5. 设 f 在 $[a,b]$ 可积，$\int_a^b f(x)dx > 0$.
证明：必有 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ s.t. $\forall x \in [\alpha,\beta]$
$f(x) > 0$.

Pr: 反证：假设结论不对
则对 $[a,b]$ 任一分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上存在 ξ_i 使 $f(\xi_i) \le 0$.

$$\underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le 0.$$

$$I = \underline{I} = \sup_T \underline{S}(T) \le 0. \quad 矛盾!$$

7. $F(x) = \sin x + 1$

8. ①

$$F(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^{n}+\cdots+a_n x$$

$$F(0)=F(1)=0$$

$$\Rightarrow \exists \xi \ \text{s.t} \ F'(\xi)=0.$$

② $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_0$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_0}{1}=0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$在$(0,1)$至少一个零点,

P219

10. $F(x)=\int_0^x f(t)\,d\frac{t}{x}$ $\qquad x\neq 0$ 时

$$=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow F'(x)=\frac{f(x)x-\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$$

$$\overset{f\text{连续}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}\underset{\substack{\uparrow\\ f'(0)\text{定义}}}{=}\frac{f'(0)}{2}$$

$$故\ F'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{f'(0)}{2}, & x=0\end{cases}$$

11. (1) F 在 $\mathbb{R}\backslash\{\pm1\}$ 可导 $F'(x)=f(x)$

$x=1$ 时

$$\lim_{x\to1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\int_x^1 f(t)dt}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\int_x^1 e^{-t^2}dt}{1-x}$$

$$\leq e^{-\frac{1}{2}}$$

故 $F(x)$ 在 $x=1$ 处不可导

同理 $F(x)$ 在 $x=-1$ 处不可导.

(2) $f(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x \cos \frac{1}{t} \, dt}{x}$$

12. 设 f 处处连续. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b\left(f(x+h)-f(x)\right)dx=f(b)-f(a)$$

Pr:

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0.$$

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\right|$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)\,d\cos\lambda x$$

$$=\left|-\frac{1}{\lambda}f(x)\cos\lambda x\Big|_a^b+\frac{1}{\lambda}\int_a^b\cos\lambda x\,f'(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{1}{\lambda}|f(b)\cos\lambda b-f(a)\cos\lambda a|$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b\cos\lambda x\,f'(x)\,dx\right|$$

$\exists M>0$ s.t.

$|f'(x)|\leq M \quad x\in[a,b]$

$\Rightarrow$ 原式 $\leq\frac{1}{\lambda}M_1+\frac{1}{\lambda}M_2$

$\Rightarrow$ 原式 $\xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0$

14. 证: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|dt = \frac{2}{\pi}$

Pr: $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$

$= -\int_0^{\pi} d\cos x = \cos 0 - \cos\pi = 2.$

$\left|\frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|dt - \frac{2}{\pi}\right|$

$= \left|\frac{\int_0^{n\pi} |\sin t|dt + \int_{n\pi}^{n\pi+\theta} |\sin t|dt}{n\pi+\theta} - \frac{2}{\pi}\right|$

$\le \left|\frac{2n}{n\pi+\theta} - \frac{2}{\pi}\right| + \frac{\int_{n\pi}^{n\pi+\theta} |\sin t|dt}{n\pi+\theta}$

$\le \frac{1}{x} + \left|\frac{2\theta}{(n\pi+\theta)\pi}\right|$

$= \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi x} \xrightarrow{x\to\infty} 0.$

16. 设 f 在 $x=x_0$ 处取得最大值 M

则对 $\varepsilon>0$. $\exists\ \delta$ s.t

$$f(x) \geq M-\varepsilon \qquad \forall \quad x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$$

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\geq \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\geq \left[(M-\varepsilon)^n\cdot 2\delta\right]^{\frac{1}{n}} = (M-\varepsilon)\cdot(2\delta)^{\frac{1}{n}}$$

令 $n\to+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)\,dx \geq M-\varepsilon$$

由 ε 任意性

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)\,dx = M$$

19. 设 f 在 $[0,1]$ 上有连续导数. 证:

对 $\forall\ a \in [0,1]$

$$|f(a)| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f'(x)|\,dx$$

Pr:

$$f(a) - \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= f(a) - f(\xi)$$

$$= \int_\xi^a f'(t)\,dt$$

$$|f(a)| = \left|\int_0^1 f(x)\,dx + \int_\xi^a f'(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f'(x)|\,dx$$

21. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微，且 $|f'(x)| \le M$. 证明：对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$,

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{M}{2n}$$

Pr: 原式

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(x) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right] dx\right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} M \cdot \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|x - \frac{k+1}{n}\right| dx$$

$$= M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}$$

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$$

$\sum(-1)^{n+1}a_n$ 收敛.

Pr: $\exists N\in\mathbb{N}_+$ st $n>N$时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{\lambda}{2n}$$

$\Rightarrow a_n>a_{n+1}$ $\{a_n\}$在$n>N$时单减

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda}{2n}\right)$ 发散

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 发散

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}a_n=0.$