p+2N} = \frac{1}{2}(x_3 + x_1 + g_p(x_1 - x_3)), \quad y_{p+2N} = \frac{1}{2}(y_3 + y_1 + g_p(y_1 - y_3)),$$

$$\omega_{p+2N} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}}{2} w_p.$$

记  $\hat{F}_n$  在  $n\Delta t$  时刻  $(x_i, y_i)$  处的值为  $\hat{F}_i^n$ ，则可计算出

$$F_k^n = \int_{\partial\Delta_j} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) \mathbf{d}s \approx \sum_i \omega_i \hat{F}_{i,k}^n,$$

$$F_{xk}^n = \int_{\partial\Delta_j} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) x \mathbf{d}s \approx \sum_i \omega_i x_i \hat{F}_{i,k}^n,$$

$$F_{yk}^n = \int_{\partial\Delta_j} \hat{F}_{n,k}(\phi_-, \phi_+) y ds \approx \sum_i \omega_i y_i \hat{F}_{i,k}^n.$$

此外，我们还需要估算

$$f_k^n = \iint_{\Delta_j} f_k(\phi) dx dy, \quad g_k^n = \iint_{\Delta_j} g_k(\phi) dx dy.$$

不失一般性，考虑对任何函数  $\psi$  的积分<sup>[8]</sup>

$$\iint_{\Delta_j} \psi(x, y) dx dy,$$

作变换

$$\begin{cases} x = x_1(1 - \xi - \eta) + x_2\xi + x_3\eta \\ y = y_1(1 - \xi - \eta) + y_2\xi + y_3\eta \end{cases}$$

可以将积分化为

$$2\Delta \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \psi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) d\xi d\eta.$$

将其进一步变换为正方形上的积分，由二重高斯积分可得到

$$\iint_{\Delta_j} \psi(x, y) dx dy \approx \Delta \sum_{i,l} w_i w_l \frac{1 - g_l}{4} \psi(x(\xi_{il}, \eta_{il}), y(\xi_{il}, \eta_{il})),$$

$$\xi_{il} = \frac{(1 - g_i)(1 + g_l)}{4}, \eta_{il} = \frac{1 + g_l}{2}.$$

综合上方数值积分结果后，最终可以得到

$$\begin{cases} a_k = -\frac{1}{\Delta} F_k^n \\ b_k = \frac{1}{T_{xx}T_{yy} - T_{xy}^2} (-T_{yy}F_{xk}^n + T_{yy}f_k^n + T_{xy}F_{yk}^n - T_{xy}g_k^n) \\ c_k = \frac{1}{T_{xx}T_{yy} - T_{xy}^2} (-T_{xx}F_{yk}^n + T_{xx}g_k^n + T_{xy}F_{xk}^n - T_{xy}f_k^n) \end{cases},$$

由此

$$\begin{pmatrix} \Phi_{k1}^{n+1} \\ \Phi_{k2}^{n+1} \\ \Phi_{k3}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k1}^n \\ \Phi_{k2}^n \\ \Phi_{k3}^n \end{pmatrix} + sM \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta} F_k^n \\ \frac{1}{T_{xx}T_{yy} - T_{xy}^2} (-T_{yy}F_{xk}^n + T_{yy}f_k^n + T_{xy}F_{yk}^n - T_{xy}g_k^n) \\ \frac{1}{T_{xx}T_{yy} - T_{xy}^2} (-T_{xx}F_{yk}^n + T_{xx}g_k^n + T_{xy}F_{xk}^n - T_{xy}f_k^n) \end{pmatrix}.$$

事实上，上述的讨论对任何方程  $\phi_t + f(\phi)_x + g(\phi)_y = 0$  都可使用，而为了解决欧拉方程的情况，距离写出代码，还必须给出  $\alpha$  的具体形式。直接计算可知  $f'(\phi)$ 、 $g'(\phi)$  特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad \lambda_4 = u - c, \quad \mu_1 = \mu_2 = v, \quad \mu_3 = v + c, \quad \mu_4 = v - c, \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}},$$

而记  $v_n = un_1 + vn_2$ ,  $n_1 f'(\phi) + n_2 g'(\phi)$  的实际特征值为  $v_n, v_n, v_n + c, v_n - c$ , 为方便起见, 估算  $n_1 f'(\phi) + n_2 g'(\phi)$  区间内模最大特征值的模长上界为

$$\alpha = \max(|u_m|, |v_m|) + c_m,$$

这里下标  $m$  代表区间中使绝对值最大的点, 而由物理意义必然有  $c_m > 0$ 。

综合以上过程, 我们最终得到二维非线性守恒律三角形网格 DG 算法的一般流程:

1. 给定三角网格  $T$  与对应的邻接关系、高斯积分点个数  $N$ 、 $\phi$  各分量初始值与边界条件。
2. 初始化与预计算:
  - (a) 按给出的初值对  $\phi$  进行初始化;
  - (b) 计算三角形网格的网格参数  $T_{xx}$ 、 $T_{yy}$ 、 $T_{xy}$ 、 $\Delta$  与每条边的  $n_1, n_2$  等;
  - (c) 根据  $N$ , 计算所有内部与边界上的高斯点位置及对应权重;
  - (d) 通过高斯点位置计算插值权重, 即高斯点值由三角形三个顶点或边界两个顶点生成的权重。
3. 计算数值通量相关积分:
  - (a) 根据边界插值权重计算出边界高斯点附近的  $\phi_-$  与  $\phi_+$ ;
  - (b) 通过  $\phi_-, \phi_+$  估算每个边界高斯点的  $\alpha$ ;
  - (c) 计算数值通量在每个边界高斯点的值  $\hat{F}_k^n$ ;
  - (d) 乘权重求和计算出  $F_k^n$ 、 $F_{xk}^n$  与  $F_{yk}^n$ 。
4. 计算通量函数积分:
  - (a) 通过内部插值权重计算出内部高斯点的  $\phi$ ;
  - (b) 将  $\phi$  代入通量函数, 乘权重求和计算出  $f_k^n$  与  $g_k^n$ 。
5. 迭代最终求解:
  - (a) 由上述数值积分结果计算出  $a_k$ 、 $b_k$ 、 $c_k$ 。
  - (b) 对每个  $k$ , 以  $a_k$ 、 $b_k$ 、 $c_k$  代入迭代公式求解出  $\phi_k$ 。
  - (c) 更新边界使得符合边界条件。
6. 检验结果, 回到第三步。

下面进行一些数值实验以检验算法的性质。

**算例 11.** 对二维欧拉方程考虑  $[0, 1] \times [0, 1]$  区域循环边界条件, 初值  $\vec{v} = 0$ ,  $\rho = 0.5$  恒定, 压强满足

$$p = \begin{cases} 0.3 & x \leq 0.5, y \leq 0.5 \\ 0.7 & x > 0.5, y \leq 0.5 \\ 0.5 & x > 0.5, y > 0.5 \\ 0.1 & x \leq 0.5, y > 0.5 \end{cases}.$$

考虑简单的直角三角形网格, 先划分为  $0.02 \times 0.02$  的正方形, 再将每个正方形划分为两个直角三角形, 以时间步长 0.001 计算, 不同时刻的结果如图 26。

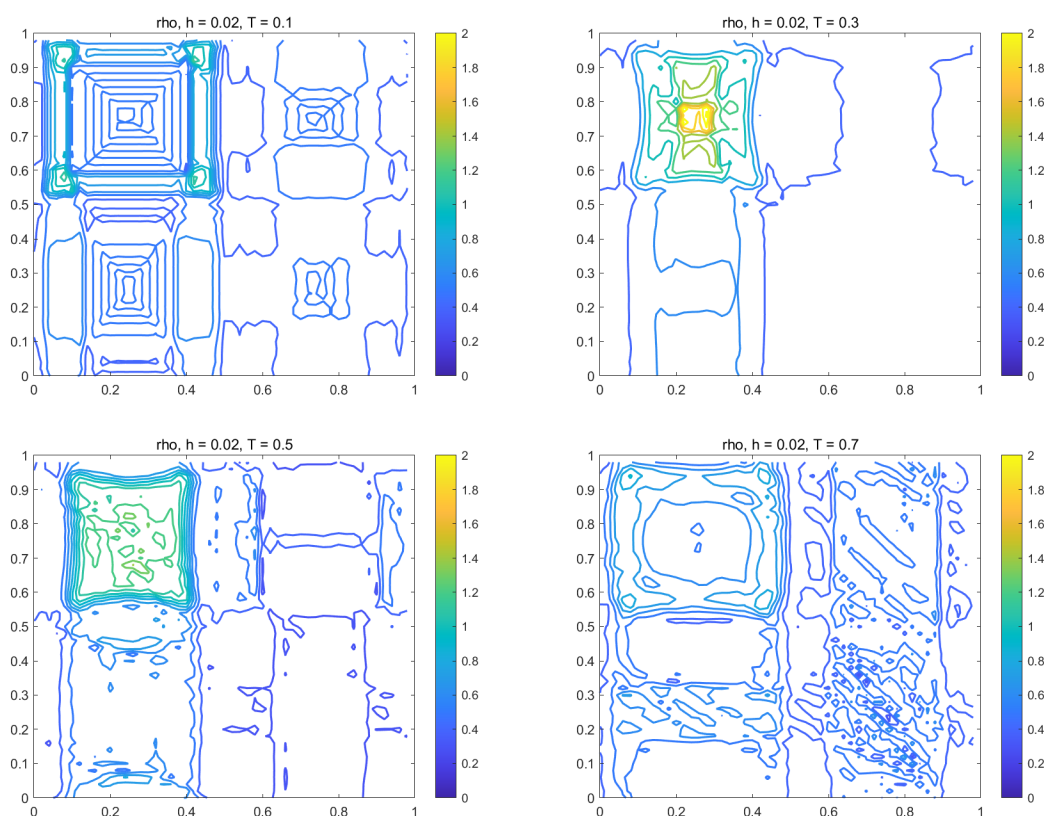


图 26: 二维欧拉方程算例 11

可以看出, 算法正确模拟了流体向低压强区域汇聚而形成的波动, 且的确捕获了初值的间断性质。

**算例 12.** 考虑  $[0, 1]$  区间二维欧拉方程沿  $x$  方向传播的间断, 即  $\rho$  在  $x > 0.5$  时为 0.3, 否则为 0.7, 初始速度、压强满足  $u = 1, v = 0, p = 0$ 。

算例 12 演化过程如图 27。从图中可以看出, 演化时两侧都出现了波动的结构, 且正确进行了  $x$  方向的移动。



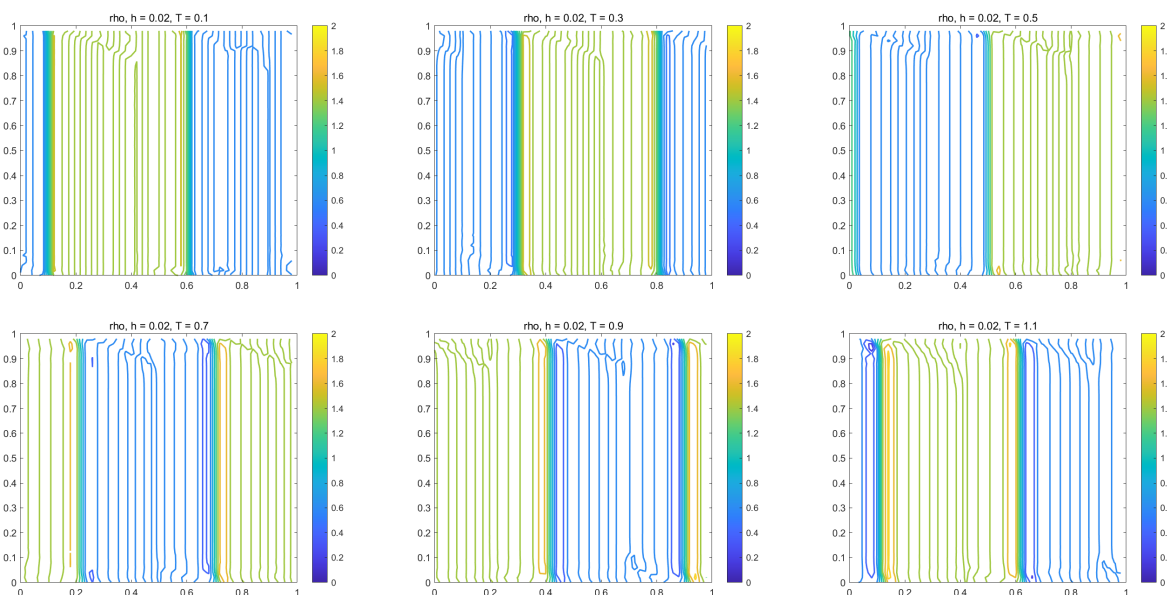


图 27: 二维欧拉方程算例 12

不过，算例 12 中也可以看到，原本的间断处出现了一些数值不稳定，类似的结果在上节中也可观察到，而二维情况由于网格相对一维稀疏，这样的数值不稳定影响将会更大，甚至导致  $\rho$ 、 $p$  不再保证为正，我们将在第四章进行解决。

### §3.2.3 二维理想磁流体方程

最后，我们来进行理想磁流体方程的离散。物理上的理想磁流体力学方程组 [Ideal MHD equations] 为

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p \\ \nabla \times \vec{E} = -\vec{B}_t \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \\ (p\rho^{-\gamma})_t = 0 \end{array} \right. ,$$

这里  $\rho$  表示密度， $\vec{v}$  为速度， $\vec{J}$  为电流密度， $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  为磁感应强度与电场强度， $p$  为压强， $\gamma$  表示绝热常数。

无量纲化后的守恒形式为<sup>[3]</sup>

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1^2 + S - B_1^2 \\ \rho u_1 u_2 - B_1 B_2 \\ \rho u_1 u_3 - B_1 B_3 \\ (E + S)u_1 - K B_1 \\ 0 \\ u_1 B_2 - u_2 B_1 \\ u_1 B_3 - u_3 B_1 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 - B_1 B_2 \\ \rho u_2^2 + S - B_2^2 \\ \rho u_2 u_3 - B_2 B_3 \\ (E + S)u_2 - K B_2 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 \\ 0 \\ u_2 B_3 - u_3 B_2 \end{pmatrix}_y + \begin{pmatrix} \rho u_3 \\ \rho u_1 u_3 - B_1 B_3 \\ \rho u_2 u_3 - B_2 B_3 \\ \rho u_3^2 + S - B_3^2 \\ (E + S)u_3 - K B_3 \\ u_3 B_1 - u_1 B_3 \\ u_3 B_2 - u_2 B_3 \\ 0 \end{pmatrix}_z = 0,$$

其中

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \frac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2),$$

$$S = p + \frac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2), \quad K = u_1 B_1 + u_2 B_2 + u_3 B_3.$$

根据物理意义, 其  $p$  与  $\rho$  应恒非负, 且通过方程形式可推出无散度 [divergence-free] 条件, 即

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

将其看作  $\phi_t + f(\phi)_x + g(\phi)_y + h(\phi)_z$ , 直接求解可知此问题中  $n_1 f'(\phi) + n_2 g'(\phi) + n_3 h'(\phi)$  的特征值为

$$u_n, \quad u_n, \quad u_n + c_f, \quad u_n - c_f, \quad u_n + c_a, \quad u_n - c_a, \quad u_n + c_s, \quad u_n - c_s,$$

记  $B = \|\vec{B}\|$ 、 $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$ , 则其中

$$u_n = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3, \quad c_a = \sqrt{\frac{K^2}{\rho}},$$

$$c_f = \sqrt{\frac{1}{2} \left( a^2 + \frac{B^2}{\rho} + \sqrt{\left( a^2 + \frac{B^2}{\rho} \right)^2 - 4a^2 \frac{K^2}{\rho}} \right)},$$

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{2} \left( a^2 + \frac{B^2}{\rho} - \sqrt{\left( a^2 + \frac{B^2}{\rho} \right)^2 - 4a^2 \frac{K^2}{\rho}} \right)}.$$

计算可得特征值最大、最小值一定为  $u_n \pm c_f$ , 从而  $\alpha$  可取为

$$\alpha = \sqrt{u_{1,m}^2 + u_{2,m}^2 + u_{3,m}^2} + c_{f,m},$$

这里  $m$  仍然代表最大值, 而  $c_{f,m}$  中的  $K^2$  可放缩为 0, 从而避免对  $K$  的估算。

其二维情况即假设所有变量对  $z$  导数为 0，得到的方程组守恒形式为

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1^2 + S - B_1^2 \\ \rho u_1 u_2 - B_1 B_2 \\ \rho u_1 u_3 - B_1 B_3 \\ (E + S)u_1 - K B_1 \\ 0 \\ u_1 B_2 - u_2 B_1 \\ u_1 B_3 - u_3 B_1 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 - B_1 B_2 \\ \rho u_2^2 + S - B_2^2 \\ \rho u_2 u_3 - B_2 B_3 \\ (E + S)u_2 - K B_2 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 \\ 0 \\ u_2 B_3 - u_3 B_2 \end{pmatrix}_y = 0,$$

于是，仍可利用上一部分的流程进行迭代计算。这时无散度条件成为

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} = 0.$$

由于欧拉方程时已经测试了较简单的算例，这里考虑一个相对复杂的算例：

**算例 13.** 对二维理想磁流体方程组，记

$$D = \{(x, y) \mid (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 < 0.1\},$$

并取  $\gamma$  为理想气体对应的 5/3，初值

$$\rho_0(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D \\ 0.6 & (x, y) \notin D \end{cases}, \quad \vec{v}_0(x, y) = 0,$$

$$\vec{B}_0(x, y) = \frac{1}{5}(x, -y, -x), \quad p_0(x, y) = 4x(1-x)y(1-y) + 0.2.$$

并保持边界处所有量值恒定，边界外  $\vec{B}$  恒为 0。

其随时间演化的效果如图 28，虽然整体模拟出了磁流体的演化，但仍可看到  $D$  的边界扩大时出现的数值振荡。

由于初值  $\vec{B}$  在间断处无法直接保证  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，我们转而考察忽略物理条件，可直接由方程推出的条件  $(\nabla \cdot \vec{B})_t = 0$ 。考虑每个小三角形上的  $\nabla \cdot \vec{B}$ ，由于  $\vec{B}$  在其上视为线性函数， $t^n$  时可直接写成  $b_{B_1}^n + c_{B_2}^n$ ，即

$$\frac{1}{2\Delta}((y_2 - y_3)B_{1,1}^n + (y_3 - y_1)B_{1,2}^n + (y_1 - y_2)B_{1,3}^n + (x_3 - x_2)B_{2,1}^n + (x_1 - x_3)B_{2,2}^n + (x_2 - x_1)B_{2,3}^n).$$

对第  $k$  个三角形，记上述结果与初始时的差为  $e_k^n$ ，并记  $\|e^n\|_\infty$  为散度误差，作图可得图 29。

从图中可发现，出于迭代过程的误差，散度为 0 难以保证，这导致了不符合物理的结果。除此以外，上述的数值不稳定对  $\rho$ 、 $p$  恒正的破坏与可能出现的数值振荡也需要解决，这将在第四章讨论。

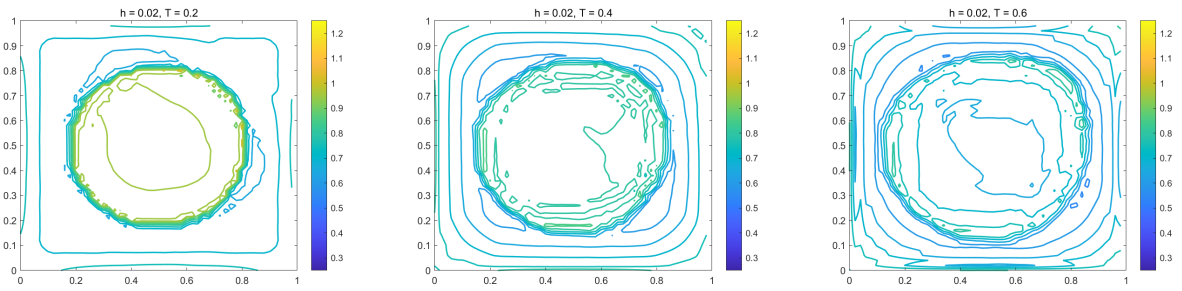


图 28: 二维 MHD 方程算例 13 演化

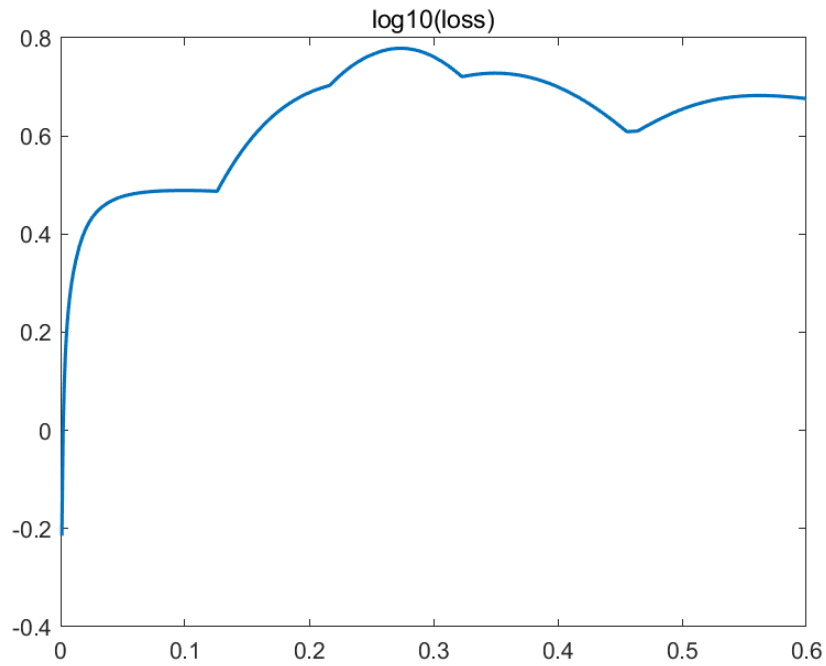


图 29: 二维 MHD 方程算例 13 散度误差演化

### 第 3 节 本章小结

本章中，我们完成了一个二维双曲守恒律组的基本离散算法。从二维守恒格式与数值通量的分析出发，选择了修正的 LF 通量后，即可以构造出二维非连续有限元格式的基本方程。进一步取定多项式空间后，方程中的部分项可以精确求解。将剩下的项进行一维或二维高斯积分估算，即能得到显式的迭代算法。

## 第 4 章 算法改进

本章我们将对上一章完成的离散算法进行改进。对二维理想磁流体方程组，上述方法有三个方面的问题：间断处容易产生数值振荡、无法保证密度和压强恒正的物理性质、无法控制磁场散度恒为 0。此外，直接计算迭代的速度相对较慢。通过引入 TVB 限制器、极值限制器与局部无散度限制器，可以达到减少数值振荡并使解符合物理的效果，而加入自适应步长后，即能加快迭代速度。

### 第 1 节 限制器

首先，我们来尝试解决数值振荡的问题，为此，需要先回到一维的情况。在一维尝试的各种格式中，只有 LW 格式会出现数值振荡，迎风格式、Godunov 格式与 LF 格式都不会出现。进一步观察可以发现，它们事实上保证了对单调初值的结果仍然是单调的，这样既可以避免数值振荡，也可以在一定程度保证极值。下面尝试以此出发构造减轻数值振荡的格式。

#### §4.1.1 TVD 限制器

由偏微分方程理论可知，双曲守恒律若初值单调，则任何时刻熵解有相同单调性<sup>[1]</sup>，若数值格式也满足此性质，则称为单调保持格式。然而，此性质一般难以验证，因此我们关注一更强的性质：

双曲守恒律的熵解满足若初值  $v_0(x) \geq u_0(x)$  处处成立，则此后一定都有  $v(x, t) \geq u(x, t)$ 。若数值格式满足此性质，即

$$v_j^n \geq u_j^n, \forall j \implies v_j^{n+1} \geq u_j^{n+1}, \forall j,$$

则称为单调格式，其等价定义为，对给定的臂长  $l, r$ ，将格式写为

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-l}^n, u_{j-l+1}^n, \dots, u_{j+r}^n),$$

后对  $H$  的每个分量非减，可微时即偏导非负。

可直接由等价定义验证单调格式一定是单调保持格式，而之前讨论的格式中，LF 格式与 Godunov 格式都是单调格式，而 LW 格式、迎风格式并非单调格式。对单调格式，若其数值解一致有界且能够收敛，则可以证明收敛结果必然为熵解。然而，对线性双曲守恒律的 Godunov 定理依然成立，即单调格式至多具有一阶截断误差。

然而，由于单调性是一个全局的性质，我们很难对格式作简单调整使其满足单调性。此外，迎风格式虽然不是单调格式，仍能保证几乎不存在数值振荡，这意味着可以寻找更弱的条件。实分析中，用全变差描述某区间 Lebesgue 可测函数的振荡强度：

$$TV(v) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int |v(x) - v(x - \varepsilon)| dx,$$

可以证明熵解满足时间增加时全变差不增，若将数值全变差定义为

$$TV(w) = \sum_j |w_{j+1} - w_j|,$$

则满足其随时间增加不增的格式，则称为 TVD [Total Variation Diminishing] 格式。

一个易于使用的判别方式是 Harten 引理<sup>[10]</sup>，即设数值格式具有增量形式（这里  $C, D$  可能与  $u$  相关）

$$u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-1/2}(u_j^n - u_{j-1}^n) + D_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

且满足  $C_{j+1/2} \geq 0, D_{j+1/2} \geq 0, C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1$ ，则直接利用三角不等式可得到其是 TVD 格式。

在 CFL 条件下，对 Roe 型迎风格式可取

$$C_{j+1/2} = \frac{\nu}{2}(1 + \text{sgn } A_{j+1/2}^n) \frac{\Delta_x f_j^n}{\Delta_x u_j^n}, \quad D_{j+1/2} = -\frac{\nu}{2}(1 - \text{sgn } A_{j+1/2}^n) \frac{\Delta_x f_j^n}{\Delta_x u_j^n},$$

从而利用 Harten 引理可验证其 TVD 性。

根据定义计算可知单调格式是 TVD 格式，TVD 格式是单调保持格式，因此 TVD 格式也可保证数值振荡可控。不过，它只能保证收敛到弱解，而非熵解，正如 Roe 型迎风格式无法刻画稀疏波。

我们希望改进之前的 DG 算法，使之满足 TVD 性质，这样即可在较好收敛性的前提下减少数值振荡，而常用的做法是加入 TVD 限制器<sup>[12]</sup>。考虑更一般的 DG 算法，在一维的迭代后，每个区间上都由多项式函数构成，记为  $p_i^n(x)$ ，以面省略上标  $n$  以方便书写。根据多项式，可以计算出第  $i$  个区间的平均值  $\bar{u}_i$  与左右端点值  $u_{i-1/2}^+, u_{i+1/2}^-$ 。对比  $\bar{u}_{i-1}$  与  $\bar{u}_{i+1}$ ， $\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}$  与  $\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i$  应能控制  $\bar{u}_i - u_{i-1/2}^+$  与  $u_{i+1/2}^- - \bar{u}$ 。

定义 minmod 函数，当其所有输入同号时，取其中绝对值最小的值，否则取 0，我们希望调整  $p_i(x)$  使得

$$(\bar{u}_i - u_{i-1/2}^+)_{\text{new}} = \text{minmod}(\bar{u}_i - u_{i-1/2}^+, \bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i),$$

$$(u_{i+1/2}^- - \bar{u})_{\text{new}} = \text{minmod}(u_{i+1/2}^- - \bar{u}, \bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i),$$

此外，我们并不希望解的单元平均值发生变化，于是新的  $\bar{u}_i$  保持不变，满足以上三个条件的修正就称为添加了 TVD 限制器。

当  $p_i(x)$  为一次函数时，有

$$\bar{u}_i = \frac{U_{2i} + U_{2i-1}}{2},$$

$$\bar{u}_i - u_{i-1/2}^+ = u_{i+1/2}^- - \bar{u} = \frac{U_{2i} - U_{2i-1}}{2},$$

于是计算得更新方式可以写为

$$U_{2i}^{\text{new}} = \frac{U_{2i} + U_{2i-1}}{2} + \text{minmod}\left(\frac{U_{2i} - U_{2i-1}}{2}, \frac{U_{2i} + U_{2i-1} - U_{2i-2} - U_{2i-3}}{2}, \frac{U_{2i+1} + U_{2i+2} - U_{2i} - U_{2i-1}}{2}\right)$$

$$U_{2i-1}^{\text{new}} = \frac{U_{2i} + U_{2i-1}}{2} - \text{minmod} \left( \frac{U_{2i} - U_{2i-1}}{2}, \frac{U_{2i} + U_{2i-1} - U_{2i-2} - U_{2i-3}}{2}, \frac{U_{2i+1} + U_{2i+2} - U_{2i} - U_{2i-1}}{2} \right).$$

我们试着给之前的浅水波方程使用 Godunov 通量的 DG 求解程序加入 TVD 修正，效果如图 30。

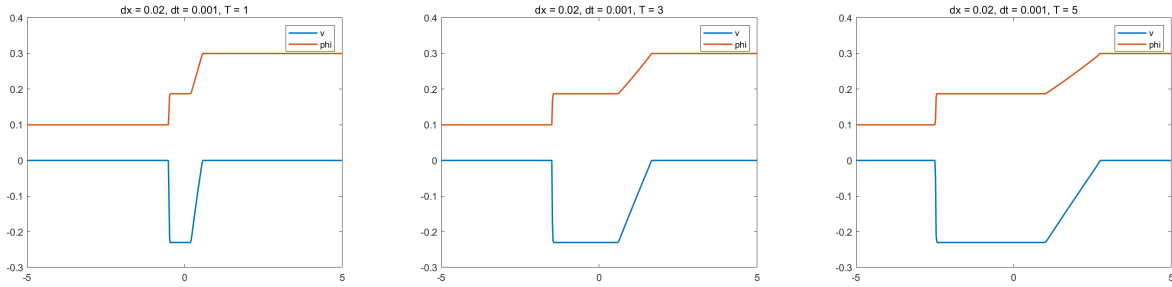


图 30: 浅水波方程 TVD 修正

对比之前的效果，可以发现数值振荡的确减少了，达到了较好的效果。不过，现实中，这样的方法会将光滑极值处也视为振荡而抹去，为此，我们必须放松要求，认为只有  $\bar{u}_i - u_{i-1/2}^+$  绝对值过大时才认为是数值振荡，否则视为自然出现。具体来说，取定某上界  $a$ ，将 minmod 函数改为

$$\tilde{m}(x, y, z) = \begin{cases} \text{minmod}(x, y, z) & |x| > a(\Delta x)^2 \\ |x| & x < a(\Delta x)^2 \end{cases},$$

即可实现抹去数值振荡与保留原斜率的平衡，这称为 TVB 限制器。取  $a = 6$ ，离散效果如图 31。

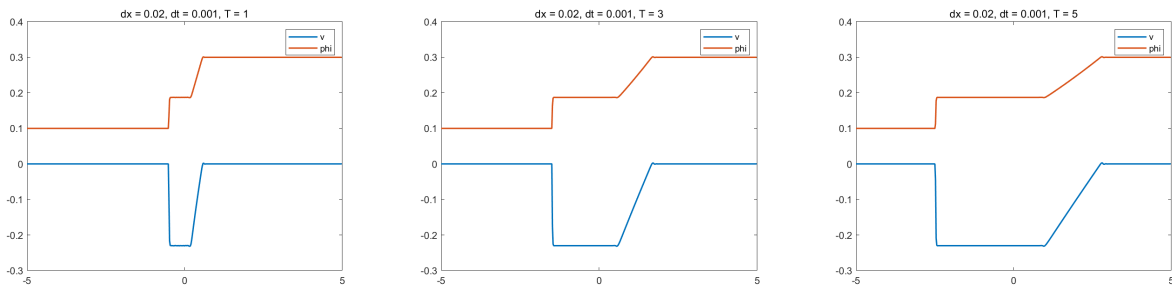


图 31: 浅水波方程 TVB 修正

很遗憾的是，这样的格式会在稀疏波处得到比 TVD 格式略大的偏差。不过，调整合适的  $a$ ，可以在保证极值不被破坏的同时尽可能减轻误差。此外，值得一提的是，事实上无需每步都进行 TVB 修正。节省算力考虑，每几步进行一次 TVB 修正仍能有较好的效果，在实际测试中，即使 10 步进行一次 TVB 修正，也能几乎抹去数值振荡。



### §4.1.2 正定性保持

为了保证  $p$  与  $\rho$  为正, 我们也可以考虑通过添加限制器的方式进行修正。考虑更一般的情况, 可以证明, 对  $\mathbb{R}$  上的一维标量守恒律  $u_t + f(u)_x = 0$ ,  $u(x, t)$  对给定  $t$  的最大值、最小值必然包含在初值最大值、最小值中, 因此我们尝试增加极值限制器以控制极值<sup>[15]</sup>, 以下假设  $u$  需要限制在的最小值  $m$ 、最大值  $M$  已给定, 考虑如何对  $p_i^n(x)$  添加限制。

与 TVD 限制器类似, 我们仍然不希望  $\bar{u}_j^n$  改变, 由此可以得到一个方程。不过, 这意味着我们需要将  $\bar{u}_j^n \in [m, M]$  作为前提条件, 而添加限制器是为了保证迭代后的  $\bar{u}_{j+1}^n \in [m, M]$ 。

估算可以证明, 只要保证  $p_i^n(x)$  在每个区间  $I$  上的高斯点处都在  $[m, M]$  中, 即可保证  $\bar{u}_{j+1}^n \in [m, M]$ , 于是可写出算法:

1. 对区间  $I_i$ , 考虑所有高斯点  $\hat{x}_q^i$ , 计算

$$\theta_q = \min \left\{ \left| \frac{M - \bar{u}_j^n}{p_i^n(\hat{x}_q^i) - \bar{u}_j^n} \right|, \left| \frac{m - \bar{u}_j^n}{p_i^n(\hat{x}_q^i) - \bar{u}_j^n} \right|, 1 \right\}.$$

2. 取  $\theta = \min_q \theta_q$ 。

3. 构造  $(p_i^n)_{\text{new}}(x) = (1 - \theta)\bar{u}_j^n + \theta p_i^n(x)$ 。

回到线性方程组的情况, 由于只要保证两端的点在区间内即可, 且两端到  $\bar{u}_j^n$  距离一致, 省略上标  $n$ , 方法可以改写为

$$\theta = \min \left\{ \left| \frac{2M - U_{2j-1} - U_{2j}}{U_{2j} - U_{2j-1}} \right|, \left| \frac{2m - U_{2j-1} - U_{2j}}{U_{2j} - U_{2j-1}} \right|, 1 \right\},$$

$$U_{2j-1}^{\text{new}} = (1 - \theta) \frac{U_{2j-1} + U_{2j}}{2} + \theta U_{2j-1},$$

$$U_{2j}^{\text{new}} = (1 - \theta) \frac{U_{2j-1} + U_{2j}}{2} + \theta U_{2j}.$$

对算例 6 通过观察未加限制器的情况得到的  $v$  与  $\varphi$  的范围, 添加限制器  $v_m = -0.23$ 、 $v_M = 0$ 、 $\varphi_m = 0.1$ 、 $\varphi_M = 0.3$  后, 得到的效果如图 32。

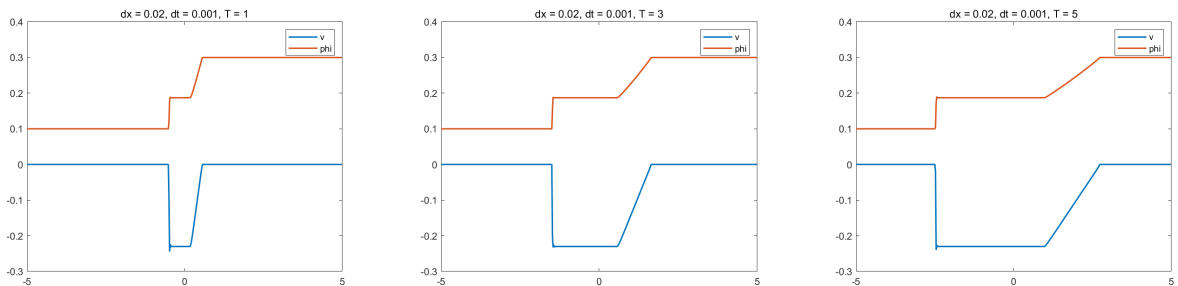


图 32: 添加极值限制器的算例 6 模拟

可以发现，在只有极值处出现数值振荡时，极值限制器的效果与 TVB 限制器类似，它保证了极值在合理的范围内。取定  $m = 0, M = +\infty$ ，即可得到保持正定的限制器。进一步地，对之前一维欧拉方程算例 10 添加限制器

$$\rho_m = 0.125, \quad \rho_M = 1, \quad (\rho v)_m = 0, \quad (\rho v)_M = 0.41, \quad E_m = 0.1, \quad E_M = 1$$

后的效果如图 33。

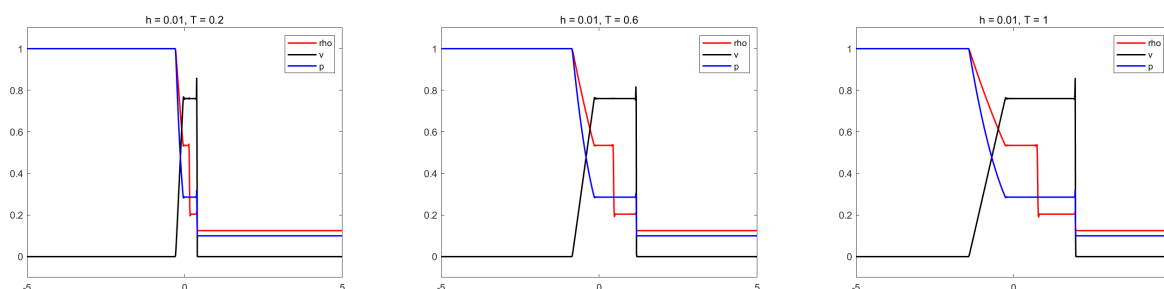


图 33: 添加极值限制器的算例 10 模拟

由此可见，极值限制器并不能很好解决非极值处的振荡，因此将极值限制器与 TVB 限制器结合后，可得到最终迭代。TVB 限制器中取  $a = 1$ ，效果如图 34。

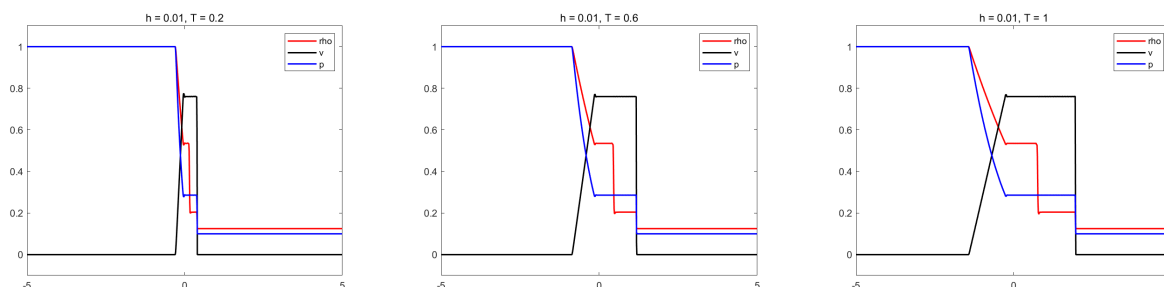


图 34: 添加两种限制器的算例 10 模拟

由此可见，两种限制器配合使用可以起到良好的效果。

## 第 2 节 符合物理的离散

回到之前二维 DG 算法的问题，我们需要解决数值振荡、 $p$  与  $\rho$  为正的保持，与磁场无散度的保证。为实现前两者，我们需要将 TVB 限制器与极值限制器推广到二维三角形网格中，并将  $p$  的极值限制更新为对能量  $E$  的调整。为实现磁场的无散度，我们可以考虑引入新的限制器处理  $B_1$  与  $B_2$ 。

### §4.2.1 三角网格限制器

极值限制器由于只涉及单个网格，推广是相对简单的。对线性情况，考虑第  $k$  个三角形中，假设  $\Phi$  在三角形顶点处值为  $\Phi_{1,2,3}$ ，对应线性方程为，则记  $\bar{\Phi} = \frac{1}{3}(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)$ ，极值限制器可以写为

$$\theta_k = \min \left\{ \left| \frac{M - \bar{\Phi}}{\Phi_k - \bar{\Phi}} \right|, \left| \frac{m - \bar{\Phi}}{\Phi_k - \bar{\Phi}} \right|, 1 \right\}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\},$$

$$\Phi_k^{\text{new}} = (1 - \theta)\bar{\Phi} + \theta\Phi_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

若只需限制  $m = 0$ ，可将  $M$  设为  $+\infty$ ，即忽略  $\theta_k$  计算中的第一项。不过，对二维欧拉或磁流体方程来说，需要限制  $p$  非负，但  $p$  是通过其他量算出的，无法简单构造极值限制器。这里采用一个简单的想法，即先算出  $p$ ，对  $p$  添加极值限制器，并由此重新解出  $E$ 。

TVB 限制器的实现要更加复杂，究其原因，在三角形网格中，我们无法直接得到一个三角形与相邻三角形的  $x$ 、 $y$  方向斜率差别。退而求其次，我们选择用相邻的不同三角形的  $x$ 、 $y$  方向斜率进行对比。假设  $\Phi$  以顶点值在三角形插值出的线性函数为

$$\Phi_k(x, y) = a_k + b_k x + c_k y,$$

并假设相邻三角形为  $k_{1,2,3}$ ，对应函数为  $\Phi_{k_{1,2,3}}(x, y) = a_{k_{1,2,3}} + b_{k_{1,2,3}}x + c_{k_{1,2,3}}y$ ，则构造  $(b, c$  为事先选好的参数)

$$b_k^{\text{new}} = \begin{cases} \text{minmod}(b_k, b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}) & |b_k| > b\Delta \\ b_k & |b_k| < b\Delta \end{cases},$$

$$c_k^{\text{new}} = \begin{cases} \text{minmod}(c_k, c_{k_1}, c_{k_2}, c_{k_3}) & |c_k| > c\Delta \\ c_k & |c_k| < c\Delta \end{cases}.$$

由于我们已经通过平移将三角形的中心放在了  $(0, 0)$ ， $a_k$  恰好就是保持不变的  $\bar{\Phi}$ ，于是只需要对应调整  $b_k$  与  $c_k$ ，即能保证斜率得到限制。

在欧拉方程的离散中增添参数  $b = c = 1000$  的 TVB 限制器与  $\rho$ 、 $p$  保正的限制器后，对算例 12  $x$  方向传播的算例效果如图 35，可以发现原本的数值振荡得到了明显的抑制。对另一个算例，取  $b = c = 5000$ ，效果如图 36，也可发现对数值振荡的消除效果明显。

### §4.2.2 无散度限制器

添加了 TVB 限制器与极值限制器后，数值振荡已经得到了较好的解决。接下来，为了保证解符合物理，需要对  $\nabla \cdot \vec{B}$  进行限制，我们仍然可以采用增添限制器的手段<sup>[7]</sup>。

考虑迭代后形成的任何  $B_1, B_2$ ，假设其在第  $k$  个三角形的线性函数为

$$B_{1,k}(x, y) = a_{k,1} + b_{k,1}x + c_{k,1}y,$$

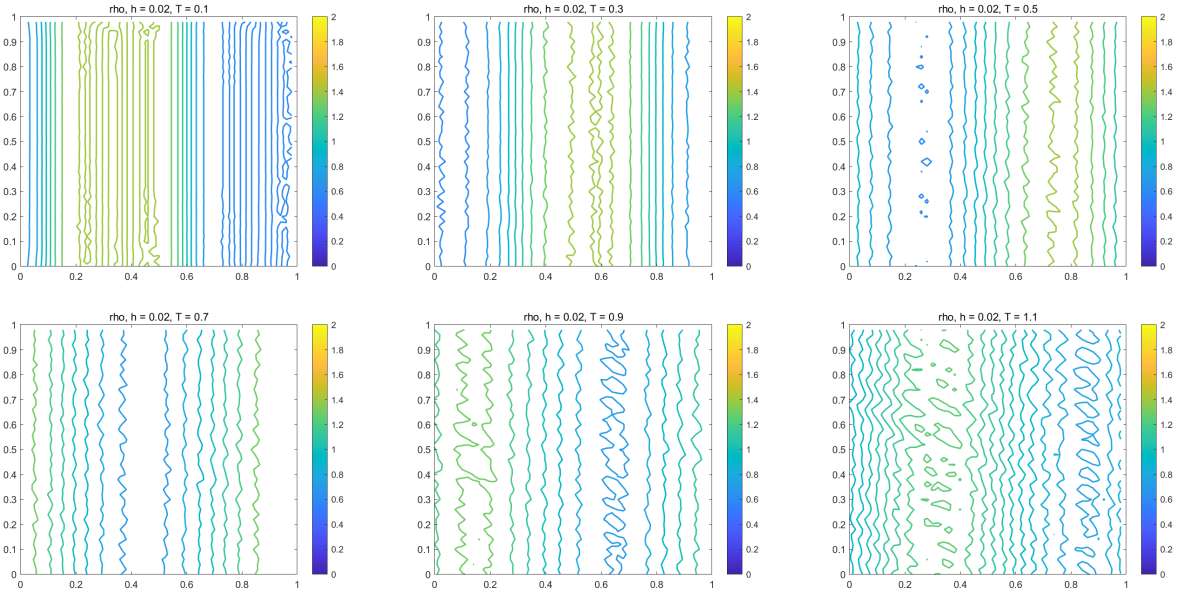


图 35: 添加二维限制器的算例 12 模拟

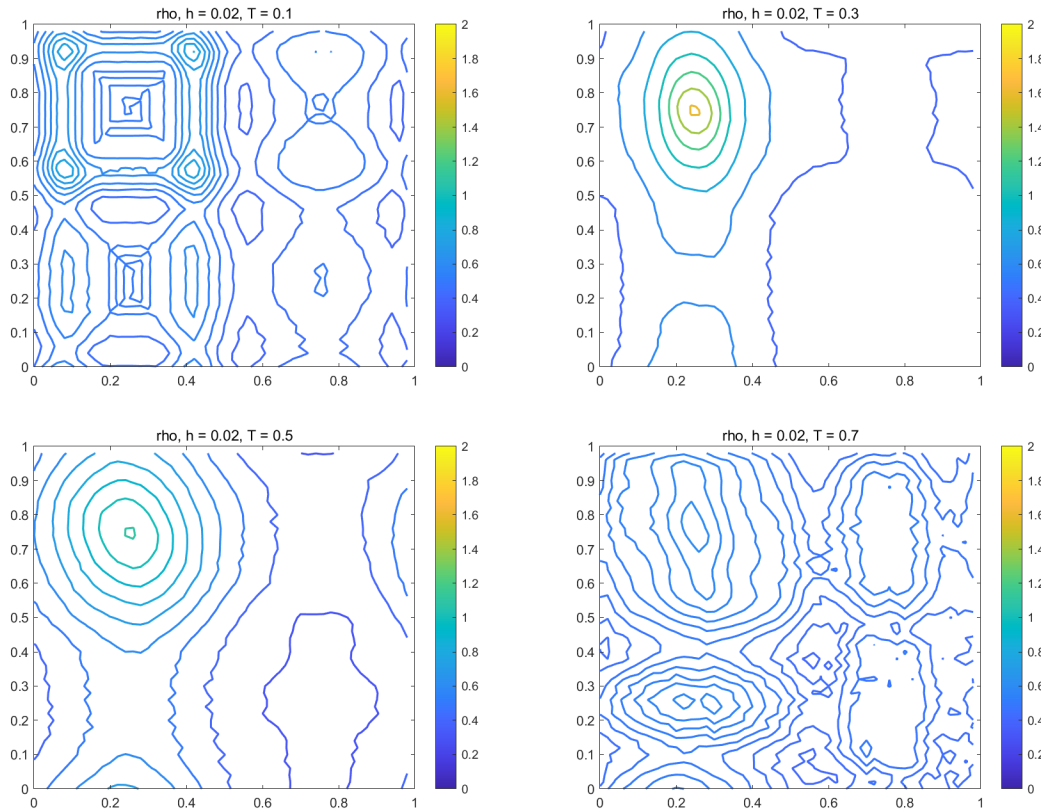


图 36: 添加二维限制器的算例 11 模拟

$$B_{2,k}(x, y) = a_{k,2} + b_{k,2}x + c_{k,2}y,$$

则散度为 0 的条件即为  $b_{k,1} + c_{k,2} = 0$ 。

由于实际偏差不应太大，可直接采用平移的方案，成为

$$b_{k,1}^{\text{new}} = \frac{b_{k,1} - c_{k,2}}{2}, \quad c_{k,2}^{\text{new}} = \frac{c_{k,2} - b_{k,1}}{2}.$$

在 TVB 限制器后进一步利用此限制器，即可实现散度恒为 0。事实上，可以对初值也添加此限制器保证初始散度的合理性。更一般地，对每个三角形上取多项式的情况，可通过调整非零项系数使得满足 TVB 限制后的斜率要求，并调整最高次项系数使得极值或无散度限制得到满足。考虑类似之前的算例：

**算例 14.** 在算例 13 中取循环边界条件，且初值  $\rho_0$  外侧从 0.6 变为 0.7，其他初值保持不变。

其演化效果如图 37，可以看出确实避免了数值振荡的出现。

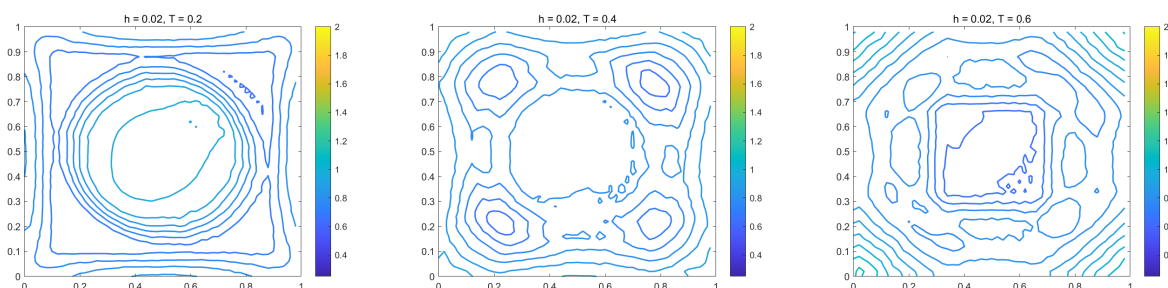


图 37: 添加三种限制器的算例 14 模拟

考虑更极端的例子：

**算例 15.** 在算例 14 中将压强初值修改为  $1.2 - 16x(1-x)y(1-y)$ ，且  $\vec{B}$  初值变为算例 14 的  $\frac{5}{3}$  倍，其余初值与边界条件保持不变。

这是一个向中间汇聚的波，在之前的代码中由于  $p$  与  $\rho$  很快不再为正而无法正确模拟，而加入了限制器后的迭代效果如图 38。

可以发现，此系统反映了由压强分布引起的汇聚，亦包含磁场导致的偏移，整体呈现明显的波动特性。

### §4.2.3 自适应步长

在添加了无散度、极值与 TVB 限制器后，虽然迭代中的数值误差得到了减小，但迭代的时间显著延长了。为此，我们希望通过一些方法改进迭代的速度。除了如之前所说每隔几步再进行 TVB 修正以外，结合一些自适应的优化策略也是可选的方案。例如，可以采用类似信赖域的思路，以  $\rho$ 、 $p$  在进入极值限制器前是否有违反正定性作为条件，若不存在违反，则

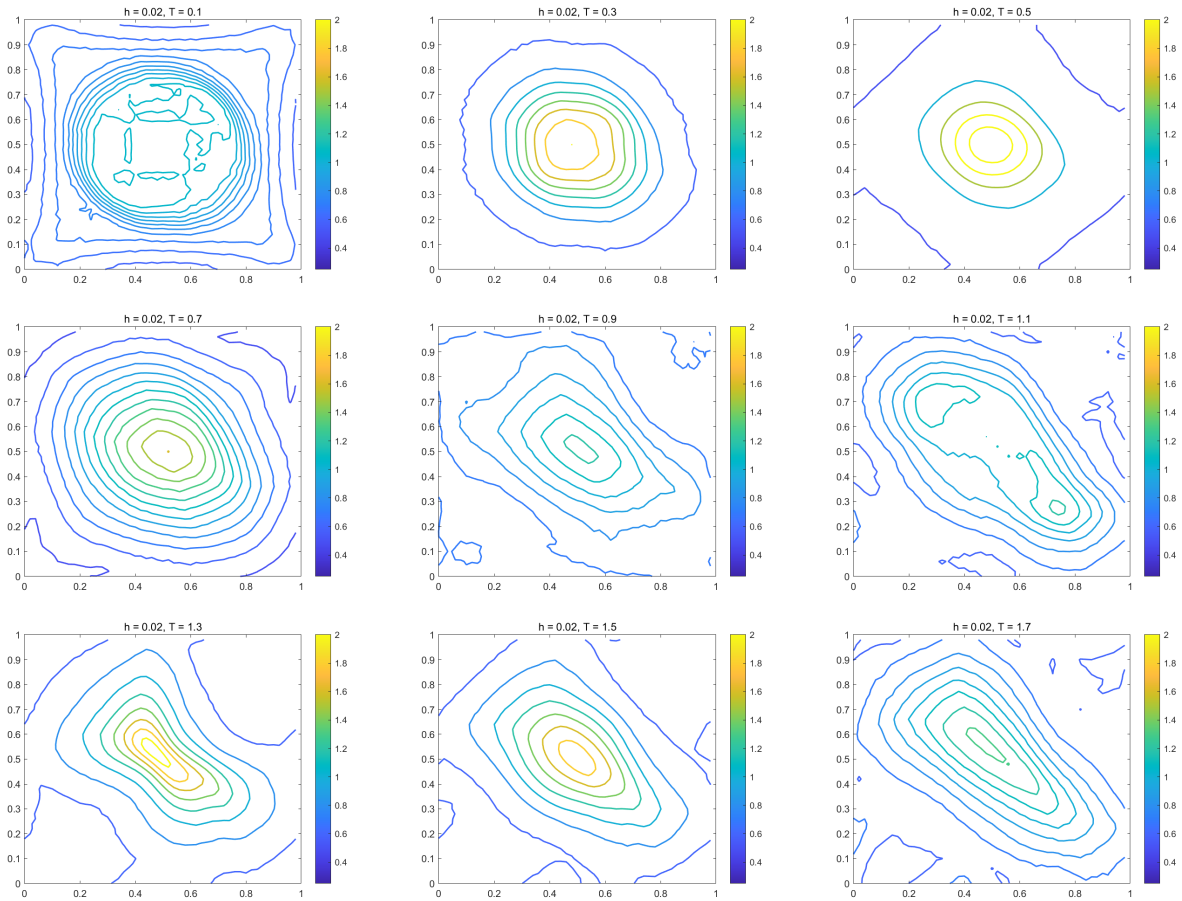


图 38: 高马赫数二维 MHD 方程算例 15 模拟

认为步长可以扩大，按某比例放大，直至到达最大步长；否则，缩小步长以保证迭代的精确性。取初始步长为 0.0001，假设不违反则放大为  $\min(1.2s, 0.003)$ ，而违反正定性则缩小为  $\frac{5}{6}s$ ，对上节算例的迭代效果如图 39，可以看到，到达同样时间的迭代步数大幅减小（图 38 中迭代步长恒为 0.0001，每两张图片均相隔 200 步迭代），且并没有损失波动信息。

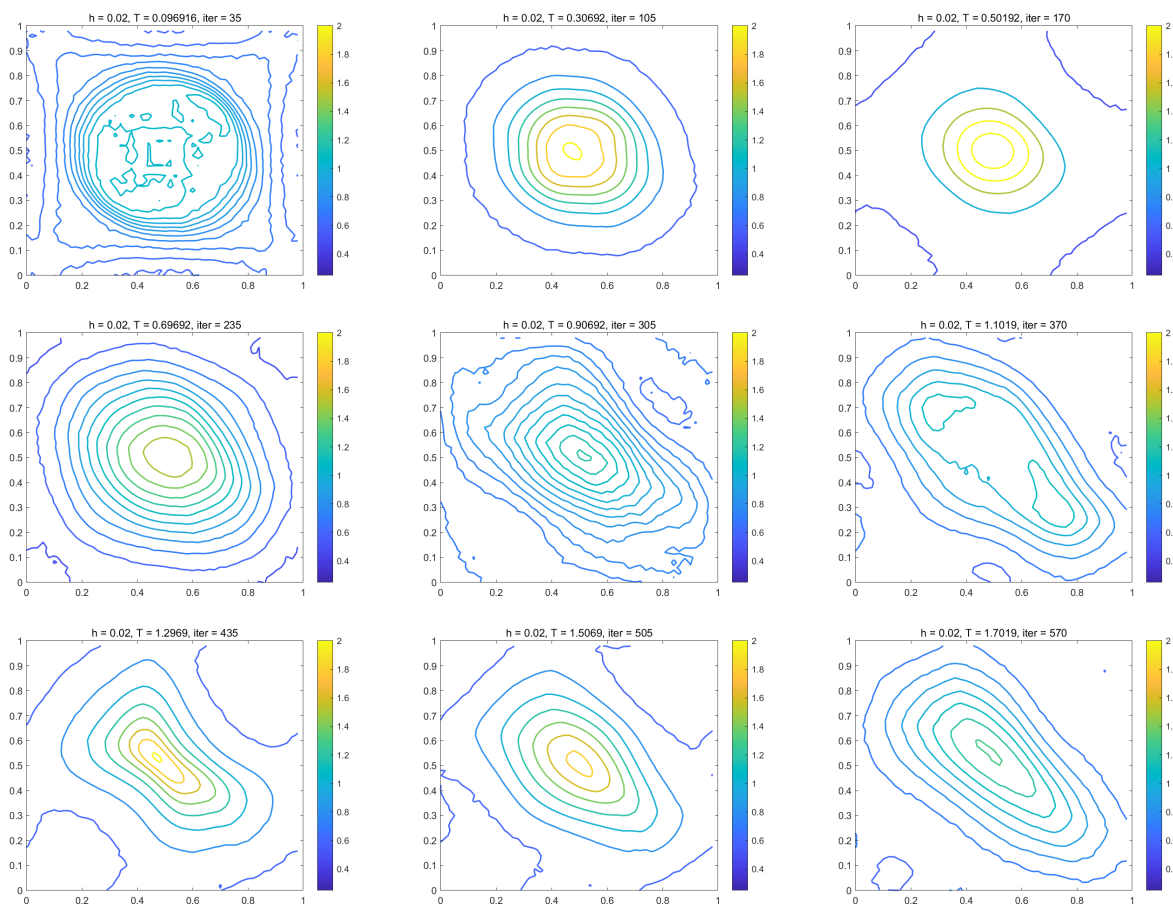


图 39: 自适应步长高马赫数二维 MHD 方程算例 15 模拟

除此以外，事实上限制器本身也可以通过优化的方式进行构造，以达到更好的效果<sup>[14]</sup>。不过，在当前的例子中，由于需要与三角形网格适配，用优化构造限制器反而可能减慢迭代。

### 第 3 节 本章小结

本章先从一维的情况出发介绍了 TVD、TVB 与极值限制器的来源和构造，并展示了一维欧拉方程加入限制器的效果。接着，将限制器推广到二维三角网格中，即可以对上章构造的二维理想磁流体方程组应用。通过极值限制器是否被触发可以得到数值近似的可信程度，从而由此出发进行步长自适应调整，即能得到符合物理且加速的迭代。



## 第 5 章 总结与讨论

### 第 1 节 讨论

#### §5.1.1 存在问题

虽然此方法已经达到了相对较好的效果，仍有一些问题需要解决：

1. 理论收敛阶问题。虽然原本的 DG 方法可以直接利用有限元的分析得到收敛性，在添加了几种限制器后，数值性态会变得更加复杂，需要进一步的理论分析。
2. 高阶多项式空间的性态。本文主要实现了二维情况的线性函数 DG 方法，对更高阶的情况只给出了理论算法，并未进行实验分析，对收敛情况与收敛阶需要进一步的研究。
3. 计算代价问题。总体来说，二维情况进行一步迭代的时间仍然偏高，导致实际的拟合效率依然偏低，尤其是网格加密时，计算代价会以平方量级提升。

#### §5.1.2 优化方向

基于这些问题与方法的特性，可以给出一些可能的优化方向：

1. 进一步的理论分析。经过单个限制器的效果可以理论分析，结合 DG 方法的迭代过程可以对每个三角形上的误差进行控制，从而可以理论分析出收敛性。不过，需要更精细的工具确定收敛的阶数。
2. 对离散网格的实验。除了简单的直角三角形网格之外，还可以尝试间断处加密的网格，或是以一些标准评价进行自适应网格的构造，观察离散方法在不同网格的效果。
3. 更多有限元空间的尝试。对高阶多项式空间，其拟合效果更加精确，但数值振荡更加严重，结合限制器后，可进行更深入的理论、实验分析。
4. 限制器的优化。这里限制器的构造都采用了最基本的方式，事实上可以结合周围条件进行更准确的构造，减小刻画过程中信息的损失。
5. 邻接部分向量化。虽然算法实现中绝大部分步骤已经完成了向量化，邻接部分仍然需要通过一个个填入进行计算，可以考虑利用更好的数据结构将邻接部分亦向量化，优化迭代速度。

### 第 2 节 总结

通过对离散方法与数值通量的分析、实验，我们最终选择了三角网格非连续有限元法进行二维守恒型方程的离散，并在结合限制器等思路后得到了二维理想磁流体方程组的最终迭代算法：



1. 给定三角网格  $T$  与对应的邻接关系、高斯积分点个数  $N$ 、 $\phi$  各分量初始值与边界条件。
2. 初始化与预计算：
  - (a) 按给出的初值对  $\phi$  进行初始化；
  - (b) 计算三角形网格的网格参数  $T_{xx}$ 、 $T_{yy}$ 、 $T_{xy}$ 、 $\Delta$  与每条边的  $n_1, n_2$  等；
  - (c) 根据  $N$ ，计算所有内部与边界上的高斯点位置及对应权重；
  - (d) 通过高斯点位置计算插值权重，即高斯点值由三角形三个顶点或边界两个顶点生成的权重。
3. 计算数值通量相关积分：
  - (a) 根据边界插值权重计算出边界高斯点附近的  $\phi_-$  与  $\phi_+$ ；
  - (b) 通过  $\phi_-, \phi_+$  估算每个边界高斯点的  $\alpha$ ；
  - (c) 计算数值通量在每个边界高斯点的值  $\hat{F}_k^n$ ；
  - (d) 乘权重求和计算出  $F_k^n$ 、 $F_{xk}^n$  与  $F_{yk}^n$ 。
4. 计算通量函数积分：
  - (a) 通过内部插值权重计算出内部高斯点的  $\phi$ ；
  - (b) 将  $\phi$  代入通量函数，乘权重求和计算出  $f_k^n$  与  $g_k^n$ 。
5. 迭代最终求解：
  - (a) 由上述数值积分结果计算出  $a_k$ 、 $b_k$ 、 $c_k$ 。
  - (b) 对每个  $k$ ，以  $a_k$ 、 $b_k$ 、 $c_k$  代入迭代公式求解出  $\phi_k$ 。
  - (c) 更新边界使得符合边界条件。
6. 修正为物理解：
  - (a) 对所有分量添加 TVB 限制器，避免数值振荡。
  - (b) 对  $B_1$ 、 $B_2$  分量添加无散度限制器，确保散度为 0。
  - (c) 对  $\rho$  添加极值限制器，确保其非负。
  - (d) 由各分量计算出  $p$ ，并对  $p$  添加极值限制器确保其非负，反解出  $E$  作为  $E$  的最终值。
7. 检验结果，并根据迭代效果确定新的步长，回到第三步。

经实际检验，此算法可以准确捕获磁流体演化，且对间断初值仍能起到较好的效果。给定间断处更精细的三角网格后，算法可以实现更好的收敛。事实上，算法中物理解的修正与通过解析情况的显式解进行的迭代过程，也可以给更复杂的守恒律离散方法提供思路。

## 参考文献

- [1] 张强, 2017. 偏微分方程的有限差分方法 [M]. 南京: 科学出版社.
- [2] ALFVÉN H, 1942. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves[J]. *Nature*, 150(3805): 405-406.
- [3] CHRISTLIEB A J, ROSSMANITH J A, TANG Q, 2014. Finite difference weighted essentially non-oscillatory schemes with constrained transport for ideal magnetohydrodynamics[J/OL]. *Journal of Computational Physics*, 268: 302-325. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999114001703>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.03.001>.
- [4] COCKBURN B, SHU C-W, 1991. The Runge-Kutta local projection P1-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws[M/OL]. 337-361. <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.1988-3797>.
- [5] COCKBURN B, SHU C-W, 1998. The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation Laws V: Multidimensional Systems[J/OL]. *Journal of Computational Physics*, 141(2): 199-224. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999198958922>. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5892>.
- [6] COURANT R, FRIEDRICHS K, LEWY H, 1928. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik[J]. *Mathematische Annalen*, 100: 32-74.
- [7] FU P, LI F, XU Y, 2018. Globally divergence-free discontinuous Galerkin methods for ideal magnetohydrodynamic equations[J]. *Journal of Scientific Computing*, 77: 1621-1659.
- [8] HUSSAIN F, KARIM M, AHAMAD R, 2012. Appropriate Gaussian quadrature formulae for triangles[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computation*: 24-38.
- [9] LEVEQUE R J, 2002. Cambridge texts in applied mathematics: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems[M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- [10] LEVEQUE R J, 2011. Numerical Methods for Conservation Laws[M]. [S.l.]: 世界图书出版公司.
- [11] SHAN X, MONTGOMERY D, CHEN H, 1991. Nonlinear magnetohydrodynamics by galerkin-method computation[J]. *Physical Review A*, 44(10): 6800.
- [12] SHU C-W, 2009. Discontinuous Galerkin methods: general approach and stability[J]. *Numerical solutions of partial differential equations*, 201.

- [13] TORRILHON M, 2005. Locally divergence-preserving upwind finite volume schemes for magnetohydrodynamic equations[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(4): 1166-1191.
- [14] VAN DER VEGT J J, XIA Y, XU Y, 2019. Positivity preserving limiters for time-implicit higher order accurate discontinuous Galerkin discretizations[J]. *SIAM journal on scientific computing*, 41(3): A2037-A2063.
- [15] ZHANG X, SHU C-W, 2010. On maximum-principle-satisfying high order schemes for scalar conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 229(9): 3091-3120.

## 致谢

在科大数学系学习的四年是我生命中很重要的四年。除了学会了诸多以前从未了解过的数学知识外，也认识了很多值得尊敬的老师与志趣相投的同学们。

这篇毕业论文能够完成，首先要感谢我的导师徐岩教授。在学习了她的数值分析后，我对偏微分方程的离散求解产生了浓厚的兴趣，并在教授的悉心指导下一步步学习了守恒律方程的离散，并从简单到复杂地完成了磁流体方程的模拟。

此外，我还要感谢四年间所有教导过我的老师们。王作勤老师让我感受到了数学是严谨的，但同时也是有趣的；王新茂老师让我打好了线性代数的基础，并对数值线性代数有了基本的了解；杨周旺老师与连德富老师让我对优化的理论与应用有了不少熟悉感，也明白了“求最小值”这个看似简单的问题有着多少内涵；还有并未带过我的课，但进行过交流的袁业飞老师、胡茂彬老师……老师们除了教会我知识，也让我见到了数学与数学研究的不同可能。

最后，还需要感谢我的父母和同学们，尤其是音乐剧社的朋友们。大家在交流问题时给我的诸多帮助让我更好地进行了课题的学习、研究，如果没有大家一直以来的支持，这篇论文难以完成。