2023 秋数学分析 B1 复习提纲

学院 数学学院

授课教师 潘永亮

编写人 潘子瑞

2024 年 1 月 3 日

目录

1 说明

这份提纲主要参考了宗学长编写的讲义。下面的知识梳理仅基于助教的理解, 简单罗列较为重要的知识点, 未罗列的部分不代表考试不涉及, 更多内容请同学们参照课本, 复习顺序建议为: **课本定理、例题、老师上课补充内容 > 作业题 > 往年考试题 > 其它**, 不要盲目刷难题, 考试最后一题的 6 分和第一题的 6 分都是 6 分!

2 不定积分

2.1 不定积分的定义及计算方法

2.1.1 定义

积分要加 C

2.1.2 常见计算方法

1. 换元
2. 分部积分

两种方法推导的过程和应用条件尽量掌握, 做题时应首先考虑这两种方法。

2.1.3 特殊函数积分

- 有理函数的积分, 利用待定系数法对有理函数进行因式分解
- 三角函数积分
- 三角函数变换公式:
  - 倍角公式: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
  - 半角公式: $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$
  - 万能公式: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$, $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
- 写成容易积分的两部分线性和, 如 $\int \frac{cosx}{asinx+bcosx}\,dx$令$cosx = A(asinx + bcosx) + B(asinx + bcosx)'$

积分方法千千万, 很难完全总结出什么规律, 所以建议同学再去把**作业或者课本**上的积分题过一遍。

3 单变量函数积分学

3.1 Riemann 积分定义

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\lambda = \|T\| = \max_{1\le i\le n}\Delta x_i$ 是分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的宽度，对于每个 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$（$i = 1, 2, \ldots, n$）。

一些极限题可以转换为积分定义计算!!!

例如：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$(取对数考虑)

3.2 可积性

1. 可积必有界
2. 连续必可积，闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数必定可积
3. 几乎处处连续等价于可积。闭区间 $[a,b]$ 上的有界且至多有有限个间断点的函数可积
4. 单调必可积分，闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数必定可积

这一部分需要掌握从定义去证明可积，考试可能作为大题出现

3.3 可积函数性质

1. 线性性
2. 可加性（积分区间可加）
3. 保序性
4. 三角不等式：
$$|\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$
5. 柯西-施瓦兹不等式：
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx}$$

3.4 常见定理

牛顿莱布尼兹公式：

1.
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

微积分中值定理：

1. 若 $f(x) \in C[a,b]$, $g(x) \in R[a,b]$ 且不变号，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),$$
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

2. **第二积分中值定理**: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx. + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

   常用结论:

   (a) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单减且非负，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得
   $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

   (b) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增且非负，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得
   $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

变上限积分：

1. 若 $f \in R[a,b]$, 则 $\phi \in C[a,b]$;

2. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\phi(x)$ 在 x_0 处可微，且 $\phi'(x_0) = f(x_0)$;

3. $f(x)$ 的任意原函数表示为 $F(x) = \phi(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C$，其中 $C \in \mathbb{R}$。

4. **变上限（下限）积分的求导需要掌握**

3.5 积分的应用

1. 平面曲线的弧长:

2. 平面图形的面积:

3. 旋转体的体积:

4. 旋转体的侧面积:

5. 在物理中的应用

以上积分公式的 3 种表示形式:

1. 直角坐标: $y = f(x)$
2. 极坐标: $r = r(\theta)$
3. 参数方程: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

(这部分同学们最好记住原理和公式)

扩展内容: 古德金定理 (伍胜健 2)7.7 节、周民强数学分析习题演练第二册例 1.8.5

3.6 反常积分

1. 无穷积分:

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a)) \\ &= F(+\infty) - F(a).\end{aligned}$$

2. 瑕积分:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a).$$

计算反常积分的两种方法:

1. 直接法：换元/分部积分 + Newton-Leibniz 公式。
2. 间接法：先证明收敛性，再通过解方程计算其值。

有关判断反常积分收敛性的方法还有很多，想详细了解可以见**数分 A 教材第 16 章**

4 常微分方程

考试必考，主要注重如何解一阶、二阶微分方程，如何将问题化为微分方程的形式，**这部分公式一定要背**。

4.1 解的结构:

1. 线性方程的叠加原理
2. 非齐次线性方程解的结构
   非齐次方程通解 $y =$ 齐次方程通解 $y_h +$ 非齐次方程特解 y_p.

4.2 一阶微分方程:

1. 变量分离法
2. 常数变易法
3. 一阶线性方程
   先通过变量分离法求齐次方程通解 y_h，再利用常数变易法求非齐次方程特解 y_p，两者叠加为非齐次方程通解 $y = y_h + y_p$.

4.3 二阶线性微分方程:

1. 基本解组 & 线性无关：线性相关 $\Leftrightarrow W(x) = 0$.
2. Wronski 行列式
$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$
3. Liouville 公式
$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}.$$
4. Liouville 定理: 函数二阶齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 在区间 (a, b) 上的两个解，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，则 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 (a, b) 上线性相关的充分必要条件是 $W(x) \equiv 0, x \in (a, b)$ 或写作：$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 (a, b) 上线性无关的充分必要条件是 $W(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.
5. 二阶齐次线性方程的 Liouville 公式: 设函数 $y_1(x)$ 是齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个非零解，则函数 $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\,dx}\,dx$ 是方程的另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的非零解.
6. 二阶非齐次线性方程的特解 (常数变易法): 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解，则非齐次线性微分方程有形如 $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ 的特解，其中 $C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\,dx$，$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\,dx$，这里 $W(x)$ 是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的 Wronski 行列式。
7. 特解: $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} f(t)\,dt\,dx$.

说明: 上述公式建议熟记. 但要注意, 若能直接看出非齐次方程一个显然的特解, 可以大大降低计算量.

4.4 特征方程 & 特征根:

特征方程法解微分方程：做变换 $y=e^{\lambda x}$ 带入方程中，求解 λ

4.5 可转化/可降阶的微分方程:

以下形式的方程可通过变量代换降阶或转化为易于求解的微分方程.

1. 不显含未知函数的二阶方程:

$$F(x,y'(x),y''(x))=0.$$

作变量代换 $p=y'(x)$，则方程化为一阶微分方程

$$F(x,p(x),p'(x))=0.$$

2. 不显含自变量的二阶方程:

$$F(y,y',y'')=0.$$

作变量代换 $p=y'(x)$，则有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

3. Euler 方程

$$x^2y''+pxy'+qy=f(x),$$

其中 $p,q\in\mathbb{R}$ 是常数. 变形得

$$y''+\frac{p}{x}y'+\frac{q}{x^2}y=\frac{f(x)}{x^2}.$$

作变量代换 $x=\pm e^t$，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(\pm e^t).$$

5 无穷级数

5.1 数项级数

5.1.1 定义:

1. 部分和数列

2. 正项级数

3. 级数的收敛 & 发散

4. 绝对收敛 & 条件收敛

5.1.2 性质:

1. 线性性: 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ 也收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

说明: 这是极限的四则运算法则的直接推论.

2. **结合律:** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一收敛级数. 若把级数的项任意结合而不改变其先后的次序, 得新级数

$$(a_1 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}) + \ldots + (a_{k_{n-1}+1} + \ldots + a_{k_n}) + \ldots \tag{1}$$

其中$k_j \in \mathbb{N}^*$, $k_1 < k_2 < \ldots$ $(j = 1, 2, \ldots)$,

则新级数也收敛, 且与原级数有相同的和. **说明:** 这是“收敛数列的任意子列均收敛, 且与原数列具有相同极限”的直接推论.

至此, 应当注意到级数的许多性质与数列及数列极限中的许多性质存在对应关系, 而部分和数列 $\{S_n\}$ 即为联系二者的桥梁, 下面许多用于判别敛散性的方法也与数列中有所对应, 值得留意.

若级数 (1) 在同一括号中的项都有相同的符号, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是级数 (1) 收敛, 且两者有相同的和. **提示:** 证明充分性时, 运用两边夹法则.

3. **收敛的必要条件:** 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. **注意:** 对于反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 不一定有 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 一个常见的反例是数分 A 教材 16 章例 4:$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^6 sin^2 x}$

4. **有限项的改变:** 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中改变有限项（添加/删除/改变）, 不影响级数的敛散性, 所以在利用判别法的时候，我们可以甩掉前面 N 项再去判断收敛/发散。

5.1.3 级数敛散性的判别法:

Cauchy 收敛准则: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列收敛的 Cauchy 收敛准则.
正项级数的判别法:
注意: 以下所有判别法都只适用于正项级数!

1. **部分和数列有界:** 这是“单调有界必收敛”的直接推论.

2. **Cauchy 积分判别法:** 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负且单调递减, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

3. **比较判别法:** 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 若对于所有 $n > N$, 有 $a_n \leq b_n$, 则:

   (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

   (2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

   说明: 应当注意到, 比较判别法的本质是两边夹法则. 事实上, 许多判别法（如 Cauchy 积分判别法等）的思想都是建立在两边夹法则的基础上.

   极限情况: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数. 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, 则:

   (1) 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

   (2) 若 $l = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

   (3) 若 $l = +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

4. **Cauchy 开方判别法 (根值判别法):** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

   (1) 如果存在正数 $q < 1$, 使得对充分大的 n, 有 $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

   (2) 如果对无穷多个 n, 有 $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

   注意: (1) 中正数 $q < 1$ 的存在性是十分必要的, 这保证了 $\{a_n\}$ 无法趋近于 1. 例如, 若去掉 q 的限制, 只要求 $\sqrt[n]{a_n} < 1$, 我们有如下的反例: $a_n = 1 - \frac{1}{n} > 0$, 则 $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < 1$, 但显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ 发散.

   极限形式: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 则:

   (1) 若 $q < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

   (2) 若 $q > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

   (3) 若 $q = 1$, 无法判断.

5. **商比判别法:** 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个正数列. 若对于所有 $n > N$, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

   则:

   (1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

   (2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} dx =$

特别地, 取 $b_n = q^n$, 立即得到如下的 **D'Alembert 判别法**.

6. **D'Alembert 判别法:** 设 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

 (1) 若存在正数 $q < 1$, 使得当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

 (2) 若对于 $n > N$, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

极限形式: 设 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

 (1) 若 $q < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

 (2) 若 $q > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

 (3) 若 $q = 1$, 则无法判断.

说明: 可以证明, Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法的适用范围更广

7. **Raabe 判别法:** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

 (1) 若存在 $r > 1$, 使得对于所有 $n > N$, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r,$$

 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

 (2) 若对于所有 $n > N$, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1,$$

 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

提示: 将 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 作比较.

极限形式: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l,$$

或

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

(1) 若 $l>1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $l<1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(3) 若 $l=1$, 则无法判断.

8. **Cauchy 凝聚判别法:** 设 $\{a_n\}$ 是单调递减的正数数列, 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是凝聚项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n} + \ldots$$

收敛. **证明见习题课讲义**

此判别法的意义在于, 将许多不容易判断的级数转化为几何级数的形式, 从而能够运用等比数列求和公式直接求和后判断敛散性. 如, p-级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

注意: 以下标 * 的判别法在考试中不能直接使用, 在此罗列主要是想展示其思想.

9. *** Gauss 判别法:** 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \beta\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n\to\infty).$$

(1) 若 $\beta>1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\beta<1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

10. *** Sapagof 判别法:** 设正数数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

提示: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 对 $a>0$ 和 $a=0$ 的情况分类讨论.

说明: 本判别法有以下等价形式:

(1) 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的正数数列, 则该数列与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散;

(2) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散.

不难发现，作简单的换元后，(2) 中 $\{S_n\}$ 占据的地位等价于 (1) 中的 $\{a_n\}$，而 $\{a_n\}$ 的地位等价于 (1) 中的级数通项.

这些判别法，记住名字是次要的，更重要的是记住判别法的内容。

5.1.4 一般级数的判别法

1. **Abel 分布求和公式**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

在这里，$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个实数列，A_k 是 $a_1+a_2+\ldots+a_k$ 的部分和。

2. **Dirichlet 判别法**

   设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两个数列, $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$, 满足以下两个条件:

   (a) $\{b_k\}$ 单调趋于 0;

   (b) $\{S_k\}$ 有界.

   则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

3. **Abel 判别法**

   设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 满足以下两个条件:

   (a) $\{b_k\}$ 单调有界;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

   则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

除了这些常见判别法，同学们也应学会转换问题，如**课本例 7.1.13**, 利用 $|cosn| \geq cos^2 n$ 去证明级数 $\frac{cos^2 n}{n}$ 条件收敛 (再次强调课本例题的重要性)

5.2 函数项级数

5.2.1 定义

- **1 和函数**

- **2 (逐点) 收敛**

- **3 一致收敛**

  讨论逐点收敛时，仍然是对单个数列而言的，因为对某个选定的 x，$\{f_n(x)\}$ 就是一个关于 n 的数列；讨论一致收敛时，才是在讨论一个关于函数的性质, 一致本质上是指对所有 x 一致。

  同样，我们也有“一致收敛必逐点收敛”等结论，而与连续性问题中 Cantor 定理（有限闭区间上的连续函数必一致连续）相对应的是 Dini 定理 (详情见**数分 A 教材定理 15.3.4**)，其指出，在添上单调性的条件后，我们仍有“逐点收敛则一致收敛”的结论。

- **4 有界 & 一致有界**

5.2.2 性质

- **1 一致收敛的充分必要条件（定理 7.28）**β_n
- **2 一致收敛的 Cauchy 收敛准则（定理 7.29）**
- **3 一致收敛的必要条件（Cauchy 收敛准则的推论）**

函数项级数 $\sum_{\infty}^{n=1} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|u_n(x)+u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|=0,\quad \forall p\in\mathbb{N},$$

特别地,级数的通项构成的函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 I 上一致趋于零,即 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|u_n(x)|=0$。

推论：函数项级数 $\sum_{\infty}^{n=1} u_n(x)$ 的通项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数项级数在区间 (a,b) 上一致收敛的必要条件是其在 a、b 两点处均收敛。

5.2.3 一致收敛的判别法

1. **Weierstrass 判别法:** 若存在收敛的正项级数 $\sum_{\infty}^{n=1} a_n$, 使得在区间 I 上有不等式 $|u_n(x)|\le a_n$ (对 $n=1,2,\ldots$)，则级数 $\sum_{\infty}^{n=1} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛。
2. **Dirichlet 判别法:** 若级数 $\sum_{\infty}^{n=1} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足：
   (a) $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x\in I$ 都是单调的，且在区间 I 上一致收敛于 0；
   (b) 级数 $\sum_{\infty}^{n=1} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界，即
   $$\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\right|\le M,\quad x\in I,\quad n=1,2,\ldots.$$
   则级数 $\sum_{\infty}^{n=1} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。
3. **Abel 判别法:** 若级数 $\sum_{\infty}^{n=1} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足：
   (a) $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x\in I$ 都是单调的，且在 I 上一致有界，即 $|b_n(x)|\le M,\quad x\in I,\quad n=1,2,\ldots$;
   (b) 级数 $\sum_{\infty}^{n=1} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛。
   则级数 $\sum_{\infty}^{n=1} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

易错点：要会证明级数不一致收敛 (从定义、β_n、端点处等等)，考试的时候可能遇到判断是否一致收敛的问题，同学们不可盲目的认为一定是一致收敛。

5.2.4 一致收敛级数性质

极限是否可交换：**1. 连续性 2. 可积性 3. 可微性**

重要反例**例 7.2.2～ 例 7.2.4**

5.2.5 幂级数 & Taylor 展开式

1. 定义

   (a) **幂级数**

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots.$$

2. 收敛半径的计算

   数分 B 中公式:

   $$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \quad 或 \quad \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

   数分 A 中公式:

   $$R = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

   易错点: a_n是x^n 前系数, 使用公式时应找准 a_n, 如 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$, 此时 $n = 2k$时, $a_n = 2^k$; $n = 2k+1$时, $a_n = 0$, 所以不可直接使用数分 B 中公式，但数分 A 中公式仍可。

3. 性质

   (a) **Abel 定理:** 若幂级数在 $x = x_0 (\neq 0)$ 处收敛，则其在 $|x| < |x_0|$ 上绝对收敛；反之，若幂级数在 $x = x_1$ 处发散，则其必在 $|x| > |x_1|$ 上发散。

   (b) **连续性**

   (c) **可微性 (任意阶可微)**

   (d) **可积性**

4. Taylor 展开式

   (a) **Taylor 级数**

   (b) **Maclaurin 级数:** 熟记常用函数的 Maclaurin 级数。

   级数的应用 (了解即可):

5. 微分方程的幂级数解

   待定系数法

6. Stirling 公式 (这个公式有时对极限题有妙用，尽量记一下)

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta_n/12n}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ 当 } n \to \infty$$

6 写在最后

如果复习时间充裕，那么建议先把课本、例题和老师上课补充内容过一遍再进行复习; 如果复习时间十分紧张 (比如摸鱼摸过头了 doge), 那么建议直接去看作业题。这个提纲只是作为一个引导，另外期中前的部分并未写在提纲里，但期末肯定避不开期中前的知识，期中前的易错点也应重视。

最后祝大家都能取得一个满意的成绩，过个好年！