第七次习题课.

第12次作业:

微积分导论 9-12.

9. $y=\frac{2}{3}x^3+2x+1$

10. $yx-y+1=0$

11. (1) $f'(x)=f(x)=-\frac{1}{e^x(x+1)}$

(2) 令 $\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$

$h(x)=f(x)-1$

证明 $\varphi'(x)>0$ 而 $\varphi(0)=0$

$h'(x)<0$ $h'(0)=0$

12. (1) $y=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt$

(2) $|y(x)|=|e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt|$

$=e^{-ax}\int_0^x |f(t)|e^{at}dt$

$\leq e^{-ax}\cdot k\int_0^x e^{at}dt$

$=\frac{k}{a}(1-e^{-ax})$

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ 记 $S_n=a_1+\cdots+a_n$.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 收敛 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_1}=\frac{1}{S_1}\sum_{n=1}^{\infty}\cancel{a_n}=\frac{S}{S_1}$

单调递增有上界 收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散 $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$ $\forall m>N$ $\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{S_n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{S_n}=\sum_{n=N+1}^{m}\frac{a_n}{S_n}>\sum_{n=N+1}^{m}\frac{a_n}{S_m}=\frac{S_m-S_N}{S_m}$

$=1-\frac{S_N}{S_m}$

→对∀固定N 令 $m\to\infty$ 有

$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{S_n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{S_n}\right)>\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{S_N}{S_m}\right)=1$ 与 Cauchy 收敛准则矛盾.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛: $\frac{a_n}{S_n^2}<\frac{a_n}{S_n\cdot S_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$ 再求和即可.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ $(\alpha>1)$ 收敛: $\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}(S_n-S_{n-1})$

$=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n$ $(S_{n-1}<\xi<S_n)$

↑

中值定理

$x^{1-\alpha}-y^{1-\alpha}=(1-\alpha)\cdot\xi^{-\alpha}\cdot(x-y)$

其中 $x>y>0$ $\xi\in(y,x)$

$\therefore \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}>(\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)<\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}$ 有界

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 有界 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛.

习题7.1

1.(3) $\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \ln\frac{n}{n+1} + \ln\frac{2n+1}{2n-1}$

求和即可.

2.(1) 发散 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1$

(2) 收敛 当$n\to\infty$时 $\frac{1}{n\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

(3) 发散 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \sim \frac{1}{2n}$

(4) 发散 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n \neq 0$ (反证: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = a$

$\cancel{\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin\frac{n-1+n+1}{2}\cos\frac{n-1-(n+1)}{2}}$

$\cancel{= 2\sin n\cos 1}$

~~令$n\to\infty$ 即 $a-a = 2a\cos 1 \Rightarrow a \neq 0$~~

~~而 $\sin 2n = \cos n \cdot \sin n$~~

$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\cos\frac{n+1+n-1}{2}\sin\frac{n+1-(n-1)}{2} = 2\cos n\cdot\sin 1$

令$n\to\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0$　　而 $\sin 2n = \cos n\cdot\sin n$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = 0$

而 $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ 矛盾.

(5) 收敛 $\sim \frac{2^n}{3^n}\cdot\pi$

(6) 发散. $\sim \frac{1}{n}$

(7) 收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \frac{1}{2}$

(8) 收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{(n+\frac{1}{n})^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n+\frac{1}{n}} \to 0$

(15) 收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\cos\frac{1}{n})^{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}[1+(\cos\frac{1}{n}-1)]^{n^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}[1+(\cos\frac{1}{n}-1)]^{\frac{1}{\cos(\frac{1}{n})-1}(\cos(\frac{1}{n})x^2-x^2)}$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(\frac{1}{n})\frac{x^2}{n}-\frac{x^2}{n}]} = -\frac{1}{2}$

$= e^{-\frac{1}{2}} < 1$

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\cdot n}{n+1} = a$

$0<a<1$时 收敛

$a>1$时 发散

$a=1$时 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{e} \neq 0$ 发散.

3. 逆命题: $(-1)^n$

若$a_n>0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

4. (1) 回答

(2) 错 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$　记T_n为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$的部分和　$T_n=S_n+na_{n+1}$

S_n为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ . . .　　$S_n=T_n-na_{n+1}=T_n-(n+1)a_{n+1}+a_{n+1}$

$\Rightarrow S_n$极限存在.

6. 求 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n} b_n$

则 对 $C_n=a_{n+1}-S_n$

$C_n-C_{n+1}=a_{n+1}-a_n+S_{n+1}-S_n$

$=a_{n+1}-a_n-b_n<0$

$\Rightarrow C_n\downarrow$

又 $C_n>-\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-S$

$\therefore \{C_n\}$ 收敛

$a_{n+1}=C_n+S_n$ $\therefore \{a_n\}$收敛.

8.(1) 0 $\sum\frac{1}{n!}$收敛.

(2) 0 $\sum\frac{1}{p^k}$ 收敛

微导 p280 4.

(1) $\lambda_n=a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}$ $(a>b>0)$

~~$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}\frac{(\frac{a}{b})^{n}-1}{\frac{1}{n}}$~~

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}b^{\frac{1}{n}}\frac{(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}b^{\frac{1}{n}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x\ln\frac{a}{b}}-1}{x}$

$=1\cdot\ln(\frac{a}{b})=C$

$\therefore\sum\lambda_n$发散

(2) $\lambda_n=(a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}})+(a^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}})$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\frac{1}{n}}=\ln\frac{a^2}{bc}$ $\therefore\sum\lambda_n$发散.

补充题: $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lambda>0$ 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛.

用L判别法. $\exists N$ $n>N$时 $|n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-\lambda|<\frac{\lambda}{2}\Rightarrow 1+\frac{\lambda}{2n}<\frac{a_n}{a_{n+1}}<1+\frac{3\lambda}{2n}$

$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1>0$ 不妨设 $a_n>0$ ($a_n<0$时 取 $-a_n$即可)

则 a_n递减

$\frac{a_{N+1}}{a_{n+1}}=\frac{a_{N+1}}{a_{N+2}}\cdots\cdots\frac{a_n}{a_{n+1}}>(1+\frac{\lambda}{2(N+1)})\cdots(1+\frac{\lambda}{2n})>\underbrace{(1+\frac{\lambda}{2(N+1)}+\cdots+\frac{\lambda}{2n})}_{}$ 发散

$\therefore\frac{a_{N+1}}{a_{n+1}}\to\infty\Rightarrow a_{n+1}\to0$

$\therefore a_n$单减且$\to0$. 由L⋯

第13次作业.

习题7.1 10. 证 $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 单减且$\to0$.

12. (1) 绝对. $|a_n|$收敛.

(2) 绝对. $|a_n|$收敛

(3) 条件 (可去掉前面有限项再判断)

(4) 条件

(5) 条件

(6) $p>1$ 绝对　　(7) 条件　　(8) 绝对.

$0<p\le 1$ 条件

$p<0$ 发散.

$|a_n|=\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})$

记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$

则 $S_n=1+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)=\gamma$ 欧拉常数.

(9) 绝对 $|a_n|=1-\cos\frac{p}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{\frac{p^2}{2n^2}}=1$

(10) $|a_n|=(1-\cos\frac{1}{n})^p$

$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{(\frac{1}{2n^2})^p}=1$

$\therefore (1-\cos\frac{1}{n})^p$ 与 $(\frac{1}{2n^2})^p=\frac{1}{2^p n^{2p}}$ 收敛性相同.

$p>\frac{1}{2}$ 时 绝对收敛.

$0<p\le\frac{1}{2}$ 时 条件收敛.

$p<0$ 时 发散 不收敛.

15. (1) 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$

$x\neq 0$ 时.

$S_n=\frac{\cos(nx+\frac{x}{2})-\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$

$|S_n|<\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}=C$ 有界.

$\because$ 又 $\frac{1}{n}\downarrow\to 0$

$\therefore$ 由 Dirichlet 判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 收敛.

(2) 同上 收敛

(3) 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$

拆开 先看 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n}}\downarrow$ 且 $\to 0$　$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ 有界　$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛

又 $C_n=(1+\frac{1}{n})^n\uparrow$ 且 $\to e$　$\therefore$ 由 Dirichlet 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n-1}{n+1})\frac{1}{\log\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{2}{n+1})\frac{1}{\log\sqrt{n}}$

$=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log\sqrt{n}}}_{\text{递减}\to 0}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\underbrace{\frac{2}{n+1}\frac{1}{\log\sqrt{n}}}_{\text{递减}\to 0}$

收敛　　　　收敛

$\therefore$ 收敛.

习题 7-2 (1) $(0,+\infty)$　$=0,<0$ 显然发散　$x>0$ 时 $ne^{-nx}=o(\frac{1}{n^2})$ 在 n 适当多大时.

(3) $[0,+\infty)$

(5) $0<x<6$　$(0,6)$　$0<x<6$ 时 $\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}\sim\frac{(x-3)^n}{3^n}$ 收敛.

$x\notin(0,6)$ 时 极限不为 0 不收敛

(7). $(0,+\infty)$

$x>0$时 $\sum \cos nx$ 有界

$e^{-\frac{1}{nx}}$ ↓且 $\to 0$.

$x=0$时 显然

$x<0$时 极限不为0.

3. 一致收敛 网络.

若其有控制级数 $\{a_n\}$

则 $a_n \geq |u_n(x)| = \frac{1}{n}$

而 $\sum \frac{1}{n}$ 发散.

4. (2) $\frac{1}{2^n(1+(nx)^2)} \leq \frac{1}{2^n}$ ∴一致收敛.

(4) 一致收敛 记 $f(x)=\frac{x^2}{e^{nx}}$

$f'(x)=\frac{2xe^{nx}-nx^2e^{nx}}{e^{2nx}} = \frac{(2x-nx^2)}{e^{nx}} = \frac{x(2-nx)}{e^{nx}}$

$f(x)$先↑后↓ $f(x)_{max}=f(\frac{2}{n})=\frac{4}{n^2}\cdot e^{-2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} x^2\cdot e^{-nx} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{e^2\cdot n^2}}_{收敛}$.

(6) 不一致收敛.

(反证 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 一致收敛, 则 $\overset{端点处}{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{1}{n}$ 必收敛 矛盾)

(8) 一致收敛 由(4) $\frac{x^2}{(ne^n)^x} = \frac{x^2}{n^x e^{nx}} \leq \frac{x^2}{e^{nx}} \leq \frac{x^2}{e^{nx}}$

补充(1). $\left|\int_1^2 \sin(nx-\frac{1}{x})dx\right| < \frac{2}{n}$

令 $t=x-\frac{1}{nx}$ 则 $dt=(1+\frac{1}{nx^2})dx$

即 $x'(t)=\frac{1}{1+\frac{1}{nx^2}}<1$

$\int_1^2 \sin(nx-\frac{1}{x})dx = \int_{1-\frac{1}{n}}^{2-\frac{1}{2n}} \sin(nt)\, x'(t)dt$

$= x'(2-\frac{1}{2n})\int_{\xi}^{2-\frac{1}{2n}} \sin nt\, dt \quad \xi\in(1-\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{2n})$

$\therefore \left|\int_1^2 \sin(nx-\frac{1}{x})dx\right| = |x'(2-\frac{1}{2n})|\left|\int_{\xi}^{2-\frac{1}{2n}} \sin nt\, dt\right|$

$< \left|\int_{1-\frac{1}{n}}^{2-\frac{1}{2n}} \sin nt\, dt\right| = \frac{1}{n}\left|\cos n\xi - \cos(2n-\frac{1}{2})\right| \leq \frac{2}{n}$.

(2) $\int_a^b(\int_x^b f(t)dt)dx = \int_a^b (x-a)f(x)dx$

证: 令 $g(x)=\int_x^b f(t)dt \quad g'(x)=-f(x)$

$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g(x)\cdot(x)'dx = g(x)\cdot x\Big|_a^b + \int_a^b x f(x)dx$

$= (\int_a^b f(t)dt)\Big|_a^b + \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b x f(x)dx - \int_a^b a f(t)dt$

$= \int_a^b (x-a) f(x)dx$.

习题课答案外补充部分：

① $a_n>0$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$? a_n 单减且 $\to 0$?

不能 反例：令 $a_n=\begin{cases} \frac{1}{n^2} & n\text{奇} \\ \frac{1}{n^3} & n\text{偶}. \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 有界 $\Rightarrow$ 收敛

而 $a_{2n}=\frac{1}{(2n)^3} < a_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)^2}$

2. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是

$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$ 其中 $\beta_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$

※注意：是先求出 β_n，再令 n 趋于无穷判断 β_n 是否 $\to 0$

典型反例：$S_n(x)=x^n$ $x\in[0,1]$

$S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于 $S(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

而 $\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=1$ 注意这里 β_n 是恒等于1.

$\lim_{n\to\infty}\beta_n=1\neq 0$ $\therefore S_n(x)$ 不一致收敛于 $S(x)$.

3. 一些反例：例7-2-1 ～ 例7-2-4 4个重要反例

4. 设 $a_n>0$ $\{a_n-a_{n+1}\}$ 为一个严格递减数列 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

试证：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty$

Pf：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，得 $a_n\to 0$ 从而 $(a_n-a_{n+1})\to 0$

即 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 严格递减 $\to 0$

$a_n-a_{n+1}>0$ $\Rightarrow a_n>a_{n+1}$ $\Rightarrow \{a_n\}$ 严格递减趋于0.

$\because \{a_n-a_{n+1}\}$ 严格递减

$\therefore a_n^2=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2-a_{k+1}^2)=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k-a_{k+1})(a_k+a_{k+1})<(a_n-a_{n+1})\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})$

而由 $\{a_n\}$ 严格递减且恒正可得

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}>\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}>\frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})}$

而由作业题可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛

$\therefore \sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})\to 0$ as $n\to\infty$ 时.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=+\infty$

5.

Cauchy凝聚判别法.

一般形式: $a_n \geq 0$ a_n递减 则 $\sum a_n$收敛当且仅当 $\sum p^n a_{p^n}$ 收敛.

常用于$p=2$的情形 即 $\sum a_n$收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ 收敛.

Pf: $2^n a_{2^n} = \underbrace{a_{2^n} + \cdots + a_{2^n}}_{2^n个} \geq \sum\limits_{N=2^n}^{2^{n+1}-1} a_N$

$2^n a_{2^n} = 2(2^{n-1} a_{2^n}) = 2(\underbrace{a_{2^n} + \cdots + a_{2^n}}_{2^{n-1}个}) \leq 2\sum\limits_{N=2^{n-1}+1}^{2^n} a_N$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}(2\sum\limits_{N=2^{n-1}+1}^{2^n} a_N) = 2\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{N=2^n}^{2^{n+1}-1} a_N \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

$\therefore$ $\sum a_n$与$\sum 2^n a_{2^n}$同敛散.

应用: $\sum \frac{1}{n\ln n}$ 发散 记$a_n = (n\ln n)^{-1}$ 则 $2^n \cdot a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = \frac{1}{n\ln 2}$

而 $\sum \frac{1}{n\ln 2}$ 发散显然.

6. $a_n > 0$ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 证明: $\alpha > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n / S_n^{\alpha}$ 收敛.

Pf: $\alpha > 1$时 $\frac{a_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha}$ $n \geq 2$

(另一解法)

从而 $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{a_n}{S_n^\alpha} \leq \frac{1}{a_1^{\alpha-1}} + \sum\limits_{n=2}^{N} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{a_1^{\alpha-1}} + \int_{a_1}^{S_N} \frac{dx}{x^\alpha}$

而 $\int_{a_1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ 收敛 $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n / S_n^\alpha$ 收敛.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是一个发散的正项级数 问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n a_n}$ 的敛散情况如何.

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 发散 $\because$若a_n有界M 则 $\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{1+M}$ 若a_n无界 则$\exists \{a_{n_k}\}$ $a_{n_k} \to +\infty$ $\lim\limits_{n_k \to \infty} \frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} = 1 \neq 0$.

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ 收敛 $\frac{n^2 a_n}{1+n^2 a_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{a_n}{1+n^2 a_n} < \frac{1}{n^2}$

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ 1° 当a_n有上界M时. $\frac{a_n}{1+a_n^2} \geq \frac{a_n}{1+M^2}$ 发散

2° $a_n \to +\infty$时 $\frac{\frac{a_n}{1+a_n^2}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n^2}{1+a_n^2} \to 1$ $n \to +\infty$

与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ 同敛散.

3° 其它情况 如: $a_n = \begin{cases} n & n偶 \\ 0 & n奇 \end{cases}$

此时$\{a_n\}$无界 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{1+a_{2n}^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ 发散.

而取 $a_n = n^2$ n偶时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^4}$ 收敛.

$\therefore$无法判断.

④ 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$

1° 当 $\{na_n\}$ 有界时 同上收敛.

2° 当 $na_n\to+\infty$ 时 $\frac{a_n/(1+na_n)}{\frac{1}{n}}=\frac{na_n}{1+na_n}\to1$ $n\to\infty$ 发散.

3° 其它情况不确定

取 $a_n=\begin{cases}1 & n=2^k \\ \frac{1}{n^2} & n\neq2^k\end{cases}$ $k=0,1,2\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}+\sum_{n\neq2^k}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+n\cdot\frac{1}{n^2}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

而取 $a_n=\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散.

定理 16.2.3（第二积分平均值定理） 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上非负，那么：

(1) 若 g 在 $[a,b]$ 上递减，则必存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 若 g 在 $[a,b]$ 上递增，则必存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_{\eta}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 16.2.4（推广的第二积分平均值定理） 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上单调，则必存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

例: $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(t^2)dt$ 当 $x>0$ 时 $|f(x)|\le\frac{1}{x}$

令 $u=t^2$ 则 $\int_x^{x+1}\sin(t^2)dt=\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}du$

由积分第二中值定理得:

$\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}du=\frac{1}{2x}\int_{x^2}^{\xi}\sin(u)du=\frac{1}{2x}(\cos x^2-\cos\xi)$ $\xi\in[x^2,(x+1)^2]$

$\therefore |f(x)|\le\frac{1}{2x}\cdot2=\frac{1}{x}$

考试原题.

1. 积分与极限的关系:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=?$$

原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]$

$=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{p+1}$

2. f 在 $[0,1]$ 上连续 求极限

$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\,x^n\,dx$

答案为 ~~[illegible]~~ $f(1)$

证明: 记 $g(x)=f(x)-f(1)$ 即证 $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 g(x)x^n dx=0$

对 $\varepsilon>0$ 由 $g(x)$ 连续性 知 $\exists\delta>0$ $\forall x\in(1-\delta,1)$ $|g(x)|<\varepsilon$ 设 $M=\max_{x\in[0,1]}|g(x)|$

则有

$$\left|n\int_0^1 g(x)x^n dx\right|\le\left|n\int_0^{1-\delta}g(x)x^n dx\right|+\left|n\int_{1-\delta}^1 g(x)x^n dx\right|$$

$$<nM\left|\int_0^{1-\delta}x^n dx\right|+n\varepsilon\left|\int_{1-\delta}^1 x^n dx\right|$$

$$=M\frac{n(1-\delta)^{n+1}}{n+1}+\varepsilon n\frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{n+1}$$

$$\to\varepsilon \text{ as } n\to\infty.$$