高等学校过渡教材读本

SHUXUE

数学

谢盛刚 编

中国科学技术大学出版社

高等学校过渡教材读本

数学

谢盛刚　编

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本教材是作者结合多年的教学经验，专门针对高中数学与大学数学教学之间的知识漏点编写而成的. 内容包括：复数的基本性质、多项式的基本性质、极坐标与参数方程等. 同时配有一定的例题及习题，并给出了习题参考答案，以提高学生的理解能力，确保大学新生在数学学习上平稳过渡.

图书在版编目(CIP)数据

数学/谢盛刚编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2010.6
(高等学校过渡教材读本)
ISBN 978-7-312-02707-9

Ⅰ. 数… Ⅱ. 谢… Ⅲ. 数学—高等学校—教材 Ⅳ. O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 106831 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址 http://press.ustc.edu.cn
印刷 合肥现代印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 880 mm×1230 mm 1/32
印张 3
字数 60 千
版次 2010 年 6 月第 1 版
印次 2010 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—4500 册
定价 6.00 元

前　言

本书作者根据多年的微积分教学经验和体会，发现在目前大学微积分教学内容与中学数学必学内容之间尚有一些缺口，为此编写本书.

由于本书所叙述的内容只是微积分教学所必需的，因此并没有对相关知识进行深入和全面的阐述，例如，在复数一章中没有论述单位根的性质，多项式一章也未涉及域上多项式的概念等.

本书最后有 4 个附录，其中附录 1～3 是十分重要的，应与正文同样重视.

作者建议采用本书的学校可在给新生邮寄录取通知书时附寄本书一册，要求学生在入学前认真学习，并完成全部(包括附录 1～3)的习题.新生入学后三周内应进行一次专门(但不一定严格)的考核，例如随堂测验、抽查习题等方式，考核前也可进行适当辅导，如上答疑课、习题课等.

另外，作者还建议微积分课程的主讲教师在适当时机要求学生结合教学内容复习本书相关章节，以更有利于微积分教学.

本书编写过程中得到中国科学技术大学陈祖墀教授、陈

卿教授和张韵华教授的无私帮助，特此致谢.

中国科学技术大学的陈箫翰、李秋阳、李倩等同学仔细阅读了本书的初稿，并提出许多宝贵建议（多数已得到采纳），特向他们表示谢忱.

本书编写仓促，错漏之处在所难免，还望读者批评指正.

作　者

2010年5月于合肥

目　　录

音乐能激发或抚慰情怀，绘画能使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学能使人获得智慧，科技可以改善物质生活，而数学则能提供以上的一切。

——克莱因

第 1 章　复　数

1.1　复数的代数形式

1.1.1　复数的定义

形如 $x+y\mathrm{i}$ 的数叫复数，其中 x,y 为实数，i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$（即 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$），称为虚单位. 复数的全体记成 $\mathbf{C}$.

由定义可知 $\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$. 进而容易证明：对 $n\in\mathbf{Z}$，有

$$\begin{cases}\mathrm{i}^{4n}=1,\ \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\\ \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\ \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.\end{cases}\tag{1.1.1}$$

$z=x+y\mathrm{i}$ 叫复数 z 的代数形式.

$z=0$ 等同于 $x=y=0$.

x 叫 z 的实部，记成 $\mathrm{Re}\,z$；y 叫 z 的虚部，记成 $\mathrm{Im}\,z$.

如果 $y=0$，则 $z=x$ 是一个实数；如果 $y\neq 0$，称 z 是一个虚数；如果 $x=0$，$y\neq 0$，则称 $z=y\mathrm{i}$ 为一个纯虚数.

$x-y\mathrm{i}$ 叫 $z=x+y\mathrm{i}$ 的共轭数，记成 $\bar{z}$.

显然，$\overline{(\bar{z})}=z$，而且 $z=\bar{z}$ 的充分必要条件是 $z\in\mathbf{R}$.

$\sqrt{x^2+y^2}$ 叫 $z=x+y\mathrm{i}$ 的模，记成 $|z|$.

复数的模满足性质：

1° $|\bar{z}|=|z|$，$|-z|=|z|$；

2° $|\mathrm{Re}\,z|$ （$|\mathrm{Im}\,z|$）$\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$，等式成立的充分必要条件是 $\mathrm{Re}\,z=0$ 或 $\mathrm{Im}\,z=0$，即 z 是实数或纯虚数.

1.1.2 复数的四则运算

复数的四则运算遵循实数四则运算法则，但须将 i 的乘幂按式(1.1.1) 约化，最后并写成一个实数与一个纯虚数的和.

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，则有

$$\begin{aligned} z_1+z_2&=(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})\\ &=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i},\\ z_1-z_2&=(a_1+b_1\mathrm{i})-(a_2+b_2\mathrm{i})\\ &=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i},\\ z_1z_2&=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})\\ &=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

由定义和式(1.1.2) 可知

$$\begin{cases} z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z\\ z-\bar{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z.\\ z\bar{z}=|z|^2 \end{cases} \tag{1.1.3}$$

设 $z_2\neq 0$，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})}{a_2^2+b_2^2}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i}. \qquad (1.1.4)$$

容易验证

$$\begin{cases} \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \end{cases} \qquad (1.1.5)$$

1.1.3 复数的几何表示

1. 复平面

设平面上已建立直角坐标系 xOy,则复数 $z = x + y\mathrm{i}$ 与平面上的点(x,y)一一对应.将平面上的点(x,y)看做复数 $x + y\mathrm{i}$,这样的平面叫复平面.

在复平面上,$z = x + y\mathrm{i}$ 可以看成是几何的点,也可以看做代数的数.

复平面上的 Ox 轴叫实轴,Oy 轴叫虚轴.实轴上的点就是实数,虚轴上的点(除原点外)就是纯虚数.坐标轴以外的点都是虚数.

给定复平面上一点,则点 z 和向量$\overrightarrow{Oz}$一一对应.显然复数的加法和减法与向量的加法和减法是一致的.所以也可以把复数 z 看成一个平面向量.注意,我们这里的向量是自由向量(图 1.1).

显然 z 的模 $|z|$ 就是向量$\overrightarrow{Oz}$的长 $|Oz|$.

2. 复数的辐角

设 $z = x + y\mathrm{i} \neq 0$,实轴正方向到$\overrightarrow{Oz}$的夹角 θ 叫 z 的辐

角，记成 $\mathrm{Arg}\,z$（图 1.2）.

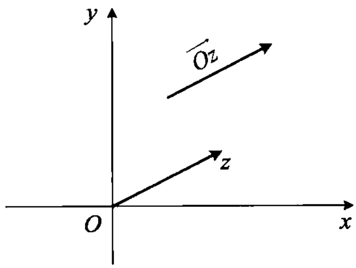


图 1.1　自由向量

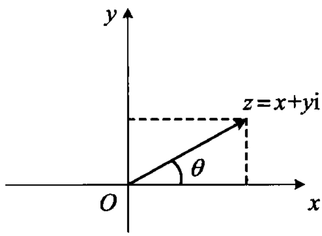


图 1.2　复数的辐角

如果 $z=0$，则不定义辐角，或可定义为所需要的任意辐角值.

显然 $\theta+2n\pi\,(n\in\mathbf{Z})$ 也是 z 的辐角，所以非零复数有无穷多个辐角，它们之间相差 2π 的整数倍，其中有一个在区间 $[0,2\pi)$ 中，称为 z 的辐角主值，记成 $\arg z$. 显然有

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2n\pi\ (n\in\mathbf{Z}).$$

$z=x+y\mathrm{i}$ 的辐角主值 θ 可由下式确定

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi). \tag{1.1.6}$$

由式(1.1.6) 可知

$$\tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{1.1.7}$$

若要由式(1.1.7) 确定 $\arg z$，还需考虑 x, y 的正、负搭配情况.

1.1.4 三角形不等式

由图 1.3 容易看出

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

这就是三角形不等式.下面用代数方法来证明它.我们有

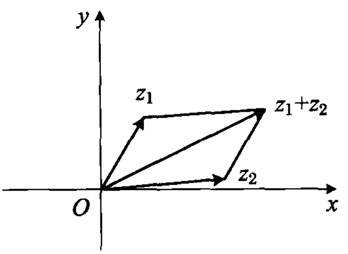


图 1.3　三角形不等式

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2 \\ &\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2| \end{aligned}$$

$$\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2|$$
$$= (|z_1| + |z_2|)^2,$$

即有

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{1.1.8}$$

等号当且仅当 z_1 与 z_2 为同向平行，即有相同的辐角主值时成立.

由式(1.1.8) 还可得到

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2|$$
$$\leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|,$$
$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1|$$
$$\leqslant |z_1 - z_2| + |z_1|.$$

综合以上两式，就得到

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||. \tag{1.1.9}$$

等号当且仅当 z_1 与 z_2 有相同的辐角主值，即同向平行时成立.

式(1.1.8) 和(1.1.9) 是三角形不等式的两种不同表述形式，它们与实数的绝对值不等式是一致的.

1.1.5* 复数不定义大小关系

如果仅仅把大小看成是一个先后顺序，则很容易给复数规定“大小”. 例如，可以先比较实部，把实部较小的复数排在前面，当实部相同时，把虚部较小的数排在前面. 但是对于大小关系还有一些很重要的要求，这些要求对于实数集而言都是满足的，它们是：

1° $a < b, a = b, a > b$ 之一成立；

2° 若 $a<b, b<c$，则 $a<c$；

3° 如果 $a<b$，则对任何 c，有 $a+c<b+c$；

4° 如果 $a<b, c>0$，则 $ac<bc$.

下面我们证明无论怎么规定复数的“大小”关系，都不能使上面 4 个要求同时得到满足.

若在 $\mathbf{C}$ 中可以规定某种“大小”关系使 $1^\circ \sim 4^\circ$ 都能成立，那么，由于 $\mathrm{i} \neq 0$，所以必有 $\mathrm{i}>0$ 或 $\mathrm{i}<0$.

如果 $\mathrm{i}>0$，则由 4° 可知 $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}=-1>0$，由 3° 可知(两端加 1) $0>1$. 但由于 $-1>0$，所以 $(-1)(-1)>0$，即 $1>0$，矛盾.

如果 $\mathrm{i}<0$，则 $-\mathrm{i}>0$(两端加 $-\mathrm{i}$)，于是 $(-\mathrm{i})(-\mathrm{i})=-1>0$. 重复上面的证明又得到 $0>1$ 和 $1>0$ 的矛盾.

习题 1.1

1. 计算 i^{25}，i^{38}，i^{72}，i^{371}.

2. 求实数 x, y，使得：

(1) $(1+2\mathrm{i})x+(3-10\mathrm{i})y=5-6\mathrm{i}$；

(2) $\dfrac{x}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{y}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{5}{1-3\mathrm{i}}$.

3. 下列方程各表示什么图形?

(1) $|z-3|=5$；

(2) $|z-\mathrm{i}|=|z+2|$；

(3) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$;

(4) $\operatorname{Re}(z^2) = a^2 \quad (a \in \mathbf{R})$.

4. 设 $|a|<1$, $|z|=1$. 求证:$\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1$.

5. 证明

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2),$$

并说明等式的几何意义.

6. 设 z 和 z' 是复平面上两点,证明:$\overrightarrow{Oz} \perp \overrightarrow{Oz'}$ 的充分必要条件是 $\operatorname{Re} \bar{z}z' = 0$.

7. 设 a,b,c,d 是实数,在什么情况下方程

$$x^2+(a+b\mathrm{i})x+c+d\mathrm{i}=0$$

有实根?

8. 证明

$$|z_1w_1+z_2w_2|^2 \leqslant (|z_1|^2+|z_2|^2)(|w_1|^2+|w_2|^2).$$

9. 已知 $z_1+z_2+z_3=0$, $|z_1|=|z_2|=|z_3|$. 求证:$\triangle z_1z_2z_3$ 是正三角形.

1.2 复数的三角式和指数式

1.2.1 复数三角式的定义

设 $z = a+b\mathrm{i} \neq 0$,它的辐角为 θ,模为 r. 由图 1.4 可知

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

于是有

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathrm{i}\right) \\ &= r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

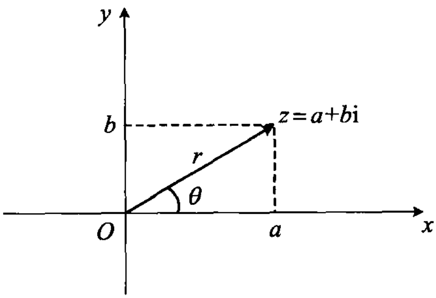


图 1.4　复数的模和辐角

显然，在式(1.2.1)中用 $\theta + 2n\pi\ (n \in \mathbf{Z})$ 代替 θ，其仍代表同一个复数.

式(1.2.1)就叫复数 z 的三角式. 代数式与三角式可按下面公式互化

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \\ a = r\cos\theta, \ b = r\sin\theta \end{cases} \tag{1.2.2}$$

注意，必须是按式(1.2.1)所表示的复数才是三角式，而像 $r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$，$r(\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta)$ 等都不能看做是复数

的三角式.

如果 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,则

$$\begin{aligned}\bar{z} &= r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)\\ &= r[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)].\end{aligned}$$

例 1.2.1 求纯虚数 $z = b\mathrm{i}$ ($b \neq 0$) 的三角式.

解 易知,$|z| = |b|$.当 $b>0$ 时,$\theta = \frac{\pi}{2}$,当 $b<0$ 时,$\theta = \frac{3}{2}\pi$,故

$$b\mathrm{i} = \begin{cases} b\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right), & b>0 \\ -b\left(\cos\frac{3}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\pi\right), & b<0 \end{cases}.$$

例 1.2.2 将下列复数表示成三角式:

(1) $-\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$;

(2) $\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta$;

(3) $-\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$.

解 (1) $-\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + \mathrm{i}\sin(\pi - \theta)$;

(2) $\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$;

(3) $-\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta = \cos(\pi + \theta) + \mathrm{i}\sin(\pi + \theta)$.

例 1.2.3 求下列复数的三角式:

(1) $-1 + \mathrm{i}$;

(2) $\frac{5 + \mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}}$.

解 (1) 易知

$$r=\sqrt{2},\ \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故得到 $\theta=\frac{3\pi}{4}$,所以

$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

(2) 易知

$$\frac{5+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\frac{(5+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{13}=1-\mathrm{i}.$$

于是

$$r=\sqrt{2},\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以

$$\frac{5+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

例 1.2.4 求下列复数的三角式:

(1) $\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$;

(2) $\cos 50^\circ-\mathrm{i}\sin 40^\circ$.

解 (1) $\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

(2) $\cos 50^\circ-\mathrm{i}\sin 40^\circ=\sin 40^\circ-\mathrm{i}\sin 40^\circ=\sin 40^\circ\cdot(1-\mathrm{i})$

$$=\sqrt{2}\sin 40^\circ\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

1.2.2 复数三角式的乘法和乘方

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &\quad + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

由此可见

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \\ \operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \end{cases}. \tag{1.2.3}$$

所以用三角式表示的两个复数相乘就是"模相乘，角相加".

式(1.2.3)很容易推广到多个复数相乘的情形. 设 z_1，z_2，…，z_n 的模分别是 r_1，r_2，…，r_n，辐角分别是 θ_1，θ_2，…，θ_n，则 $z_1 z_2 \cdots z_n$ 的模为 $r_1 r_2 \cdots r_n$，辐角为 $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$. 即有

$$\begin{aligned} &\prod_{k=1}^{n} r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right)\left(\cos\sum_{k=1}^{n}\theta_k + \mathrm{i}\sin\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right). \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

在式(1.2.4)中取 $r_k = r$，$\theta_k = \theta(k = 1,2,\cdots,n)$，则可得到 De Moivre 公式

$$[r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1.2.5}$$

例 1.2.5 求 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2010}$.

解 易知，$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$，故

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2010}&=\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2010}\\&=\cos\frac{2010}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2010}{4}\pi\\&=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 1.2.6 用复数乘法证明

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta,\ \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta.$$

解 易知

$$\begin{aligned}\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\mathrm{i}\cos\theta\sin\theta,\end{aligned}$$

比较两边的实部和虚部即得.

例 1.2.7 图1.5中有并列的三个边长为1的正方形，证明：$\angle 1+\angle 2=\frac{\pi}{4}$.

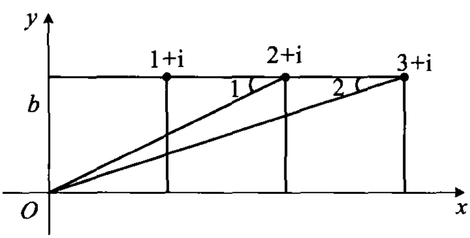


图 1.5 例 1.2.7 示意图

解 按图1.5建立直角坐标系，易看出 $\angle 1=\arg(2+\mathrm{i})$，$\angle 2=\arg(3+\mathrm{i})$，故

$$\angle 1 + \angle 2 = \arg[(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})]$$
$$= \arg(5+5\mathrm{i}) = \arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$$

(注意 $0 < \angle 1 + \angle 2 < \frac{\pi}{2}$).

1.2.3 复数三角式的除法

设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \neq 0$,则有

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$$
$$= \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)]. \qquad (1.2.6)$$

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \neq 0,$$

则由式(1.2.6)可知

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (1.2.7)$$

因此,两个用三角式表示的复数相除就是“模相除,角相减”.

例 1.2.8 设 $\arg(1+2\mathrm{i}) = \alpha$,$\arg(3-4\mathrm{i}) = \beta$.试求:$2\alpha - \beta$.

解 易知

$$\frac{(1+2\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}} = \frac{1}{25}(1+2\mathrm{i})^2(3+4\mathrm{i})$$
$$= \frac{1}{25}(-3+4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i}) = -1.$$

由于 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$，所以 $-2\pi<2\alpha-\beta<-\frac{\pi}{2}$，故只能有 $2\alpha-\beta=-\pi$.

例 1.2.9 证明：若 $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$，则

$$z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta\ (m\in\mathbf{N}).$$

证 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$\begin{aligned}z+\frac{1}{z}&=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+\mathrm{i}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\\&=2\cos\theta.\end{aligned}$$

故必有 $r-\frac{1}{r}=0$ 或 $\theta=0$，无论哪种情况，都只能有 $r=1$.

所以 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，于是

$$\begin{aligned}z^m+\frac{1}{z^m}&=\cos m\theta+\mathrm{i}\sin m\theta+\cos m\theta-\mathrm{i}\sin m\theta\\&=2\cos m\theta.\end{aligned}$$

例 1.2.10 计算 $\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{50}}{(1+\mathrm{i})^{100}}$.

解 由

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

得

$$\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{50}}{(1+\mathrm{i})^{100}}=\frac{2^{50}}{(\sqrt{2})^{100}}\cdot\frac{\cos\frac{50}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{50}{3}\pi}{\cos 25\pi+\mathrm{i}\sin 25\pi}$$

$$=\frac{\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi}{\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi}$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

1.2.4 复数三角式的开方

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$z$ 的 n 次根是一个复数 $w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，它满足

$$\begin{aligned}w^n&=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)\\&=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).\end{aligned}$$

由此可见，必有

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad n\varphi=\theta+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})\tag{1.2.8}$$

于是

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\quad(k\in\mathbf{Z})\tag{1.2.9}$$

就都是 z 的 n 次根.设

$$k=nq+r_k\quad(0\leqslant r_k\leqslant n-1),$$

则有

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2r_k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2r_k\pi}{n}\right).\tag{1.2.10}$$

由于

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,\cdots,n-1) \tag{1.2.11}$$

是 n 个不同的复数，所以式(1.2.11) 就是 z 的 n 个不同的 n 次根，自然 z 的任一个 n 次根也必然等于其中的一个.

例 1.2.11 求 -1 的 3 次根.

解 易知，$-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$，故 -1 有 3 个 3 次根：

$$\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=-1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，它的 n 个 n 次根

$$w_k=\sqrt[n]{z}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,\cdots,n-1) \tag{1.2.12}$$

就是以 $\rho=\sqrt[n]{r}$ 为半径、圆心在原点的圆上内接正 n 边形的 n 个顶点.

1 的 n 个 n 次根，叫 n 次单位根，它们是

$$\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$(k=0,1,\cdots,n-1). \tag{1.2.13}$$

由式(1.2.12) 和(1.2.13) 可知，$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 个 n 次根是

$$w_0\omega_0,\ w_0\omega_1,\ \cdots,\ w_0\omega_{n-1}. \tag{1.2.14}$$

1.2.5 复数的指数式

记

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1.2.15}$$

上式叫 Euler 公式,式中 $\mathrm{e} = 2.71828\cdots$ 是一个无理数,叫自然对数底,是微积分中的一个重要常数.

显然有 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1, \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}} = -1, \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{i}$ 等.

设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,则由式(1.2.15) 可知

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.2.16}$$

式(1.2.16) 叫复数的指数式.

还可以定义复变数的指数函数

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y),$$

它是一个周期为 $2\pi\mathrm{i}$ 的周期函数,即有 $\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{z}$.

式(1.2.15) 有其深刻的含义,在将来的复变函数课程中会有完整的论述,我们在这里仅把它当作一个记法,使用这种记法可以使书写和运算简单一些.

由复数三角式的运算法则可知:

1° $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$;

2° $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

所以复变指数函数的运算与实变指数函数的运算有完全一样的法则,由此也可看出式(1.2.15) 的记法的合理性.

由式(1.2.15) 还可看出

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \qquad (1.2.17)$$

例 1.2.12 求

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$$

和

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta.$$

解 易知

$$\begin{aligned}
&\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta + i(\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta) \\
&= e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1} \\
&= \frac{e^{i(n+1/2)\theta} - e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = \frac{e^{i(n+\theta/2)} - e^{i\theta/2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= -\frac{i}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \cos\frac{\theta}{2}\right. \\
&\quad \left. + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - i\sin\frac{\theta}{2}\right].
\end{aligned}$$

比较等式两端的实部和虚部,就得到

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

在做复数的除法运算时,常用的方法是分子分母同乘分

母的共轭数,使分母实化,在本例中则是设法使分母纯虚化.这也是值得注意的地方.

建议读者在使用三角式进行乘、除、乘方和开方的运算时,都使用其指数式;而当需要分离实部和虚部时再将其转化成三角式或代数式.

我们在例 1.2.12 中就是这样做的.

如果从运算的角度出发,则复数的指数式是比三角式更清晰的表示法.

前面给出的有关三角式运算的公式(1.2.4) ~ (1.2.7),(1.2.9) ~ (1.2.13) 都可以直接转化成指数式,并且在形式上更为简单明了.读者可选几个作为练习.

例 1.2.13 证明三角恒等式(积化和差公式)

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].$$

证 我们有

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)} &= e^{i\alpha}(e^{i\beta}+e^{-i\beta}) \\ &= 2\cos\beta(\cos\alpha+i\sin\alpha), \end{aligned}$$

比较等式两端的实部和虚部,就得到

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta).$$

再利用

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} &= e^{i\alpha}(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \\ &= -2i\sin\beta(\cos\alpha + i\sin\alpha), \end{aligned}$$

就得到另外两个恒等式.

这 4 个公式是平面三角中十分著名的积化和差公式. 在这4个公式中,令 $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$,就得到同样重要的和差化积公式

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

例 1.2.14 求 $1+\cos\theta - i\sin\theta$ $(0<\theta<2\pi)$ 的辐角主值.

解 易知

$$\begin{aligned} 1+\cos\theta - i\sin\theta &= 1 + e^{-i\theta} \\ &= e^{-i\theta/2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\theta/2}, \end{aligned}$$

所以

$$\arg(1+\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=2\pi-\frac{\theta}{2}.$$

习题1.2

1. 求出下列复数的三角式：

(1) $-\sqrt{3}$； (2) $\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta$；

(3) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$； (4) $2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$.

2. 求下列各数的辐角主值：

(1) $-5-12\mathrm{i}$； (2) $\sin 40^\circ-\mathrm{i}\cos 50^\circ$；

(3) $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan 20^\circ}{1-\mathrm{i}\tan 20^\circ}$.

3. 计算下列各式：

(1) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6$；

(2) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(3) $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{4}}$；

(4) $[2(\cos 75^\circ+\mathrm{i}\sin 75^\circ)]^4$.

4. 求证：$(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta$.

5. 已知 $|z|=2\sqrt{7}$，$\arg(z-4)=\dfrac{\pi}{3}$，求 z.

6. 已知$\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\pi$，求$\dfrac{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta}$的辐角主值.

7. 求 $n \in \mathbf{Z}$,使$(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$,其中最小的正整数是什么?

8. 已知 $|z_1|=|z_2|=1, z_2-z_1=-1$,求 $\arg\dfrac{z_1}{z_2}$.

9. 分别求 1 的 3 次根和 4 次根.

10. 设 $z^n=\bar{z}\ (n\in\mathbf{N})$,求 z.

11. 求$(1+\mathrm{i})^{2n}+(1-\mathrm{i})^{2n}$.

12. 设 $\omega\neq 1, \omega^3=1$,则 $1,\omega,\omega^2$ 是 1 的三个不同的立方根.

13. 把下列各复数写成代数式:

(1) $\mathrm{e}^{1+2\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{2+3\mathrm{i}}$;

(2) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{3+2\pi\mathrm{i}/3}$;

(3) $\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-2}$.

14. 求 $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 的辐角主值.

数学是知识的工具，亦是其他知识工具的泉源，所有研究顺序和度量的科学均和数学有关。

——笛卡儿

第2章　多　项　式

2.1　多项式的定义和运算

2.1.1　多项式的定义

设 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{C}$,其中 $a_n \neq 0$.称

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为 $\mathbf{C}$ 上的 n 次多项式. $a_n x^n$ 叫 $P(x)$ 的首项;n 叫 $P(x)$ 的次数,记为 $\deg P$; a_k 叫 k 次项的系数. $\mathbf{C}$ 上多项式的全体记成 $\mathbf{C}[x]$.

数 0 也是一个多项式,叫零多项式.零多项式不定义次数,有时也说零多项式有任意的次数. $\mathbf{C}$ 中非零常数 a 是零次多项式,与零多项式是不同的.

只有一项的非零多项式叫单项式.

有时需考虑 x 在数集 $\mathbf{E}$ 上取值,这时 $P(x)$ 可视为 $\mathbf{E}$ 上定义的函数,称为 n 次函数.

在本章中, $P(x)$, $Q(x)$ 等类似函数的记号都是复系数多项式.

两个多项式之间可进行加法、减法和乘法的运算并满足数的运算规律，即满足加法交换律与结合律、乘法交换律与结合律、乘法对加法的分配律以及乘法的消去律.

2.1.2 带余除法

设 $Q(x)\neq 0$，若 $P(x)=q(x)Q(x)$，则称 $Q(x)$ 整除 $P(x)$，或称 $Q(x)$ 是 $P(x)$ 的因式，记成 $Q(x)\mid P(x)$.

一个非零多项式并不一定能整除另一个多项式，这同整数集的情况很相似，我们有下面的重要定理：

定理 2.1.1 设 $Q(x)\neq 0$，则唯一地有

$$P(x)=q(x)Q(x)+r(x)$$

$$(r(x)=0 \text{ 或 } 0\leqslant \deg r<\deg Q). \qquad (2.1.1)$$

当 $P(x),Q(x)\in \mathbf{R}[x]$ 时，$q(x),r(x)\in \mathbf{R}[x]$.

证 若 $P(x)=0$，则取 $q(x)=r(x)=0$，即可得式(2.1.1).

若 $P(x)\neq 0$，设 $\deg P=n$，以下对 n 用归纳法.

当 $n=0$ 时，$P(x)=a_0\neq 0$. 若 $\deg Q\geqslant 1$，则取 $q(x)=0$，$r(x)=a_0$ 即可；若 $\deg Q=0$，则 $Q(x)=b_0\neq 0$，可取 $q(x)=\dfrac{a_0}{b_0}$，$r(x)=0$.

设定理对 $n=0,1,\cdots,m$ 都已成立.

当 $n=m+1$ 时，设 $P(x)=a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+a_1x+a_0$ 及 $Q(x)=b_lx^l+\cdots+b_1x+b_0(a_{m+1}b_l\neq 0)$.

如果 $l>m+1$，则取 $q(x)=0$，$r(x)=P(x)$，即得式

(2.1.1).

如果 $l \leqslant m+1$,取 $q_1(x)=\frac{a_{m+1}}{b_l}x^{m+1-l}$,则

$$q_1(x)Q(x)=\frac{a_{m+1}}{b_l}x^{m+1-l}(b_lx^l+\cdots+b_1x+b_0)$$

$$=a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+\frac{b_0}{b_l}a_{m+1}x^{m+1-l}.$$

令 $P_1(x)=P(x)-q_1(x)Q(x)$,则显然有 $P_1(x)=0$ 或 $\deg P_1 \leqslant m$.由归纳法假设可知

$$P_1(x)=q_2(x)Q(x)+r(x)$$

$$(r(x)=0 \text{ 或 } 0 \leqslant \deg r < \deg Q).$$

于是

$$P(x)=P_1(x)+q_1(x)Q(x)$$

$$=[q_1(x)+q_2(x)]Q(x)+r(x)$$

$$(r(x)=0 \text{ 或 } 0 \leqslant \deg r < \deg Q).$$

令 $q(x)=q_1(x)+q_2(x)$,即得到式(2.1.1).

下面证明式(2.1.1)的唯一性.假设还有

$$P(x)=\tilde{q}(x)Q(x)+\tilde{r}(x)$$

$$(\tilde{r}(x)=0 \text{ 或 } 0 \leqslant \deg \tilde{r} < \deg Q). \quad (2.1.2)$$

式(2.1.1)与(2.1.2)相减,就得到

$$[q(x)-\tilde{q}(x)]Q(x)+r(x)-\tilde{r}(x)=0,$$

即有

$$\tilde{r}(x)-r(x)=[q(x)-\tilde{q}(x)]Q(x). \quad (2.1.3)$$

若 $q(x)-\tilde{q}(x)\neq 0$,则

$$\deg\,(q(x)-\tilde{q}(x))Q(x) \geqslant \deg Q(x),$$

又显然 $\deg(\tilde{r}(x)-r(x))<\deg Q$ 或 $\tilde{r}(x)-r(x)=0$，所以只能 $\tilde{r}(x)=r(x)$，从而 $q(x)=\tilde{q}(x)$.

当 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是实系数多项式时，在定理的证明过程中 $q_1(x)$，$P_1(x)$ 都是实系数多项式，而在使用归纳法时 $q_2(x)$，$r(x)$ 也是实系数多项式. 因而最终的 $q(x)$ 和 $r(x)$ 也都是实系数多项式.

式(2.1.1)中的 $q(x)$ 叫 $Q(x)$ 除 $P(x)$ 的不完全商，$r(x)$ 叫 $Q(x)$ 除 $P(x)$ 的余式. 由式(2.1.1)可知，$Q(x)\mid P(x)$ 的充分必要条件是 $r(x)=0$.

推论 2.1.1(余数定理)　给定常数 α，那么对多项式 $P(x)$，存在常数 c，使

$$P(x)=q(x)(x-\alpha)+c. \tag{2.1.4}$$

在进行多项式的带余除法时，常用与多位数带余除法类似的算式.

例 2.1.1　求 $Q(x)=x^2+2x+3$ 除 $P(x)=2x^4+3x^3+3x^2-4x-1$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$.

解　列算式如下

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x^2-x-1=q(x) \\
x^2+2x+3 & \overline{\big)\,2x^4+3x^3+3x^2-4x-1} \\
 & \underline{2x^4+4x^3+6x^2\qquad\qquad} \\
 & -x^3-3x^2-4x-1 \\
 & \underline{-x^3-2x^2-3x\qquad} \\
 & -x^2-x-1 \\
 & \underline{-x^2-2x-3} \\
 & x+2=r(x)
\end{array}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&2x^4+3x^3+3x^2-4x-1\\
&\quad=(2x^2-x-1)(x^2+2x+3)+x+2.
\end{aligned}
$$

习题 2.1

1. 设 $P(x)=2x^3+3x^2+1, Q(x)=\mathrm{i}x^2+(1+\mathrm{i})x+1$. 求 $P(x)+Q(x), P(x)-Q(x)$ 和 $P(x)Q(x)$.

2. 用 $Q(x)$ 除 $P(x)$, 求商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$:

(1) $P(x)=x^3+3x^2+x-1, Q(x)=x^2-2x+1$;

(2) $P(x)=x^4-2x+5, Q(x)=x^2-x+2$;

(3) $P(x)=x^4-3\mathrm{i}x^3-(2-\mathrm{i})x^2+x+1$,

$Q(x)=x^2-2\mathrm{i}x+\mathrm{i}$.

3. 证明: 若 $P(x)\mid Q(x)$, $Q(x)\mid P(x)$, 则有 $P(x)=cQ(x)$ $(c\neq 0)$.

4. 证明: 若 $P(x)\mid Q(x), Q(x)\mid R(x)$, 则

$$P(x)\mid R(x).$$

5. 证明: 若 $x-\alpha\mid P(x)Q(x)$, 则

$$x-\alpha\mid P(x) \text{ 或 } x-\alpha\mid Q(x).$$

6. 试求 b, c, d 的值, 使 $P(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 满足:

(1) $x-1\mid P(x)$;

(2) $P(x)$ 被 $x-3$ 除后余数为 2;

(3) $P(x)$ 被 $x+2$ 除与被 $x-2$ 除的余数相同.

2.2　多项式的根与因式分解

设 $P(x) \neq 0$，若存在 $\alpha \in \mathbf{C}$，使 $P(\alpha) = 0$，则称 α 是 $P(x)$ 的根.

显然零次多项式没有根.

定理 2.2.1　设 $\deg P \geqslant 1$，则 α 是 $P(x)$ 的根的充分必要条件是 $x - \alpha \mid P(x)$.

证　$\Rightarrow$ 由推论 2.1.1 可知，存在 $c \in \mathbf{C}$，使

$$P(x) = (x - \alpha)q(x) + c.$$

由于 $P(\alpha) = 0$，由上式可知 $c = 0$，即 $x - \alpha \mid P(x)$.

$\Leftarrow$ 由于 $x - \alpha \mid P(x)$，即存在 $q(x)$，使

$$P(x) = (x - \alpha)\, q(x).$$

所以 $P(\alpha) = 0$.

定理 2.2.2（代数基本定理）　设 $\deg P \geqslant 1$，则 $P(x)$ 至少有一个根.

定理 2.2.2 将在复变函数课程中给出证明，其代数证明则相对繁难.

定理 2.2.3（复系数多项式的唯一分解定理）　设 $\deg P = n \geqslant 1$，则有

$$P(x) = A(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_s)^{k_s}, \qquad (2.2.1)$$

其中，A 是 $P(x)$ 的首项系数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 $P(x)$ 的不同的根. $k_i \geqslant 1\ (i = 1, \cdots, s)$，$k_1 + \cdots + k_s = n$. 若不计乘积的次序，

则式(2.2.1)是唯一的.

证 对 n 用归纳法.

当 $n = 1$ 时,结论显然成立.

设 $n \leqslant m$ 时定理成立.当 $n = m+1$ 时,由定理2.2.2可知,$P(x)$ 有根 α_1,于是由定理2.2.1,得

$$P(x) = (x - \alpha_1)P_1(x). \tag{2.2.2}$$

显然 $\deg P_1 = m$,并且 $P_1(x)$ 的首项系数亦为 A.于是由归纳假设可知

$$P_1(x) = A(x - \alpha_1)^{k_1 - 1}\cdots(x - \alpha_s)^{k_s}, \tag{2.2.3}$$

由此即得式(2.2.2).若还有

$$\begin{aligned} P(x) &= B(x - \alpha_1)^{k_1'}\cdots(x - \alpha_s)^{k_s'} \\ &= (x - \alpha_1)P_1(x), \end{aligned}$$

则由消去律可知

$$P_1(x) = B(x - \alpha_1)^{k_1' - 1}\cdots(x - \alpha_s)^{k_s'}, \tag{2.2.4}$$

由归纳法可知式(2.2.3)和(2.2.4)是相同的分解式,即有 $B = A$ 及 $k_i' = k_i (i = 1,2,\cdots,s)$.定理得证.

在式(2.2.1)中,k_i 叫根 α_i 的重数,α_i 叫 $P(x)$ 的 k_i 重根.

定理2.2.3说明,一个 n 次多项式恰有 n 个根(重根按重数算个数).

式(2.2.1)称为 $P(x)$ 的标准因式分解式.

定理2.2.2给出了多项式的根与因式分解的联系,即若 $P(x)$ 有根 α_1,则 $P(x) = (x - \alpha_1)P_1(x)$,再求 $P_1(x)$ 的根 α_2…… 如此可将 $P(x)$ 的 n 个根一一求出.这样 $P(x)$ 可写

成首项系数 A 与 n 个一次式 $x-\alpha_1,\cdots,x-\alpha_n$ 的乘积.将同类项相乘,就可得到式(2.2.1).

例 2.2.1 设 α,β 是 $P(x)$ 不同的根,则

$$(x-\alpha)(x-\beta)\mid P(x).$$

证 由于 $x-\alpha\mid P(x)$,故有 $P(x)=(x-\alpha)P_1(x)$,又由于 $P(\beta)=0$,故 $(\beta-\alpha)P_1(\beta)=0$,即有 $P_1(\beta)=0$,所以 β 是 $P_1(x)$ 的根,故有 $P_1(x)=(x-\beta)P_2(x)$.故

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)P_2(x),$$

所以 $(x-\alpha)(x-\beta)\mid P(x)$.

例 2.2.2 设 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个 n $(n\geqslant 1)$ 次整系数多项式,p 是 $P(x)$ 的根,则 $p\mid a_0$(即 p 整除 a_0).

证 由 $P(p)=0$,可得

$$\begin{aligned}a_0&=-a_np^n-\cdots-a_1p\\&=-p(a_np^{n-1}+\cdots+a_1),\end{aligned}$$

由于 $a_np^{n-1}+\cdots+a_1\in\mathbf{Z}$,故 $p\mid a_0$.

例 2.2.2 常用来求整系数多项式的整数根,并用以分解整系数多项式.

例 2.2.3 分解 $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$.

解 先看 $P(x)$ 是否有整数根. -2 的因子有 $1,2,-1,-2$,代入 $P(x)$,可知 $P(2)=P(-1)=0$,即 $P(x)$ 有因式 $x-2$ 和 $x+1$.于是

$$\begin{aligned}P(x)&=x^4+x^3-2x^3-2x^2+x^2+x-2x-2\\&=(x+1)(x^3-2x^2+x-2)\end{aligned}$$

$$= (x+1)(x-2)(x^2+1)$$
$$= (x+1)(x-2)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}).$$

例 2.2.4 将 x^4+1 分解成一次式的乘积.

解 $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ 的 4 个 4 次根为

$$\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/4},\ \mathrm{e}^{3\pi \mathrm{i}/4},\ \mathrm{e}^{5\pi \mathrm{i}/4},\ \mathrm{e}^{7\pi \mathrm{i}/4},$$

即$\dfrac{\pm 1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$,故

$$\begin{aligned} &x^4+1 \\ &= \left(x-\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\mathrm{i}}{2}\right). \end{aligned}$$

习题2.2

1. 设 $\deg P = n \geqslant 1$,则 $P(x)$ 至多有 n 个不同的根.

2. 设 $0 \leqslant \deg P \leqslant n$, $0 \leqslant \deg Q \leqslant n$.若存在 $n+1$ 个不同的数 a_i,使

$$P(a_i)=Q(a_i)\quad (i=1,2,\cdots,n+1),$$

则 $P(x)=Q(x)$.

3. 设 $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式,若 $P(x)$ 有有理根 α,试证明:$\alpha \in \mathbf{Z}$ 且 $\alpha | a_0$.

4. 将 x^3+1 及 x^4+2x^2+1 分解成一次式的乘积.

5. 设 $1,-\mathrm{i},2\mathrm{i}$ 是三次多项式 $P(x)$ 的根,又 $P(\mathrm{i})=4(1+\mathrm{i})$. 求 $P(x)$.

2.3　实系数多项式的因式分解

以下我们讨论的多项式都是实系数多项式，不再说明.

实系数多项式称为 $\mathbf{R}$ 上多项式. $\mathbf{R}$ 上多项式的全体记为 $\mathbf{R}[x]$.

如果 $P(x) \in \mathbf{R}[x]$，由定理 2.2.3 可知，$P(x)$ 可以分解成复系数一次式的乘积，但在微积分中，我们常要考虑把 $P(x)$ 分解成实系数多项式乘积的问题.

设 $p(x) \in \mathbf{R}[x]$. 如果不存在 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$，使 $p(x) = p_1(x)p_2(x)$，而且 $\deg p_1 \geqslant 1$，$\deg p_2 \geqslant 1$，则称 $p(x)$ 是 $\mathbf{R}[x]$ 上不可约多项式.

类似可以定义 $\mathbf{C}[x]$ 上不可约多项式. 但由定理 2.2.3 可知，$\mathbf{C}[x]$ 上的不可约多项式只有零次式（非零常数）和一次式.

$\mathbf{R}[x]$ 上则有高于 1 次的不可约多项式. 例如，x^2+1，x^2+x+1 等.

本节讨论将 $\mathbf{R}[x]$ 上的多项式分解成 $\mathbf{R}[x]$ 上不可约多项式的乘积的问题.

定理 2.3.1　设 $P(x) \in \mathbf{R}[x]$. 若 α 是 $P(x)$ 的根，则 $\bar{\alpha}$ 也是 $P(x)$ 的根，并且它们有相同的重数.

证　可设 α 是虚数，也就是 $\bar{\alpha} \neq \alpha$.

设 α 是 $P(x)$ 的 $k(k \geqslant 1)$ 重根，则由 $P(\alpha) = 0$，可知

$P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$,即 $\bar{\alpha}$ 也是 $P(x)$ 的根,设 $\bar{\alpha}$ 是 $P(x)$ 的 k' 重根,由式(2.2.1)可知

$$P(x) = (x-\alpha)^k (x-\bar{\alpha})^{k'} P_1(x),$$

$$P_1(\alpha) P_1(\bar{\alpha}) \neq 0.$$

若 $k' > k$,则有

$$P(x) = [x^2 - (\alpha + \bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha}]^k (x - \bar{\alpha})^{k'-k} P_1(x).$$

由于$[x^2 - (\alpha + \bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha}]^k$ 是实系数多项式,故 $Q(x) = (x-\bar{\alpha})^{k'-k} P_1(x)$ 也是实系数多项式,且 $\bar{\alpha}$ 是 $Q(x)$ 的根,于是 α 也是$Q(x)$ 的根,但 $Q(\alpha) = (\alpha - \bar{\alpha})^{k'-k} Q(\alpha) \neq 0$,此矛盾说明不能有 $k' > k$,同样不能有 $k > k'$,所以 $k = k'$.

推论 2.3.1 如果 $P(x) \in \mathbf{R}[x]$,$\deg P = 2n+1$,那么 $P(x)$ 有实根.

显然,$P(x)$ 是 $\mathbf{R}[x]$ 上二次不可约多项式的充分必要条件是 $P(x)$ 有一对共轭虚根.

定理 2.3.2 设 $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $\deg P \geqslant 1$,则有

$$P(x) = A(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdots \cdot (x^2 + p_r x + q_r)^{l_r}, \tag{2.3.1}$$

其中,$\alpha_i (i = 1,\cdots,s)$ 是不同的实数,(p_j, q_j) 是不同的实数对并满足 $p_j^2 < 4q_j (j = 1,\cdots,r)$,且 $k_1,\cdots,k_s,l_1,\cdots,l_r \in \mathbf{N}$,并有 $k_1 + \cdots + k_s + 2l_1 + \cdots + 2l_r = \deg P$.如果不计乘积的次序,则式(2.3.1)还是唯一的.

证 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是 $P(x)$ 的不同实根,$\beta_1 \pm \mathrm{i}\gamma_1,\cdots,\beta_r \pm \mathrm{i}\gamma_r$ 是$P(x)$ 的不同虚根对,则由定理 2.2.3 可知,当不计乘积的次序时,唯一地有

$$
\begin{aligned}
P(x) = & A(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s} \\
& \cdot(x-\beta_1-\mathrm{i}\gamma_1)^{l_1}(x-\beta_1+\mathrm{i}\gamma_1)^{l_1}\cdots \\
& \cdot(x-\beta_r-\mathrm{i}\gamma_r)^{l_r}(x-\beta_r+\mathrm{i}\gamma_r)^{l_r} \\
= & A(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots \\
& \cdot(x^2+p_rx+q_r)^{l_r},
\end{aligned}
$$

其中，$p_j=-2\beta_j, q_j=\beta_j^2+\gamma_j^2\ (j=1,\cdots,r)$. 定理得证.

由定理 2.3.1 可知，$\mathbf{R}[x]$ 中不可约多项式的次数至多为 2.

式(2.3.1)叫实系数多项式 $P(x)$ 的实标准因式分解式.

例 2.3.1 求下列多项式的实标准因式分解式：

(1) x^3+1；(2) x^4+1；(3) x^4+x^2+1.

解 (1) x^3+1 只有一个实根 -1，故

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

(2) x^4+1 有两对共轭虚根，据此可求出 x^4+1 的分解式，也可用待定系数法求 x^4+1 的分解式. 令

$$x^4+1=(x^2+\alpha x+\gamma)\left(x^2+\beta x+\frac{1}{\gamma}\right),$$

可得到

$$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta=-2,\ \frac{\alpha}{\gamma}+\beta\gamma=0.$$

故有 $\alpha=-\beta=\sqrt{2}, \gamma=1$，即

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

(3) 易知

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

例 2.3.2 设 $P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$，$p, q \in \mathbf{R}$ 且 $p^2 < 4q$. 若 $x^2 + px + q \mid P(x)Q(x)$，则 $x^2 + px + q$ 整除 $P(x)$ 或 $Q(x)$.

证 因为 $p^2 < 4q$，故 $x^2 + px + q$ 有一对共轭虚根 a 和 $\bar{a}$. 由于 $x - a \mid P(x)Q(x)$. 故由 2.1 节习题，可知 $x - a \mid P(x)$ 或 $Q(x)$. 若 $x - a \mid P(x)$，则 a 是 $P(x)$ 的根. 由于 $P(x) \in \mathbf{R}[x]$，故 $\bar{a}$ 也是 $P(x)$ 的根. 于是

$$(x - a)(x - \bar{a}) = x^2 + px + q \mid P(x).$$

同理，若 $x - a \mid Q(x)$，则 $x^2 + px + q \mid Q(x)$.

习题 2.3

1. 求下列多项式的实标准分解式：

(1) $x^4 - x^2 + 1$；

(2) $x^8 + x^4 + 1$；

(3) $x^6 - 5x^4 + x^2 - 5$；

(4) $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$.

(提示：原式 $= (x^2 + 1)^2 + 4x(x^2 + 1) + 3x^2$.)

2. 设 $P(x) \in \mathbf{R}[x]$，已知

$$\deg P = 5,\ P(1) = P(1 + \mathrm{i}) = P(\mathrm{i}) = 0,\ P(0) = -2.$$

求 $P(x)$.

感觉到数学的美，感觉到数与形的协调，感觉到几何的优雅，这是所有真正的数学家都清楚的真实的美的感觉。

——庞加莱

第 3 章　解析几何补充

3.1　二阶行列式与二元一次方程组

3.1.1　二阶行列式

设 a_1, a_2, b_1, b_2 是 4 个数，把它们排成一个方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

称为一个二阶矩阵. 数 $a_1 b_2 - a_2 b_1$ 叫 A 的行列式，记成 $|A|$，也记成 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. 所以一个二阶行列式给出了 4 个数的排列方式，同时还规定了它们的一种运算.

a_1, a_2, b_1, b_2 叫 A 和 $|A|$ 的元素.

(a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) 叫 A 和 $|A|$ 的第 1 行和第 2 行.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 叫 A 和 $|A|$ 的第 1 列和第 2 列.

例 3.1.1　我们有

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

容易验证,行列式满足下列性质:

1° $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ (即行列互换,行列式的值不变);

2° $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}$(两行互换或两列互换,行列式的值变号);

3° $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ 的充分必要条件是 $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$.

3.1.2 Cramer 定理

用消元法可以解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}. \tag{3.1.1}$$

当 $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ 时,容易解得

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

如果用行列式来记,就是

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

称

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

为方程组(3.1.1)的系数行列式.

称

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

为方程组(3.1.1)的置换行列式，Δ_x 是在 Δ 中用自由列 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 置换 x 的系数列 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 得到的行列式，Δ_y 则是用 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 置换 Δ 中 y 的系数列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 得到的行列式. 于是，我们有下面的定理：

定理 3.1.1(Cramer)　如果 $\Delta\neq 0$，则方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

有唯一解

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{3.1.2}$$

在方程组(3.1.1)中，如果 $a_1=b_1=0$ 或 $a_2=b_2=0$，

那么方程组(3.1.1)将成为一种很容易处理的形式，所以以后总是假定这种情形不在我们的讨论中出现.

例 3.1.2 求解方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-2y=-3 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} ix+(1+i)y=2i \\ (1-i)x+(2-i)y=1+2i \end{cases}$.

解 (1) 易知

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -16+9=-7,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6-8=-14,$$

故有

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2.$$

(2) 易知

$$\Delta = \begin{vmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 2-i \end{vmatrix} = 2i+1-2=2i-1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2i & 1+i \\ 1+2i & 2-i \end{vmatrix} = 4i+2+1-3i=3+i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} i & 2i \\ 1-i & 1+2i \end{vmatrix} = i-2-2i-2=-4-i,$$

故

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{3+\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}=\frac{1}{5}(3+\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})$$
$$=-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}\mathrm{i},$$
$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-4-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}=\frac{1}{5}(-4-\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{9}{5}\mathrm{i}.$$

今后我们只讨论 **R** 上的二元一次方程组，即总假定 a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2 都是实数.

3.1.3　二元一次齐次方程组

方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=0 & (L_1)\\ a_2x+b_2y=0 & (L_2)\end{cases}\tag{3.1.3}$$

叫二元一次齐次方程组.

当然可以用代数方法讨论方程组(3.1.3)，但我们用更直观的解析几何方法来讨论方程组(3.1.3).

由于 a_1，b_1 和 a_2，b_2 都不同时为零，所以方程组(3.1.3)的两个方程分别代表直角坐标平面 xOy 上的直线 L_1 和 L_2，它们的交点就是方程组(3.1.3)的解，于是我们有下面的定理：

定理3.1.2　1° 当 $\Delta\neq0$ 时，方程组(3.1.3)有唯一解 $x=y=0$；

2° 当 $\Delta = 0$ 时，方程组(3.1.3) 有无穷多组解.

证 1° 当 $\Delta \neq 0$ 时，$a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2$，故 L_1 与 L_2 是两相交直线，它们有唯一交点(0,0)，即方程组(3.1.3) 有唯一解 $x = 0, y = 0$.

2° 当 $\Delta = 0$ 时，$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$，故 L_1 与 L_2 重合，因而直线上的点(x, y) 都是方程组(3.1.3) 的解，有无穷多组. 特别地，方程组(3.1.3) 有非零解.

例 3.1.3 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$ 有唯一解 $x = y = 0$，因为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$$

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$ 有无穷多组解，因为 $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

3.1.4 二元一次方程组

用类似3.1.3小节中的方法可以讨论方程组

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 & (L_1) \\ a_2 x + b_2 y = c_2 & (L_2) \end{cases}, \tag{3.1.4}$$

我们有：

定理 3.1.3 1° 当 $\Delta \neq 0$ 时，方程组(3.1.4) 有唯一解；

2° 当 $\Delta = 0$，$\Delta_x \neq 0$ 时，方程组(3.1.4) 无解；

3° 当 $\Delta = \Delta_x = 0$ 时，方程组(3.1.4) 有无穷多解.

证 1° 当 $\Delta \neq 0$ 时，L_1 与 L_2 是两条相交直线，有唯一交点(x, y)，即是方程组(3.1.4) 的唯一解；

2° 因为 $\Delta = 0$,故 $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$,即有 $L_1 // L_2$,但因 $c_1 : c_2 \neq b_1 : b_2$,故 L_1 与 L_2 没有交点,所以方程组(3.1.4)无解.

注意,这时也有 $c_1 : c_2 \neq a_1 : a_2$,即有 $\Delta_y \neq 0$.

3° 由于 $\Delta = \Delta_x = 0$,故 $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$,所以 L_1 与 L_2 重合,直线上的点(x,y)都是方程组(3.1.4)的解,有无穷多组.

例 3.1.4 求解方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 6y = 1 \end{cases}.$$

解 因为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

故方程组无解.

例 3.1.5 求解方程组

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 9x + 3y = 3 \end{cases}.$$

解 因为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

故方程组有无穷多解,它们是

$$y = 1 - 3x\ (x \in \mathbf{R}).$$

习题3.1

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x+5y=19\\2x+7y=20\end{cases}$；　　(2) $\begin{cases}3x+4y=1\\6x+8y=2\end{cases}$；

(3) $\begin{cases}3x+5y=4\\6x+10y=2\end{cases}$.

2. 设 $k\in\mathbf{R}$，求解方程组

$$\begin{cases}(2k-1)x-(k+1)y=3k\\(4k-1)x-(3k+1)y=5k+4\end{cases}.$$

3. 已知方程组

$$\begin{cases}(m-1)x+(m-1)y=m+n\\mx-ny=7\end{cases}$$

的解是(2,5)，求 m,n.

4. k,l 取什么值时，方程组 $\begin{cases}4kx+y=l\\x+ky=1\end{cases}$ 有无穷多组解？

3.2　极　坐　标

3.2.1　极坐标的概念

用两个数确定平面上一点的位置，除了使用直角坐标法

以外，常用的还有极坐标法．在某些场合，使用极坐标能使问题更便于研究．

在平面上取定一点 O，称为极点，并自 O 引一射线 OA，称为极轴(图 3.1)．于是平面上任意一点 M(不是极点) 的位置，可以由两个数 $r=|OM|$ 及 $\theta=\angle AOM$ 来决定．r,θ 称为点 M 的极坐标，且以记号 $M(r,\theta)$ 来表示点 M，r 称为点 M 的极径，θ 称为点 M 的极角．

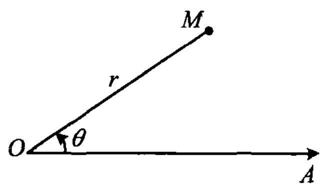


图 3.1　极坐标

根据上述定义，点 M(不是极点) 的极坐标 r,θ 的数值分别受到以下的限制：

$$r>0,\ 0\leqslant\theta<2\pi.$$

在这样的限制下，任意给定一对数 r,θ，平面上就对应着唯一的一点 M；反之，平面上除极点 O 以外的任意一点 M，必有唯一一对数 r,θ 与它对应．当点 M 为极点时，$r=0$，而 θ 可取任意指定的值．

3.2.2　极坐标与直角坐标的关系

有时为了研究问题方便起见，需要把极坐标变换成直角坐标，或者需要把直角坐标变换成极坐标，因此，我们需要研

究这两种坐标之间的关系.

设平面上有一直角坐标系和极坐标系,它们是这样取定的:极点和坐标原点重合,极轴和 x 轴的正半轴重合.设平面上任意一点 M 在直角坐标系中的坐标为 x,y,在极坐标系中的坐标为 r,θ,则由图 3.2 可知

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta. \tag{3.2.1}$$

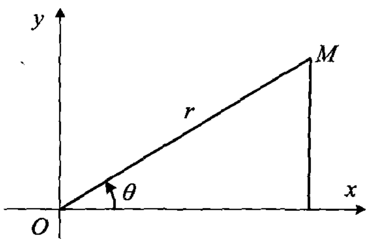


图 3.2　极坐标与直角坐标

由式(3.2.1) 容易得到

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2,$$

因此

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.2.2}$$

把公式(3.2.1) 中的两个式子(设 $x \neq 0$) 相除得

$$\tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{3.2.3}$$

由 $\tan\theta$ 来决定 θ 时还应考虑点 $M(x,y)$ 所处的象限.

例 3.2.1　将极坐标 $\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$ 变换成直角坐标.

解　利用公式(3.2.1),得

$$x = 5 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{5}{2},$$

$$y = 5 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

例 3.2.2 将直角坐标(1, -1) 变换成极坐标.

解 利用公式(3.2.2) 和(3.2.3),得

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1.$$

因点(1, -1) 在第四象限,故 $\theta = \frac{7\pi}{4}$.

3.2.3 曲线的极坐标方程

和直角坐标系中曲线可用含有变量 x,y 的方程表示一样,在极坐标系中曲线可用含有变量 r,θ 的方程来表示.

曲线的极坐标方程可由其几何意义确定,也可由其直角坐标方程用式(3.2.1) 求得.

例 3.2.3 求中心在极点 O、半径为 a 的圆的极坐标方程.

解 易知,所求方程为 $r = a$.

例 3.2.4 求通过极点 O,且与极轴 OA 成 α 角的直线的极坐标方程.

解 易知,所求方程为 $\theta = \alpha$.

例 3.2.5 设半径为 a 的圆经过极点 O,其中心 C 在极轴 OA 上,求它的极坐标方程.

解 设圆周与极轴除了在极点 O 相交外，还交于另一点 B. 在圆周上任取一点 $M(r,\theta)$（图 3.3）. 因为 $\triangle OBM$ 是直角三角形，所以 $r = |OB|\cos\theta$. 但 $|OB| = 2a$，故 $r = 2a\cos\theta$，这就是所求圆的极坐标方程.

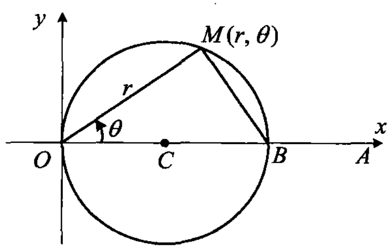


图 3.3　例 3.2.5 示意图

另外，将式(3.2.1)代入这个圆的直角坐标方程 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$，也可得到圆的极坐标方程 $r = 2a\cos\theta$.

例 3.2.6　已知曲线的直角坐标方程为

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2),$$

求它的极坐标方程.

解 将式(3.2.1)代入原方程，得

$$r^2 = 4(\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$

即

$$r = 2\sqrt{\cos 2\theta}.$$

例 3.2.7　曲线的极坐标方程是

$$r^2(\sin\theta + 2\cos\theta) = 6,$$

求它的直角坐标方程.

解 由式(3.2.1)可知，曲线的直角坐标方程为

$$\sqrt{x^2+y^2}\,(2x+y)=6$$

或

$$(x^2+y^2)(2x+y)^2=36.$$

习题3.2

1. 已知各点的直角坐标分别是

$$(-2,0),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ (0,4),\ (\sqrt{3},-1),\ (-3,-4),$$

求它们的极坐标.

2. 已知各点的极坐标分别是

$$\left(1,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(2,\frac{\pi}{6}\right),\ \left(3,-\frac{2}{3}\pi\right),$$

求它们的直角坐标.

3. $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 的极坐标分别是

$$(r_1,\theta_1),\ (r_2,\theta_2),$$

求它们之间的距离.

4. 曲线的直角坐标方程是:

(1) $y^2=12x$； (2) $x^2+y^2=4x$； (3) $x^2-y^2=4$.

写出它们的极坐标方程.

5. 曲线的极坐标方程是:

(1) $r^2\sin\theta=10$；(2) $r=4\sin 2\theta$；(3) $r^2\cos 2\theta=-1$.

求它们的直角坐标方程.

3.3 参数方程

3.3.1 参数方程的概念

平面上曲线的方程，常用曲线上动点的直角坐标 x，y（或极坐标 r,θ）之间的一个方程来表示，这就是所谓曲线的直角坐标（或极坐标）方程.

但从力学观点来考察，如果把曲线看做质点运动的轨迹，那么运动轨迹上点的坐标 x 与 y 分别是时间 t 的函数.所以作为质点运动轨迹的曲线，可以用两个方程 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 来表示.

举例来说，以原点为中心、R 为半径的圆，可以看做是一个质点作等速圆周运动的轨迹.设质点运动的角速度为 ω，从圆周与 Ox 轴的交点 A 的位置按逆时针方向开始运动，经过时间 t 后，质点在圆周上达到一点 M 的位置（图 3.4）.由于

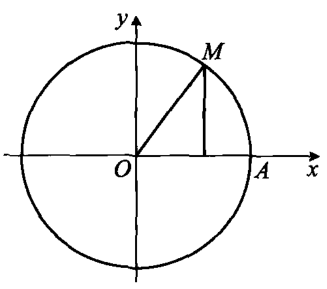


图 3.4　圆

$\angle AOM=\omega t$，所以点 M 的坐标 x 与 y 可以各用一个 t 的函数表示为

$$x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t. \qquad (3.3.1)$$

对于 t 的每一个值，式(3.3.1) 就有圆上的一点 $M(x,y)$ 与它对应. 当 t 的值从 0 逐渐增至 $\frac{2\pi}{\omega}$ 时，点 M 就从点 A 开始按逆时针方向描出一个圆. 所以式(3.3.1) 中的两个方程就表示以原点为中心、R 为半径的圆的方程.

设平面上已建立直角坐标系. $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 是定义在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上的两个函数，则平面点集 $\{(x,y)\mid x=\varphi(t),y=\psi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\}$ 称为平面上的一条参数曲线 C. 而

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \qquad (3.3.2)$$

就称为曲线 C 的参数方程，t 称为曲线的参数.

根据上述定义，方程(3.3.1) 就是以原点为中心、R 为半径的圆的参数方程.

这里要注意，参数方程(3.3.2) 中的参数 t 并不一定代表时间，还可以代表其他任何量，如角度、有向线段的长等，甚至可以没有明确意义.

一条曲线的参数方程与直角坐标方程之间有着密切的联系. 从已知曲线的参数方程消去参数 t，一般就得到这曲线的直角坐标方程. 例如把式(3.3.1) 中的两个方程的两端平方相加，消去 t 的结果就是这个圆的直角坐标方程

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (3.3.3)$$

反之，从已知曲线的直角坐标方程，我们引进适当的参数后，可以求得这曲线的参数方程. 例如，已知以原点 O 为中心、R 为半径的圆的直角坐标方程式(3.3.3)，用中心角 $\angle AOM = \varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，图 3.4) 作为参数，$x = R\cos\varphi$. 代入式(3.3.3)，解得 $y = R\sin\varphi$. 从而得到这个圆的参数方程

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi). \tag{3.3.4}$$

定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $y = f(x)$ 的图像称为显式曲线，它是一种特殊的参数曲线. 参数就是 x，曲线的参数方程是

$$x = x,\ y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b). \tag{3.3.5}$$

3.3.2 几种常见曲线的参数方程

从 3.3.1 小节关于圆的参数方程这个例子，得出通常建立曲线参数方程的两种方法：一种是像建立方程(3.3.1) 那样，把曲线看做动点的轨迹，适当选取参数 t，确定 x,y 为 t 的函数来表示；另一种是像建立方程(3.3.4) 那样，从已知曲线的直角坐标方程引入适当的参数，从而求得曲线的参数方程. 下面我们就根据这两种方法来建立几种曲线的参数方程.

1. 直线

设直线 L 通过点 $M_0(x_0,y_0)$，且与 x 轴的倾角为 α(图 3.5). 把这直线看做是质点作等速直线运动的轨迹，并设速度为 v，当时间 $t = 0$ 时，质点在 M_0 的位置. 设经过时间 t 后，

质点的位置为 M,它的坐标为(x,y).由于 $M_0M = vt$,故得

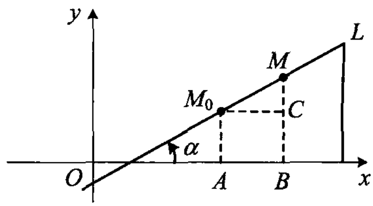


图 3.5　直线

$$\begin{cases} x = OB = OA + M_0C = x_0 + vt\cos\alpha \\ y = BM = AM_0 + CM = y_0 + vt\sin\alpha \end{cases} \tag{3.3.6}$$

或

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \tag{3.3.7}$$

其中,常数 $m = v\cos\alpha$,$n = v\sin\alpha$ 分别表示质点在x 轴和y 轴方向上的分速度.方程(3.3.7) 就是直线 L 以时间t 为参数的参数方程.

令 $vt = \mu$,由方程组(3.3.6) 又得直线 L 的参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + \mu\cos\alpha \\ y = y_0 + \mu\sin\alpha \end{cases}, \tag{3.3.8}$$

其中,参数 μ 表示有向线段M_0M 的长.

2. 椭圆

设已知椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

以原点 O 为中心,作两个同心圆(图 3.6),它们的半径分别为

a 和 b ($a > b$). 从原点 O 出发任作一射线，这射线与大圆及小圆分别交于点 A 及点 B. 再过 A 引 y 轴的平行线与椭圆相交于 P，并设点 P 的坐标为 (x, y). 取以 Ox 正半轴与 OA 的夹角 t 为参数. 由图 3.6，有

$$x = a\cos t,$$

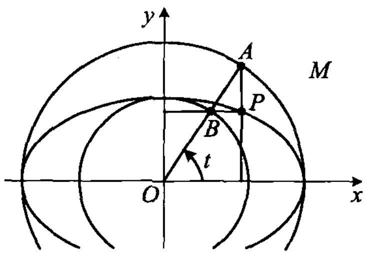


图 3.6　椭圆

代入已知的椭圆标准方程，解得

$$y = b\sin t.$$

于是这个椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \tag{3.3.9}$$

其中，参数 t 称为椭圆的离心角.

3. 摆线

一圆沿定直线滚动时，圆周上一定点所描出的轨迹称为摆线或旋轮线. 下面我们来建立它的参数方程.

设平面上已建立直角坐标系 xOy，半径为 a 的圆在 Ox 轴上滚动，圆心为 C(图 3.7). 滚动开始时，圆上一点 M 与原点重合. 圆滚动时，半径 CM 绕圆心转动，转动的角 t 叫滚动角，

以 t 作参数来确立摆线的参数方程.

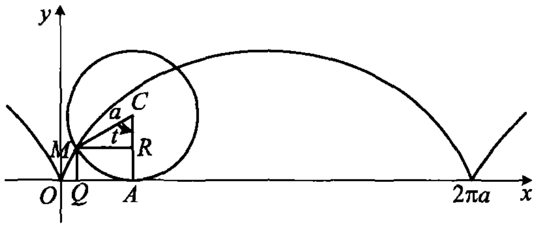


图 3.7 摆线

由图3.7可知,当滚动角为 t 时,弧$\overset{\frown}{AM}$的长等于 $|OA|$,所以 $|OA| = at$.于是 M 的 x 坐标为 $at - a\sin t$,而 M 的 y 坐标为 $a - a\cos t$.所以摆线的方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}. \tag{3.3.10}$$

摆线由无穷多条分支组成,$2k\pi \leqslant t \leqslant 2k\pi + 2\pi$ 时成为一个分支,叫摆线的一拱.

4. 圆的渐伸线

把一条没有弹性的绳子围绕在定圆周上.拉开绳子的一端并拉直,使绳子与圆周始终相切.绳子端点的轨迹,称为圆的渐伸线.

设定圆的中心为 O,半径为 a,而 A 是绳子未拉开时它的一端的位置(图3.8).现取 O 为原点,通过 O 与 A 的直线为 x 轴.设 $M(x,y)$ 是圆的渐伸线上的任意一点,这时绳子的一段为直线 MT,且是圆的切线.令 $\angle AOT = t$,则有

$$MT = |\overset{\frown}{AT}| = at.$$

分作 MC, TB 垂直于 x 轴, MD 平行 x 轴. 因 $\angle MTD = \angle AOT = t$, 于是有

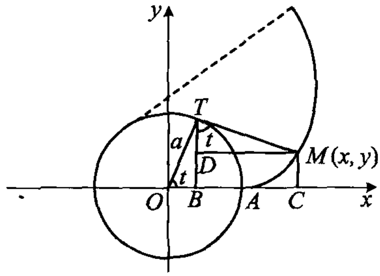


图 3.8　圆的渐伸线

$$\begin{aligned} x &= OC = OB + BC = OB + DM \\ &= a\cos t + at\sin t, \\ y &= CM = BD = BT - DT \\ &= a\sin t - at\cos t. \end{aligned}$$

所以圆的渐伸线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}. \tag{3.3.11}$$

当曲线 C 已由极坐标方程 $r = r(\theta)(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 给出时, 利用极坐标与直角坐标的关系, 可以写出 C 的参数方程 (以 θ 作参数). 这时

$$x = r\cos\theta = r(\theta)\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta = r(\theta)\sin\theta.$$

故 C 的参数方程为

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta$$
$$(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta). \tag{3.3.12}$$

习题3.3

1. 将下列参数方程化为直角坐标方程：

(1) $\begin{cases} x = at^2 \\ y = at \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} x = \dfrac{2a}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2at}{1+t^2} \end{cases}$；　　(4) $\begin{cases} x = t^2 - 3t \\ y = t - 1 \end{cases}$；

(5) $\begin{cases} x = \sin\theta, \\ y = \sin 2\theta \end{cases}$.

附录1　函数拾遗

1. $[x]$ 和 $\{x\}$

设 x 是一个实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记为 $[x]$. 由 $[x]$ 派生的另一个函数 $\{x\} = x - [x]$ 叫 x 的小数部分.

例如

$$[\pi] = 3,\ [-3.2] = -4,\ [1-\sqrt{5}] = -2,$$
$$\{3.1\} = 0.1,\ \{2\} = 0,\ \{-2.4\} = 0.6.$$

$[x]$ 和 $\{x\}$ 的图像如图 1 和 2 所示.

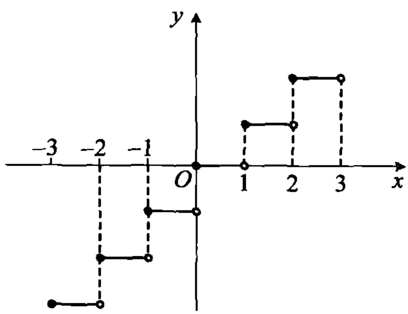


图 1　$[x]$

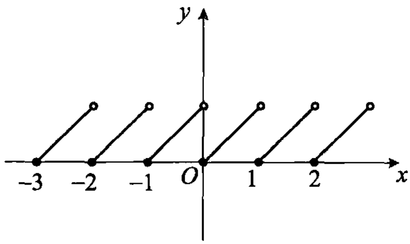


图 2 $\{x\}$

$[x]$ 和 $\{x\}$ 有下列性质：

1° $[x]\leqslant x<[x]+1$，等号当且仅当 $x\in\mathbf{Z}$ 时成立；

2° $0\leqslant\{x\}<1$，等号当且仅当 $x\in\mathbf{Z}$ 时成立；

3° 若 $x\leqslant y$，则 $[x]\leqslant[y]$；

4° $[x+m]=m+[x]$ 的充分必要条件是 $m\in\mathbf{Z}$；

5° $[x+y]\geqslant[x]+[y]$.

证 4° $\Rightarrow$ 由于 $m=[x+m]-[x]$，故 $m\in\mathbf{Z}$.

$\Leftarrow$ 设 $[x]=l$，则 $l\leqslant x<l+1$，于是

$$l+m\leqslant x+m<l+m+1,$$

故

$$[x+m]=l+m=[x]+m.$$

5° 由 4° 可知

$$\begin{aligned}[x+y]&=[[x]+[y]+\{x\}+\{y\}]\\&=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}].\end{aligned}$$

当 $0\leqslant\{x\}+\{y\}<1$ 时

$$[x+y]=[x]+[y],$$

当 $1\leqslant\{x\}+\{y\}<2$ 时

$$[x+y]=[x]+[y]+1.$$

综上，可知 5° 成立.

例 1（带余除法） 设 $m,n\in\mathbf{Z}, m\neq 0$，则存在唯一的整数 q 和 r，满足

$$n=mq+r\ (0\leqslant r<|m|),\tag{1}$$

证 当 $m>0$ 时，取 $q=\left[\dfrac{n}{m}\right]$，于是有 $q\leqslant\dfrac{n}{m}<q+1$，即 $qm\leqslant n<qm+m$. 取 $r=n-qm$，即得到式(1).

当 $m<0$ 时，存在 p 和 r，满足 $n=-mp+r(0\leqslant r<-m)$，取 $q=-p$ 也得到式(1).

如果还有 q_1,r_1 满足

$$n=mq_1+r_1\ (0\leqslant r_1<|m|),\tag{2}$$

那么式(1) 和(2) 相减，得到 $m(q-q_1)=(r_1-r)$，即 r_1-r 是 m 的倍数. 但显然 $|r_1-r|<|m|$，故只能有 $r_1-r=0$，即 $r=r_1, q=q_1$. 所以式(1) 中的 q,r 是唯一的.

例 2 证明：$[2x]=[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$.

证 由

$$\begin{aligned}[2x]&=[2[x]+2\{x\}]=2[x]+[2\{x\}]\\&=\begin{cases}2[x], & \{x\}<\dfrac{1}{2}\\ 2[x]+1, & \{x\}\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

及

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]+\left[\{x\}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\begin{cases}2[x], & \{x\}<\dfrac{1}{2}\\ 2[x]+1, & \{x\}\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases},$$

就得到$[2x]=[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$.

2. 符号函数

定义函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$\operatorname{sgn} x$ 称为x 的符号函数. 显然 $\operatorname{sgn} x$ 还可定义为

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

3. Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathbf{Q}\\ 0, & x\overline{\in}\mathbf{Q}\end{cases}.$$

4. Riemann 函数

在$(0,1)$上定义

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x\text{ 为既约分数}\dfrac{p}{q}(q>p>0)\\ 0, & x\overline{\in}\mathbf{Q}\end{cases}.$$

习题1

1. 证明

$$[2x]+[2y]\geqslant[x]+[y]+[x+y].$$

2. 求证

$$\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right].$$

附录 2　常用代数恒等式

1. $a^n - b^n = (a-b)$

$$\cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

2. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)[a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots$

$$+ (-1)^k a^{2n-k}b^k + \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n}].$$

3. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$

4. $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m.$

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

6. (Abel 定理) 记 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$(约定 $A_0 = 0$),则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

证

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k$$

$$
\begin{aligned}
&= A_1b_1 + A_2b_2 + \cdots + A_{n-1}b_{n-1} \\
&\quad + A_nb_n - A_1b_2 - A_2b_3 - \cdots - A_{n-1}b_n \\
&= A_nb_n + A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots \\
&\quad + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) \\
&= A_nb_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}).
\end{aligned}
$$

例 求 $S = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

解 令 $a_k = 1, b_k = k^2$,于是 $A_k = k$,由 Abel 定理可得到

$$
\begin{aligned}
S &= n \cdot n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k[k^2 - (k+1)^2] \\
&= n^3 - 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= n^3 + 2n^2 - 2S - \frac{n(n-1)}{2},
\end{aligned}
$$

所以

$$
S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
$$

习题 2

1. $a > 0$,求证:$\sqrt[n]{a} - 1 = \dfrac{a-1}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + a^{\frac{1}{n}} + 1}$.

2. 利用 Abel 定理,求 $S = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

附录3　常用不等式

1. 若 $x>0$,则 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$,等号当且仅当 $x=1$ 时成立.

例1　若 $x>0,k>0$,则 $kx+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{k}$,等号当且仅当 $x=\frac{1}{\sqrt{k}}$ 时成立.

证　$kx+\frac{1}{x}=\sqrt{k}\left(\sqrt{k}x+\frac{1}{\sqrt{k}x}\right)$,由1即得.

2.(平均不等式)设 $a>0,b>0$,则

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2},$$

等号当且仅当 $a=b$ 时成立.一般地,若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 皆为正数,则有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是同号实数,且都大于 -1,则

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

当 a_i 皆不为零且 $n \geqslant 2$ 时大于号成立.

证 对 n 用归纳法即得.

4. 设 $x > -1$,则 $(1+x)^n \geqslant 1+nx$,当 $x \neq 0$ 且 $n > 1$ 时大于号成立.

证 在 3 中取 $a_i = x\ (i=1,2,\cdots,n)$ 即得.

例 2 设 $n \geqslant 1$,证明:$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

证 由 4 可知

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \\
&= \frac{n+1}{n}\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&> \frac{n+1}{n}\left[1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right] = 1,
\end{aligned}$$

即得结论.

5. 设 $b_1 b_2 > 0$, $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$,则$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} < \frac{a_2}{b_2}$.

证 由 $a_1 b_2 < a_2 b_1$,可知

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 < a_1 b_1 + a_2 b_1,$$

即

$$a_1(b_1+b_2) < b_1(a_1+a_2),$$

此即左半边不等式.又由 $a_1 b_2 + a_2 b_2 < a_2 b_2 + a_2 b_1$,可得

到右半边不等式.

6. 设 $n \geqslant 2, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 皆为正数(或皆为负数),且

$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_n}{b_n}$,则

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

证 对 n 用归纳法. $n = 2$ 时即是5中的不等式. 若已有

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

则由 5 中的不等式,得

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

习题3

1. 设 $a, b, c > 0, a + b + c = 1$. 求证

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9,$$

等号当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时成立.

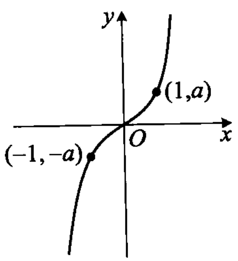
2. 证明附录 3 中第 3 条.

3. 设 $n \geqslant 1$,求证

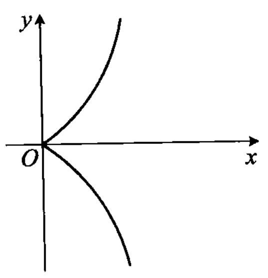
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

附录4　常用平面曲线

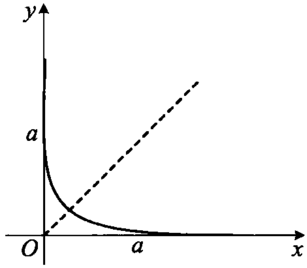
（1）立方抛物线：$y = ax^3$.



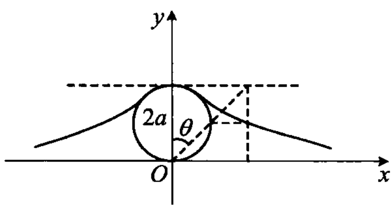
（2）半立方抛物线：$y^2 = ax^3$.



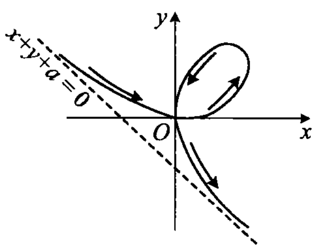
(3) 抛物线：$x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ 或$\begin{cases}x=a\cos^4 t\\ y=a\sin^4 t\end{cases}$.



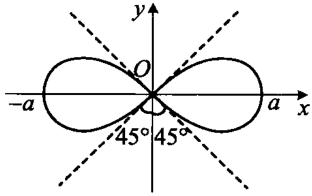
(4) 箕舌线：$y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 或$\begin{cases}x=2a\tan\theta\\ y=2a\cos^2\theta\end{cases}$.



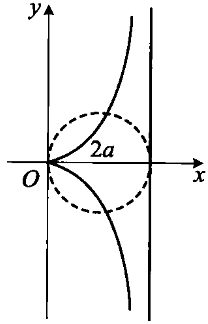
(5) 叶形线：$x^3+y^3-3axy=0$ 或$\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}$.



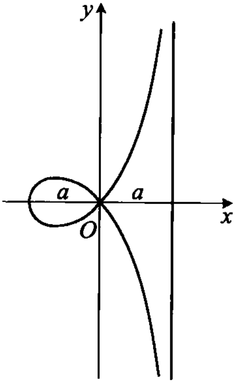
(6) 双纽线：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 或 $r^2=a^2\cos 2\theta$.



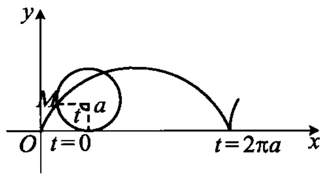
(7) 蔓叶线：$y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$.



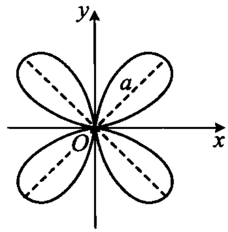
(8) 环索线：$y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$.



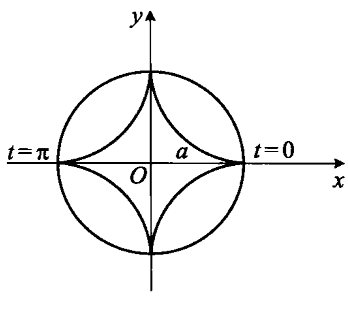
(9) 摆线：$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.



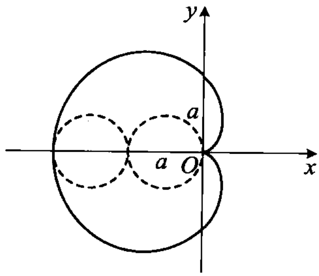
(10) 四叶玫瑰线：$r = a\sin 2\theta$.



(11) 星形线：$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 或 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

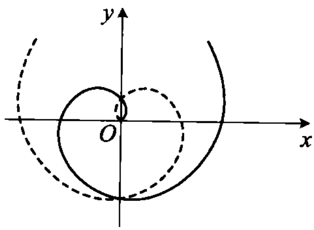


(12) 心脏线：$r = a(1-\cos\theta)$.



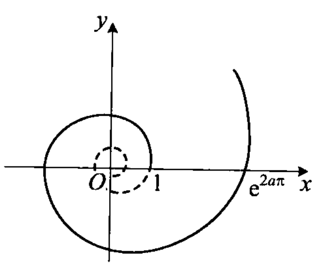
(13) 阿基米德螺线：$r = a\theta$.

第一环面积 $= \dfrac{4}{3}\pi^3 a^3$.

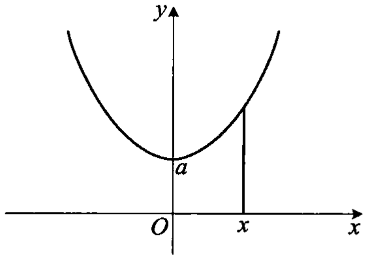


(14) 等角螺线(对数螺线)：$r = e^{a\theta}$.

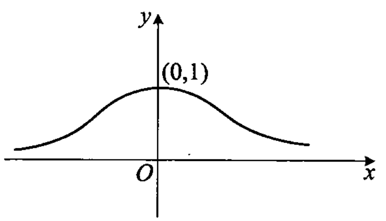
第一环面积 $= \dfrac{1}{4a}(e^{4\pi a} - 1)$.



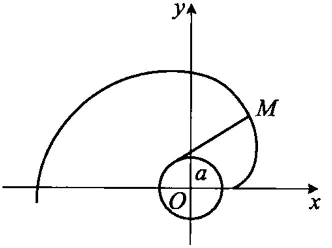
（15）悬链线：$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$.



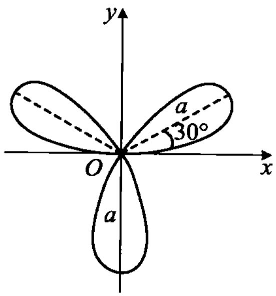
（16）概率曲线：$y = e^{-x^2}$.



（17）圆的渐开线：$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$.



(18) 三叶玫瑰线：$r = a\sin 3\theta$.



习题参考答案

第1章　复　　数

习题 1.1

1. i；-1；1；$-i$.
2. (1) $x=2, y=1$；　(2) $x=-1, y=5$.
3. (1) 圆：$(x-3)^2+y^2=25$；

   (2) 直线：$4x+2y=-3$；

   (3) 直线：$x+y=0$；

   (4) 双曲线：$x^2-y^2=a^2$.
5. 平行四边形四边平方之和等于二对角线平方之和.
7. $b=d=0, a^2\geqslant 4c$ 或 $b\neq 0, abd=b^2c+d^2$.

习题 1.2

1. (1) $\sqrt{3}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$；

   (2) $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$；

   (3) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$；

(4) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

2. (1) $\pi+\arctan\frac{12}{5}$； (2) $\frac{7\pi}{4}$； (3) 40°.

3. (1) $-\frac{1}{64}$； (2) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$；

(3) $-\mathrm{i}$； (4) $8-8\sqrt{3}\mathrm{i}$.

5. $z=5+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

6. $3\theta-2\pi$.

7. $n=4k(k\in\mathbf{Z})$,最小正整数为 4.

8. $\frac{\pi}{3}$ 或$\frac{5\pi}{3}$.

9. $1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}$.

10. 1° $z=0$;2° $n=1$ 时,$z\in\mathbf{R}$;

3° $n>1$ 时,$z=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n+1}$ $(k=0,1,\cdots,n)$.

11. $2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k=1\\ 2^{2k+1}(-1)^k, & n=2k\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$.

13. (1) $\mathrm{e}\cos2+\mathrm{e}^2\cos3+\mathrm{i}(\mathrm{e}\sin2+\mathrm{e}^2\sin3)$;

(2) $\mathrm{e}^3\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+\mathrm{e}^3\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}$;

(3) $-\mathrm{i}\frac{\cos x\cos2x}{2\sin x}$.

14. $\frac{3}{2}\pi-\theta$.

第2章　多　项　式

习题 2.1

1. $p(x)+Q(x)=2x^3+(3+\mathrm{i})x^2+(1+\mathrm{i})x+2$;

$p(x)-Q(x)=2x^3+(3-\mathrm{i})x^2-(1+\mathrm{i})x$;

$$p(x)=Q(x)=2\mathrm{i}x^5+(2+5\mathrm{i})x^4+(5+3\mathrm{i})x^3+(3+\mathrm{i})x^2+(1+\mathrm{i})x+1.$$

2. (1) $q(x)=x+5, r(x)=10x-6$;

(2) $q(x)=x^2+x-1, r(x)=-5x+7$;

(3) $q(x)=x^2-\mathrm{i}x, r(x)=1$.

6. $b=-2, c=-4, d=5$.

习题 2.2

4. (1) $x^3+1=(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$;

(2) $x^4+2x^2+1=(x+\mathrm{i})^2(x-\mathrm{i})^2$.

5. $P(x)=-2\mathrm{i}x^3-(2-2\mathrm{i})x^2+(2-4\mathrm{i})x+4\mathrm{i}$.

习题 2.3

1. (1) $x^4-x^2+1=(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$;

(2) $$x^8+x^4+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)\cdot(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1);$$

(3) $x^6-5x^4+x^2-5$

$=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$;

(4) $x^4+4x^2+5x^2+4x+1$

$=(x^2+x+1)\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. $P(x)=x^5-3x^4+5x^3-5x^2+4x-2$.

第3章 解析几何补充

习题3.1

1. (1) $x=3$, $y=2$;

(2) $y=\frac{1-3x}{4}$;

(3) 无解.

2. $k=0$时,无解;

$k=2$时,有无穷个解:$y=x-2$;

$k\neq 0,2$时,$x=\frac{2k+1}{k}$,$y=\frac{k-1}{k}$.

3. $m=1$,$n=-1$.

4. $k=\frac{1}{2}$,$l=2$或$k=-\frac{1}{2}$,$l=-2$.

习题3.2

1. $(2,\pi)$;$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right)$;$\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$;$\left(2,\frac{11}{6}\pi\right)$;$\left(5,\pi+\arctan\frac{4}{3}\right)$.

2. $(0,1)$;$(\sqrt{3},1)$;$\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. $\rho=\sqrt{r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$.

4. (1) $r=12\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$;

(2) $r=4\cos\theta$;

(3) $r^2=\dfrac{4}{\cos 2\theta}$.

5. (1) $(x^2+y^2)y^2=100$;

(2) $(x^2+y^2)^{3/2}=8xy$;

(3) $x^2-y^2=-1$.

习题 3.3

1. (1) $ax=y^2$;

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

(3) $x^2+y^2=2ax$;

(4) $x=y^2-y-2$;

(5) $y^2=4x^2(1-x^2)$.

SHUXUE

GAODENG XUEXIAO GUODU JIAOCAI DUBEN

SHUXUE

选题编辑 张春瑾
责任编辑 郭红建
封面设计 黄 彦

本书作者为中国科学技术大学知名教授，长期从事大学微积分教学，同时也长期关注中学数学教学，曾编写过中学奥赛相关图书以及大学《微积分》教材。

本书是作者结合多年的教学经验以及当前中学数学的现状，针对高中数学与大学数学之间的知识漏点编写而成的。内容包括：复数和多项式的基本性质、极坐标与参数方程等，同时配有一定的例题及习题。本书内容选择详略得当，叙述简练明了、概念清晰、证明流畅，以开拓学生思维、提高理解能力为目的，确保大学新生在数学学习上得到平稳过渡。

定价：6.00元

ISBN 978-7-312-02707-9