

实验 3 滤波器设计与滤波器特性分析

夏厚 PB18051031

3.1 实验目的

- 1、掌握 Matlab 下滤波器设计工具（fdatool）的使用方法。
- 2、掌握 IIR 滤波器设计方法与 FIR 滤波器设计方法。
- 3、了解 IIR 滤波器设计与 FIR 滤波器设计方法的差异。
- 4、掌握滤波器特性分析的方法。
- 5、了解 Matlab 中 sptool 工具的使用方法。

3.2 实验原理

本实验利用 Matlab 的工具 fdatool 完成，请仔细阅读 Matlab 中滤波器设计工具箱 fdatool 的联机帮助。IIR 与 FIR 滤波器设计的原理请参考课程内容。

由于最新版 Matlab 中已经删除了 fdatool，所以以下实验滤波器设计使用的是 filterDesigner。

```
>> fdatool
```

警告：以后的版本中将会删除 FDAT00L。请改用 filterDesigner。

信号产生、信号处理、信号频谱显示仍然使用 sptool。

界面如下：

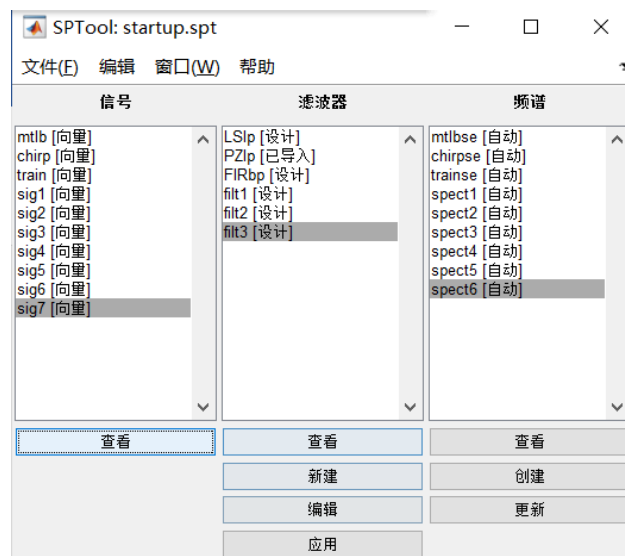


Figure 10-10 shows the amplitude response of a Butterworth low-pass filter. The x-axis represents the normalized frequency in units of π rad/sample, ranging from 0 to 1.0. The y-axis represents the magnitude in dB, ranging from -100 to 0. The curve shows a smooth, monotonic increase in magnitude as frequency increases. Two specific points are highlighted with callouts:

- At a normalized frequency of 0.4000244, the magnitude is -30.59883 dB.
- At a normalized frequency of 0.6025391, the magnitude is -0.6172833 dB.

根据传递函数系数可以写出这个数字滤波器的传递函数 $H(z)$:

$$H(z) = \frac{0.0262z^4 - 0.1047z^3 + 0.1570z^2 - 0.1047z + 0.0262}{z^4 + 1.5289z^3 + 1.6537z^2 + 0.9452z + 0.2796}$$

从传递函数可以看出该滤波器阶数为 4。根据幅频特性曲线中标出的两点的值可知，该滤波器在归一化频率为 0.6π 时，衰减为 $0.6173\text{dB} < 0.8\text{dB}$ ，归一化频率为 0.4π 时，衰减为 $30.6\text{dB} > 20\text{dB}$ ，所以满足设计要求。

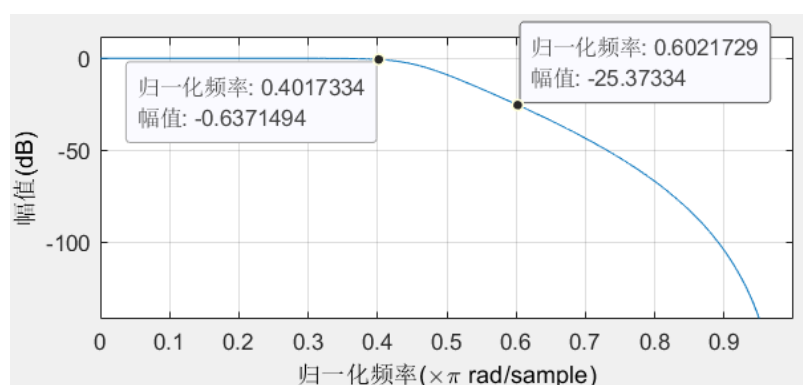
2、采样频率为 1Hz，设计一个数字低通滤波器，要求其通带临界频率 $f_p = 0.2\text{Hz}$ ，通带内衰减小于 1dB ($\alpha_p = 1\text{dB}$)，阻带临界频率 $f_s = 0.3\text{Hz}$ ，阻带内衰减大于 25dB ($\alpha_s = 25\text{dB}$)。求这个数字滤波器的传递函数 $H(z)$ ，输出它的幅频特性曲线。

①、首先用 butterworth 模型设计

显示传递函数系数如下：

```
分子:
0. 017873236631506896066046152782291756012
0. 107239419789041376396276916693750536069
0. 26809854947260342017401058001269120723
0. 35746473263013789356534744001692160964
0. 26809854947260342017401058001269120723
0. 107239419789041376396276916693750536069
0. 017873236631506896066046152782291756012
分母:
1
-0. 601911359595086126184071417810628190637
0. 91297327293322760866089993214700371027
-0. 29893061705891571522286653816991019994
0. 15006322092249121946672119065624428913
-0. 020805354461331432985859990481003478635
0. 00249798167605583222236620422052055801
```

输出幅频特性曲线如下：



同样根据传递函数系数可以写出这个数字滤波器的传递函数 $H(z)$:

$$H(z) = \frac{0.01787z^6 + 0.10723z^5 + 0.2681z^4 + 0.35746z^3 + 0.2681z^2 + 0.10724z + 0.01787}{z^6 - 0.60191z^5 + 0.91297z^4 - 0.29893z^3 + 0.15006z^2 - 0.02081z + 0.0025}$$

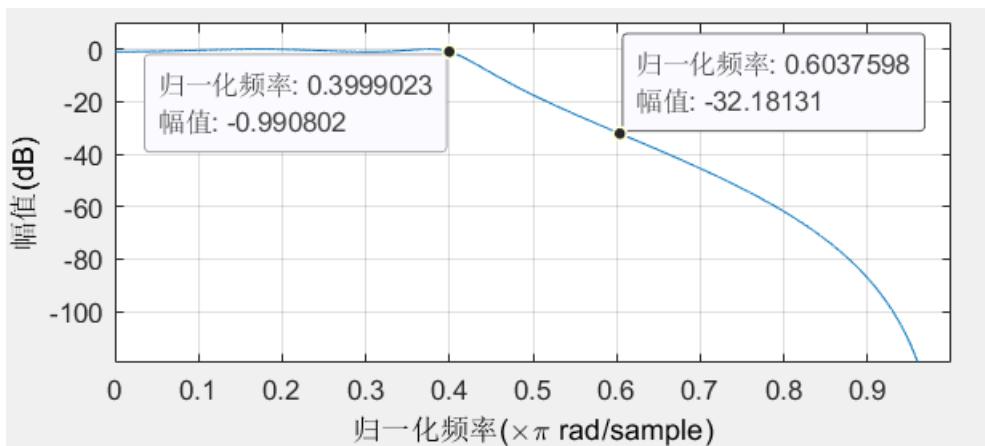
从传递函数可以看出该滤波器阶数为 6。根据幅频特性曲线中标出的两点的值可知, 该滤波器在归一化频率为 0.4π 时, 衰减为 $0.6371\text{dB} < 1\text{dB}$, 归一化频率为 0.6π 时, 衰减为 $25.37\text{dB} > 25\text{dB}$, 所以满足设计要求。

②、使用 chebyshev I 型设计

显示传递函数系数如下:

```
分子:
0.024261153677332072953198860432166839018
0.097044614709328291812795441728667356074
0.145566922063992437719193162593001034111
0.097044614709328291812795441728667356074
0.024261153677332072953198860432166839018
分母:
1
-1.597715993699598824306917776993941515684
1.745928235382817828025281414738856256008
-1.020044602443515913137161987833678722382
0.307375755138257433785042849194724112749
```

输出幅频特性曲线如下:



根据传递函数系数可以写出这个数字滤波器的传递函数 $H(z)$:

$$H(z) = \frac{0.02426z^4 + 0.09704z^3 + 0.14557z^2 + 0.09704z + 0.02426}{z^4 - 1.59772z^3 + 1.74593z^2 - 1.02004z + 0.30738}$$

从传递函数可以看出该滤波器阶数为 4。根据幅频特性曲线中标出的两点的值可知, 该滤波器在归一化频率为 0.4π 时, 衰减为 $0.991\text{dB} < 1\text{dB}$, 归一化频率为 0.6π 时, 衰减为 $32.181\text{dB} > 25\text{dB}$, 所以满足设计要求, 并且有一定裕量。

观察 butterworth 模型和 chebyshev I 型设计的滤波器，首先最直观的差别在于幅频特性曲线和阶数：butterworth 模型设计的低通滤波器幅频大小是单调递减的，而 chebyshev I 型设计的低通滤波器在通带上是有振荡的；并且前者的滤波器阶数为 6，后者为 4.这是因为 chebyshev I 型设计将精确度要求均匀地分布在整個通带内，这样使得其可以用较少地阶数就达到实验设计的要求。实验结果和理论分析一致。

3、设计 Butterworth 带通数字滤波器，其上下边带 $1dB$ 处的通带临界频率分别为 $20kHz$ 和 $30kHz$ ($f_{p1} = 20kHz$, $f_{p2} = 30kHz$, $\alpha_p = 1dB$)，当频率低于 $15kHz$ 时，衰减要大于 $40dB$ ($f_s = 15kHz$, $\alpha_s = 40dB$)，采样周期为 $10\mu s$ ，求这个数字滤波器的传递函数 $H(z)$ ，输出它的幅频特性曲线，观察其通带衰减和阻带衰减是否满足要求。

采样周期为 $10\mu s$ ，则采样频率为 $100000Hz$

滤波器设计参数配置如下：

响应类型 <input type="radio"/> 低通 <input type="radio"/> 高通 <input checked="" type="radio"/> 带通 <input type="radio"/> 带阻 <input type="radio"/> 微分器	滤波器阶数 <input type="radio"/> 指定阶: 10 <input checked="" type="radio"/> 最小阶	频率设定 单位: 归一化(0 到 1) Fs: 48000 wstop1: 0.3 wpass1: 0.4 wpass2: 0.6 wstop2: 0.7	幅值设定 单位: dB Astop1: 40 Apass: 1 Astop2: 40
设计方法 <input checked="" type="radio"/> IIR Butterworth <input type="radio"/> FIR 等波纹	选项 完全匹配: 阻带		

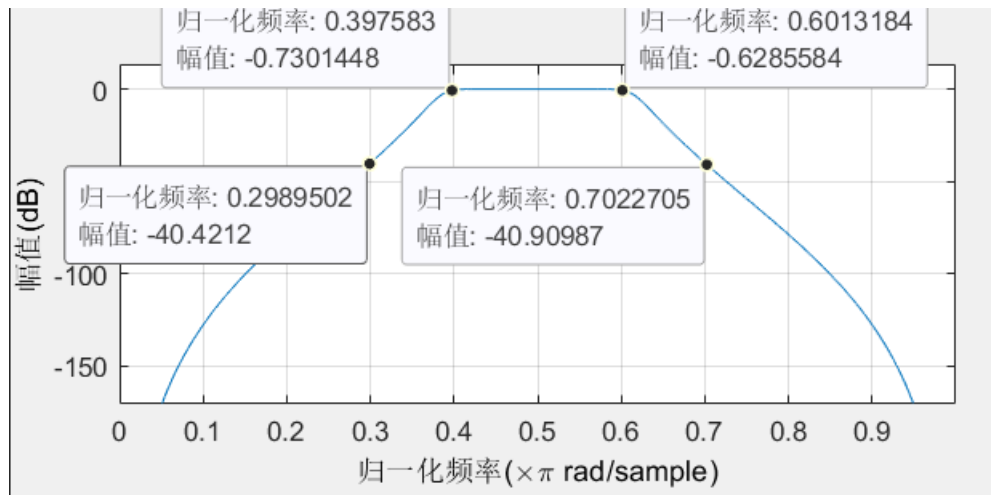
显示传递函数系数如下：

```

分子:
0.000202349531623926463894808103205491534
0
-0.001416446721367485301473765346713662439
0
0.004249340164102456338102165034342760919
0
-0.007082233606837426941049695727770085796
0
0.007082233606837426941049695727770085796
0
-0.004249340164102456338102165034342760919
0
0.001416446721367485301473765346713662439
0
-0.000202349531623926463894808103205491534
分母:
1
0.000000000000000239507569357957709949022
3.77377015555194272877703450759872794151
-0.000000000000000520565149011623926656947
6.561370382005545565107240690849721431732
-0.0000000000000002523981602563469925749453
6.651809497393630365991157304961234331131
-0.0000000000000003428167731414210138368588
4.20301654434387472747403080575168132782
-0.0000000000000002244132244263506080470665
1.643680776397138165734190806688275188208
-0.000000000000000766293646576803189830897
0.366625625691333945077587941341334953904
-0.000000000000000111167445768391499508116
0.03585138265018132652794946579888346605

```

输出幅频特性曲线如下：



根据传递函数系数可以写出这个数字滤波器的传递函数 $H(z)$ ：

$$H(z) = \frac{0.0002z^{14} - 0.0014z^{12} + 0.0043z^{10} - 0.0071z^8 + 0.0071z^6 - 0.0041z^4 + 0.0014z^2 - 0.0002}{z^{14} + 3.774z^{12} + 6.561z^{10} + 6.652z^8 + 4.203z^6 + 1.644z^4 + 0.367z^2 + 0.036}$$

从传递函数可以看出该滤波器阶数为 14。 根据幅频特性曲线中标出的两点的值可知，该滤波器在归一化频率为 0.4π 时，衰减为 $0.73\text{dB} < 1\text{dB}$ ， 0.6π 时，衰减为 $0.63\text{dB} < 1\text{dB}$ ；归一化频率为 0.3π 时，衰减为 $40.4\text{dB} > 40\text{dB}$ ，所以满足设计要求。

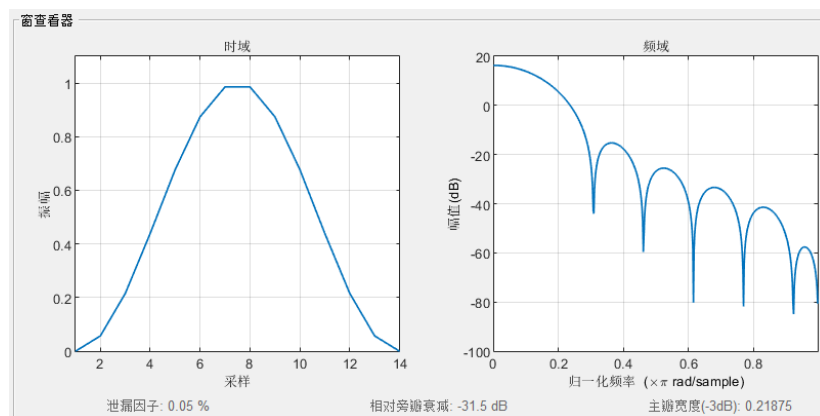
3.3.2 FIR 滤波器设计

1、用 Hanning 窗设计一个线性相位带通滤波器，其长度 $N=15$ ，上下边带截止频率分别为 $\omega_1 = 0.3\pi$ ， $\omega_2 = 0.5\pi$ ，求 $h(n)$ ，绘制它的幅频和相位特性曲线，观察它的实际 3dB 和 20dB 带宽。如果 $N=45$ ，重复这一设计，观察幅频和相位特性的变化，注意长度 N 变化对结果的影响。

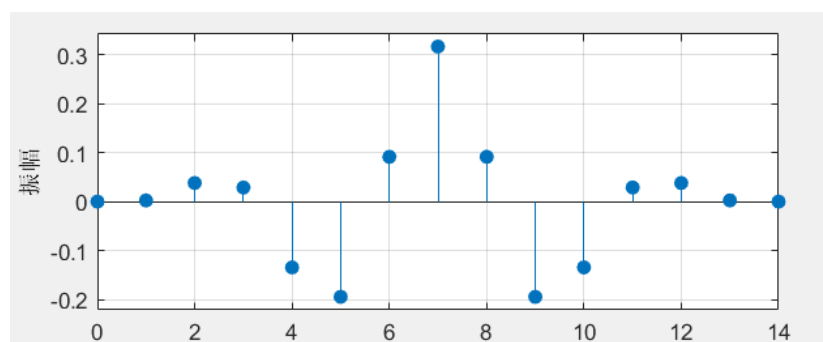
①、 $N=15$ 时，滤波器设计参数配置如下：

响应类型 <input type="radio"/> 低通 <input type="radio"/> 高通 <input checked="" type="radio"/> 带通 <input type="radio"/> 带阻 <input type="radio"/> 微分器	滤波器阶数 <input checked="" type="radio"/> 指定阶: 14 <input type="radio"/> 最小阶	频率设定 单位: 归一化(0 到 1) Fs: 48000 wc1: 0.3 wc2: 0.5	幅值设定 截止频率处的衰减固定为 6 dB (通带增益的一半)
设计方法 <input type="radio"/> IIR: Butterworth <input checked="" type="radio"/> FIR: 窗	选项 <input checked="" type="checkbox"/> 缩放通带 窗: Hann 视图		

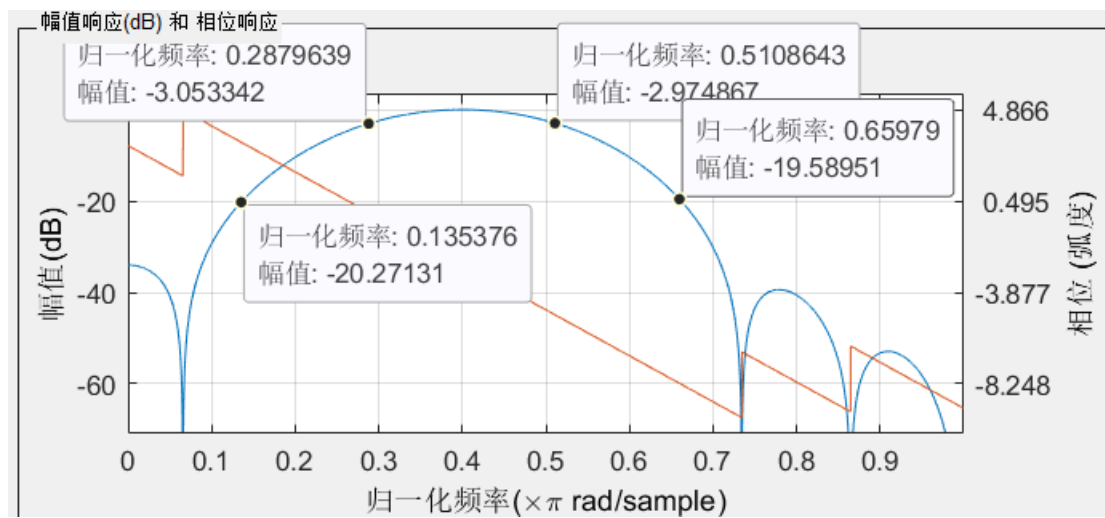
Hanning 窗相关信息：



得到 $h(n)$ 的波形如下：

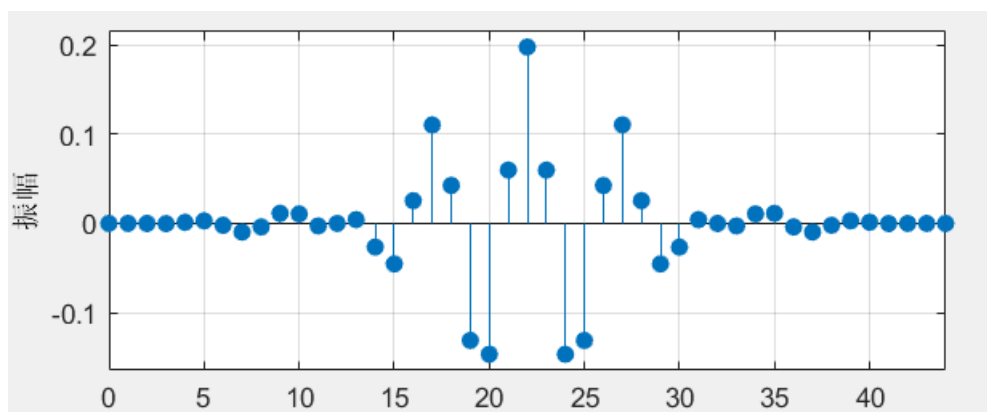


输出幅频特性曲线（蓝色）和相频特性曲线（红色）如下：

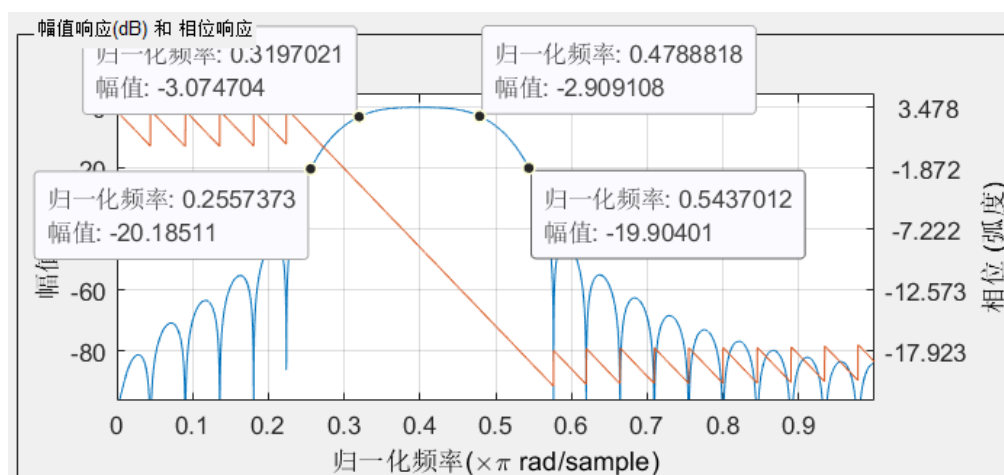


由上图可以计算得出 3dB 带宽为 $0.5109 - 0.2880 = 0.2229$ (π rad/s), 20dB 带宽为 $0.6598 - 0.1354 = 0.5244$ (π rad/s); $h(n)$ 如前图所绘序列。

②、 $N=45$ 时, 得到 $h(n)$ 的波形如下:



输出幅频特性曲线（蓝色）和相频特性曲线（红色）如下：

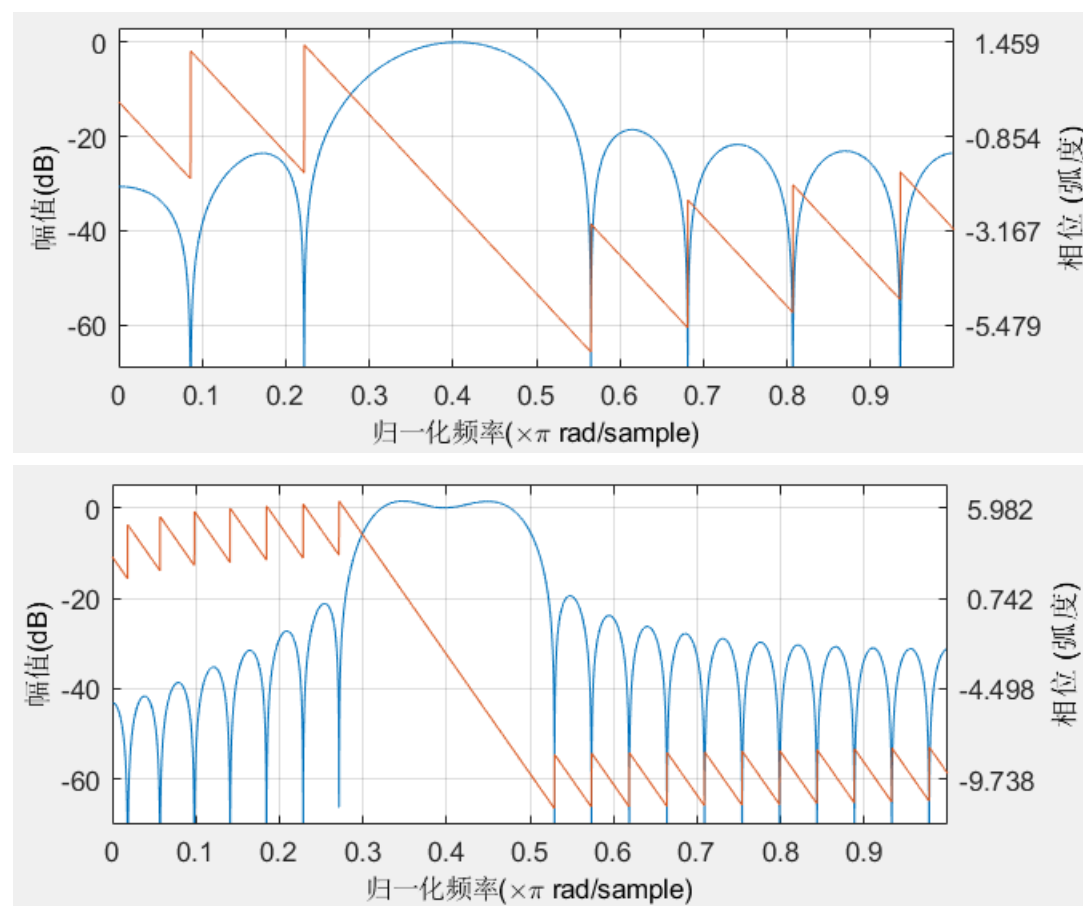


由上图可以计算得出 3dB 带宽为 $0.4789 - 0.3198 = 0.1591$ (π rad/s), 20dB 带宽为 $0.5437 - 0.2557 = 0.288$ (π rad/s); $h(n)$ 如前图所绘序列。

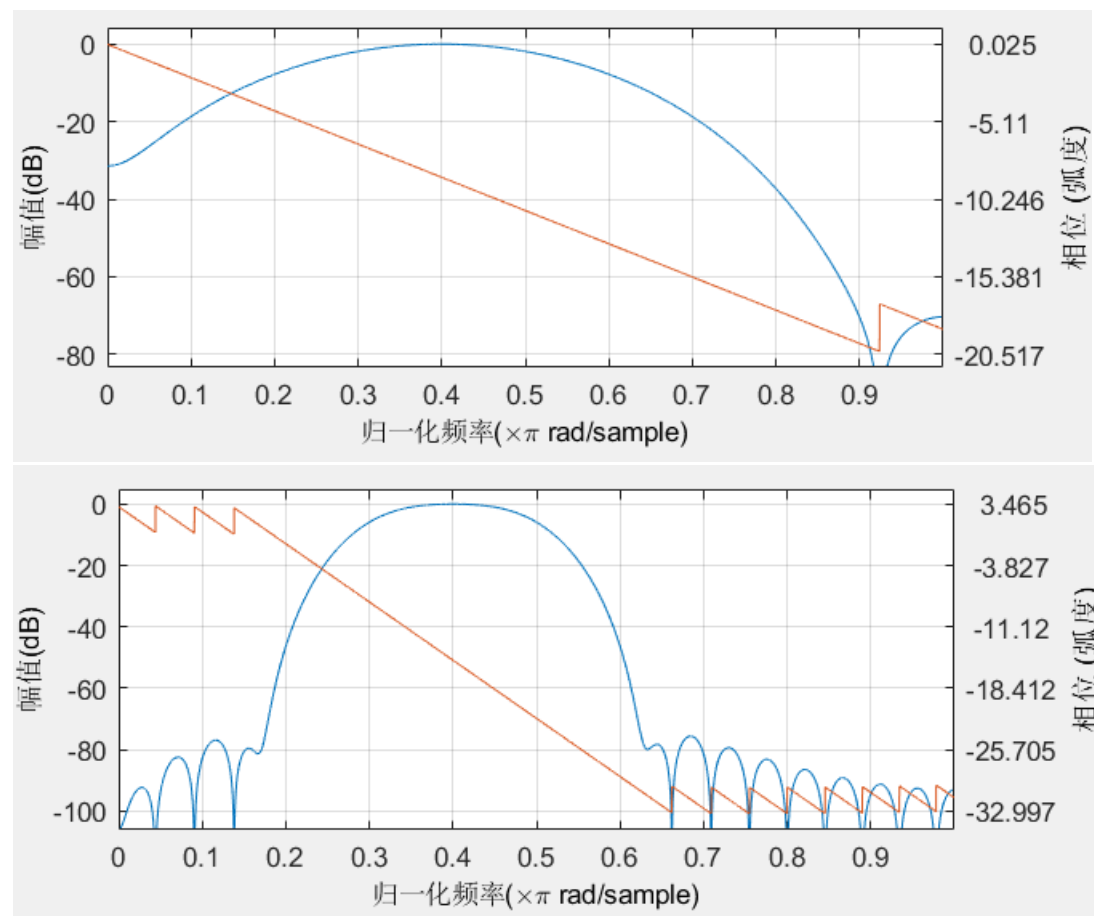
随着 N 的增加滤波器的过渡带衰减的更快, 过渡带宽逐渐变窄, 在通带范围内仍保持线性相位的特性, 实际幅频特性更接近于理想带通滤波器, 这是以牺牲滤波器的复杂程度(阶数)实现的。同时 N 增大带来阻带内出现更多的起伏振荡, 但不能改变阻带最小衰减值。

2、改用矩形窗和 Blackman 窗, 设计步骤(1)中的带通滤波器, 观察并记录窗函数对滤波器幅频和相位特性的影响, 比较这三种窗函数的特点。

①、选择矩形窗设计, $N=15$ 与 $N=45$ 时的滤波器幅频和相位特性如下:

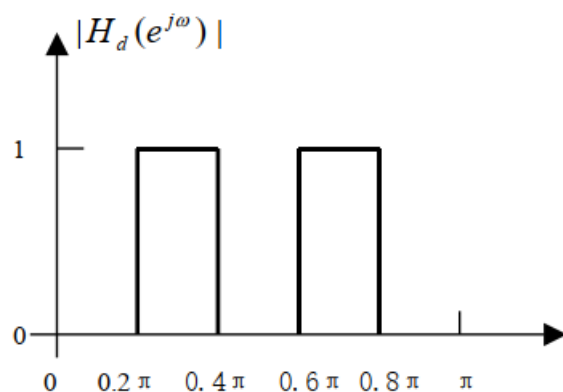


②、选择 Blackman 窗设计，N=15 与 N=45 时的滤波器幅频和相位特性如下：



Hanning 窗、矩形窗、blackman 窗，这三种窗函数设计的滤波器都是随着 N 阶数增大，滤波器过渡带衰减的越快，更接近于理想的带通滤波器。但在通带范围内三种滤波器都能保持线性相位的特性，且阻带衰减保持不变。在 N 相同的情况下，矩形窗滤波器的过渡带相对更窄，阻带的衰减也更小。而 blackman 窗的滤波器衰减最大，过渡带最宽。这与三种窗对应的过渡带宽 $\Delta\omega$ 分别为 $4\pi/N$ 、 $8\pi/N$ 、 $12\pi/N$ ，最小阻带衰减 -21dB、-44dB、-74dB 的理论参数一致。一般来说 N 越大，滤波器实现的功能就越精准。

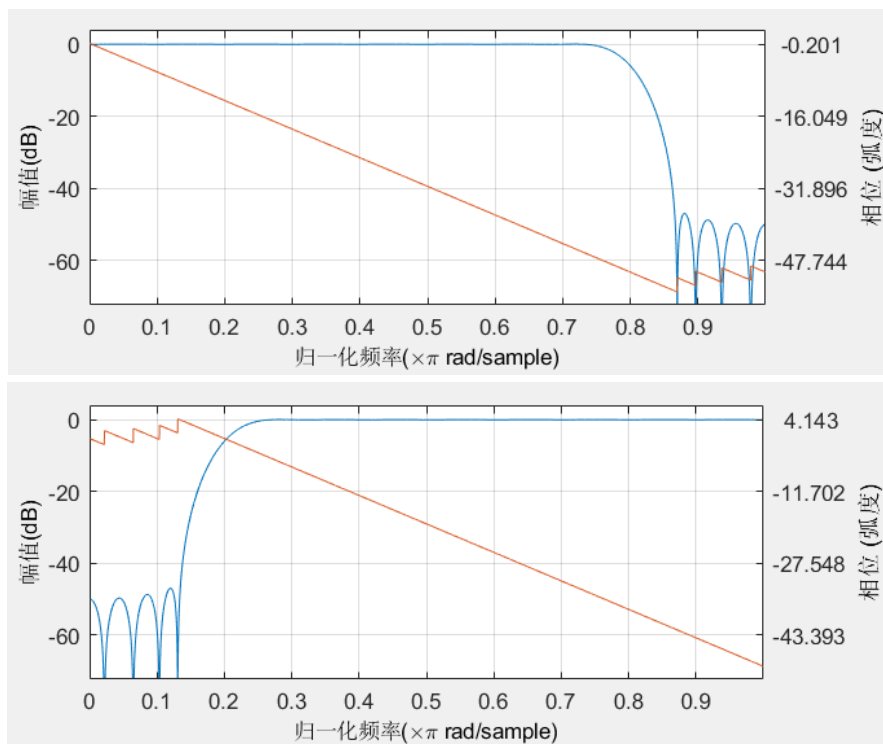
3、用 Kaiser 窗设计一个专用的线性相位滤波器。 N=40，理想的幅频特性如下图所示：

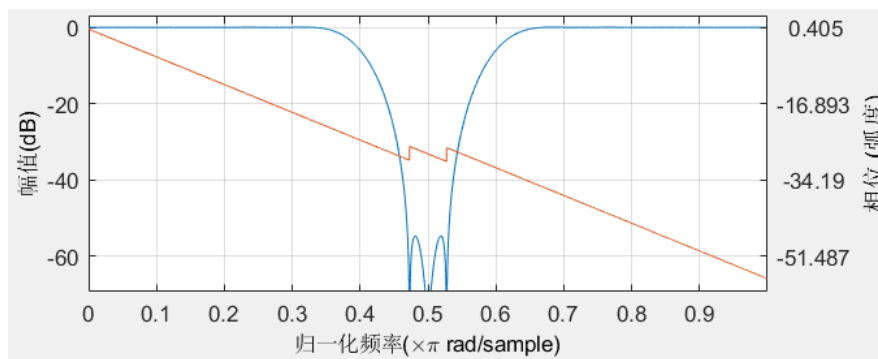


当 β 值分别 4,6,8 时，设计相应的滤波器，比较它们的幅频和相位特性，观察并分析 β 值不同的时候对结果有什么影响。

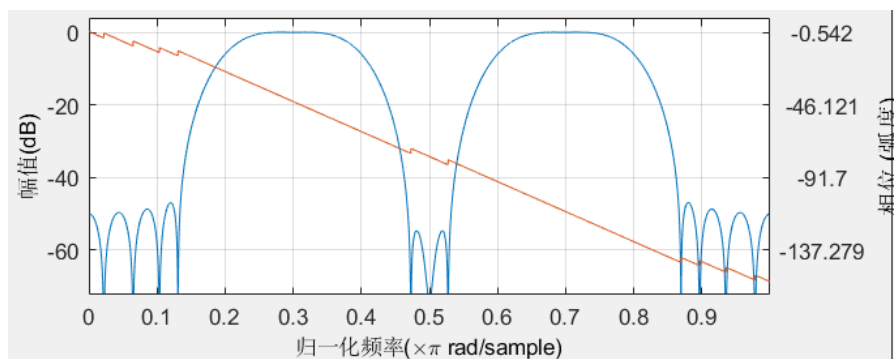
原本上图的多通带滤波器可以使用两个带通滤波器并联得到，但由于没有在 filterdesigner 里找到滤波器并联选项，所以使用一个低通滤波器、一个高通滤波器、一个带阻滤波器级联得到如上多通带滤波器。

高通滤波器、低通滤波器、带阻滤波器特性如下：

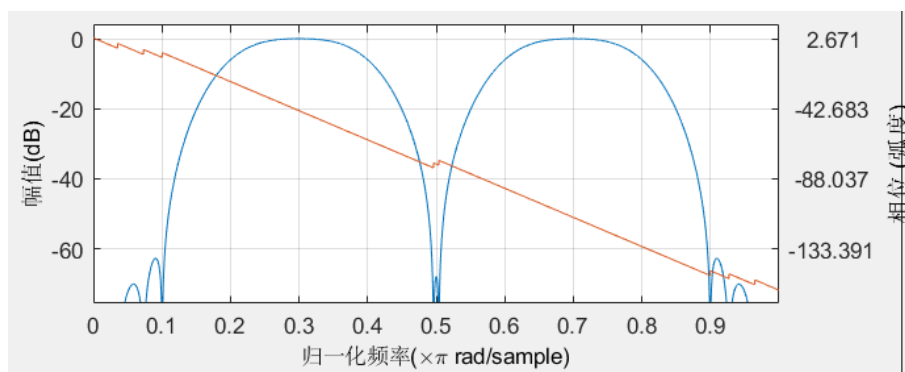




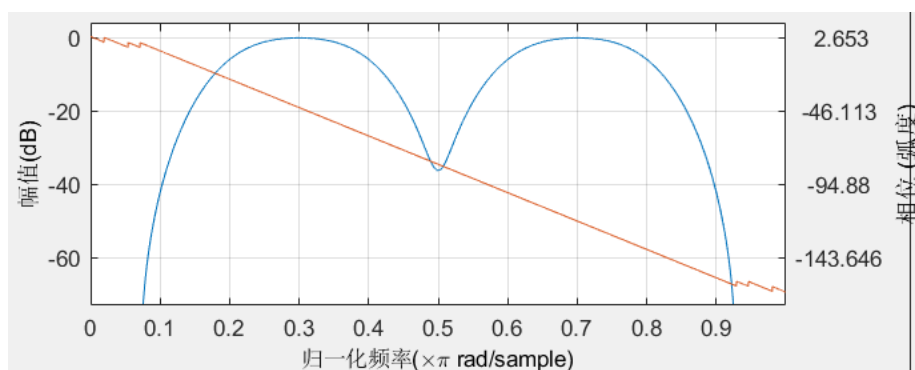
①、 $\beta=4$ 时，级联得到的滤波器幅频和相频特性：



②、 $\beta=6$ 时，级联得到的滤波器幅频和相频特性：



③、 $\beta=8$ 时，级联得到的滤波器幅频和相频特性：



使用 Kaiser 窗设计滤波器时， β 越大，过渡带带宽变大，阻带的衰减变大，

而在通带范围内都能保持线性相位特性。显然对比 $\beta=4, 6, 8$ 三种情况得到的滤波器， $\beta=4$ 时的滤波器最接近于理想状况。

3.3.3 滤波器特性分析

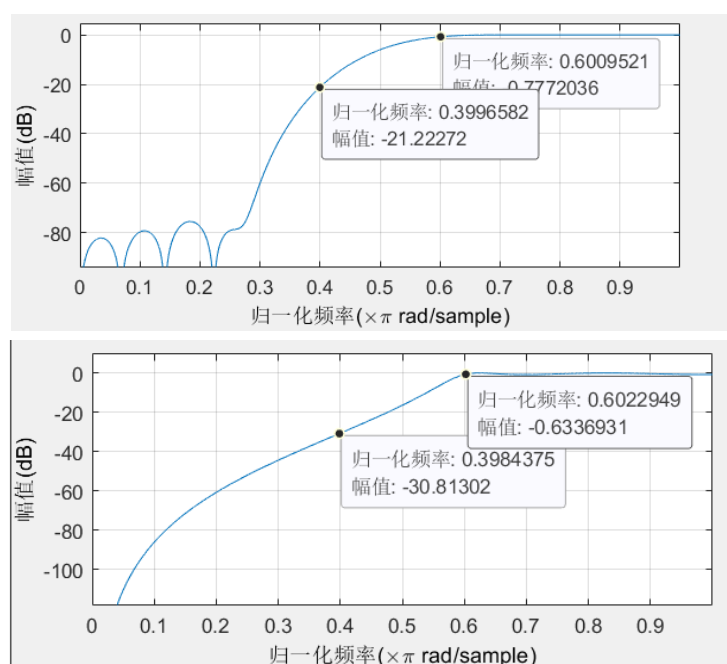
针对 IIR 滤波器设计实验内容中的三款滤波器（低通、高通和带通），采用基于 blackman 窗函数的 FIR 设计方法重新设计，比较用 IIR 与 FIR 方法得到的滤波器的幅频特性、相频特性、零极点、群延时、相位延时。

对比较的结论进行原理解释。

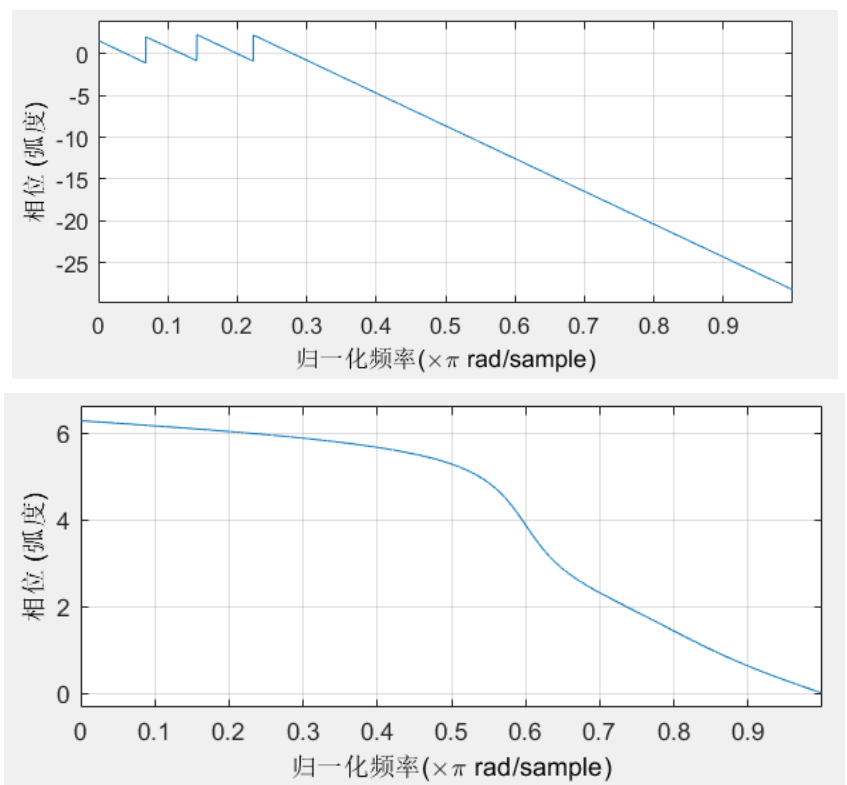
①、Blackman 设计高通滤波器

不断调节滤波器的阶数，观察幅频特性曲线，直到幅频特性满足设计要求。并且由于 filterdesigner 的截止频率处衰减定为 6dB，所以不能直接把 ω_c 定为 0.6。实验中 ω_c 设置为 0.5，阶数为 24，得到的滤波器满足设计的通带与阻带参数要求。FIR 与 IIR 滤波器特性如下（前者为 FIR，后者为 IIR）：

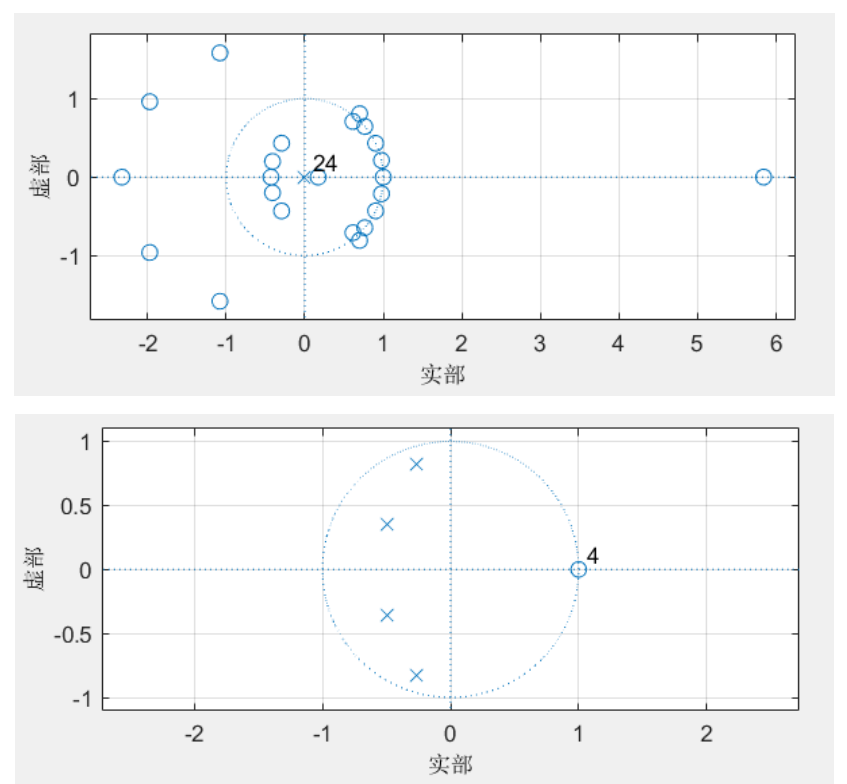
幅频特性：



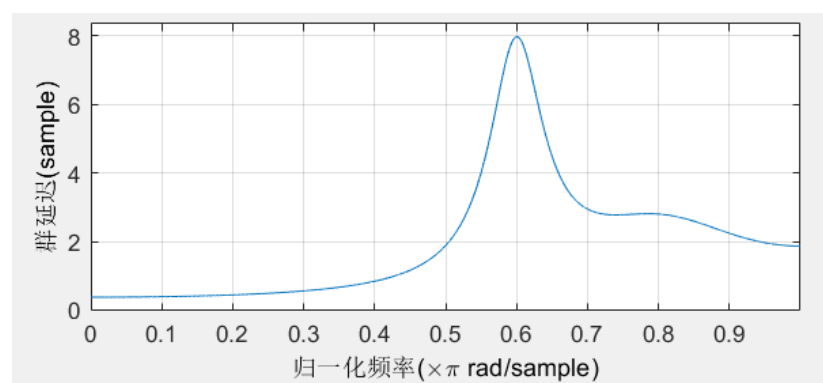
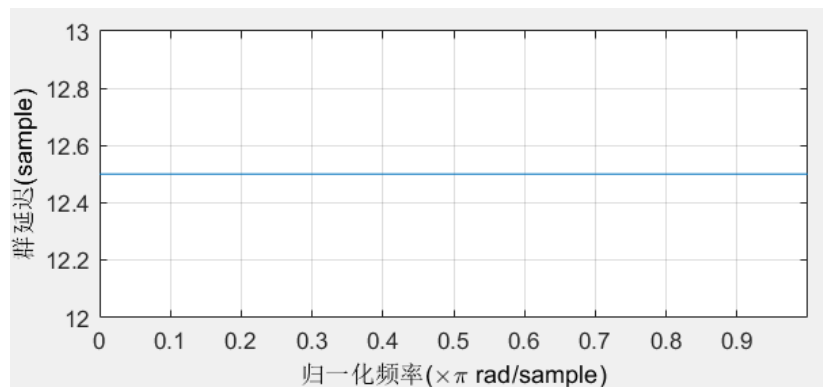
相频特性：



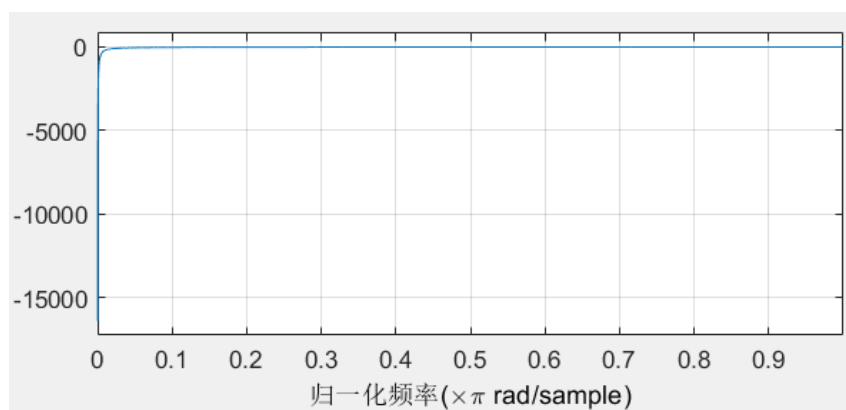
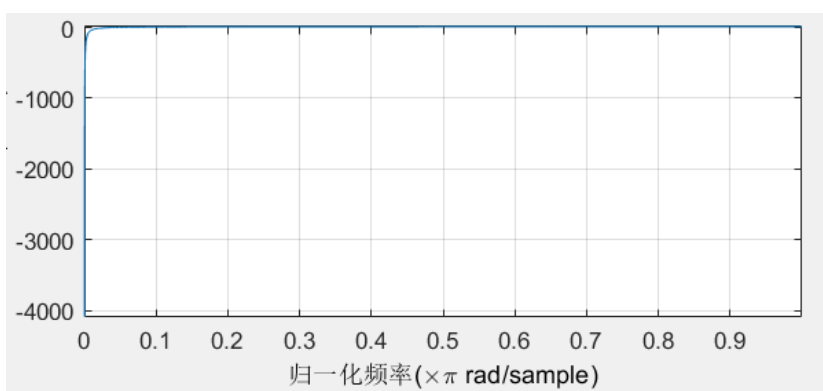
零极点分布：



群延时：



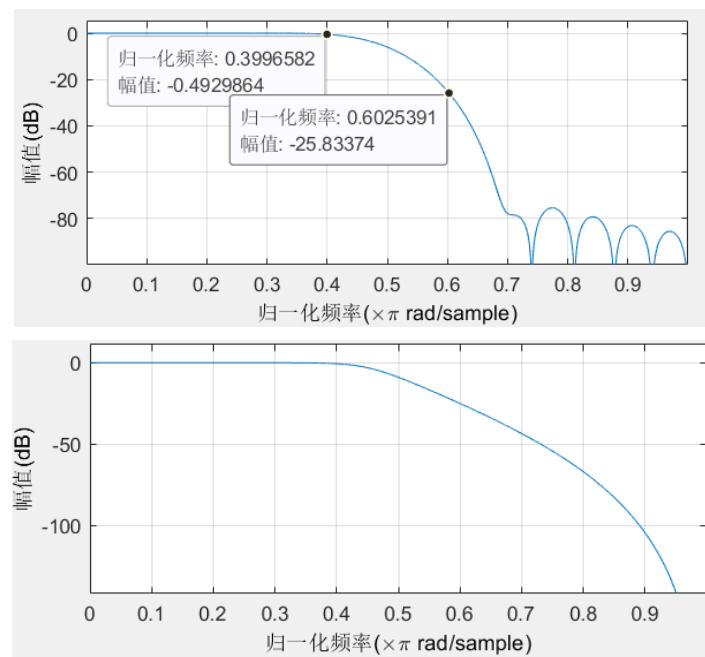
相位延时:



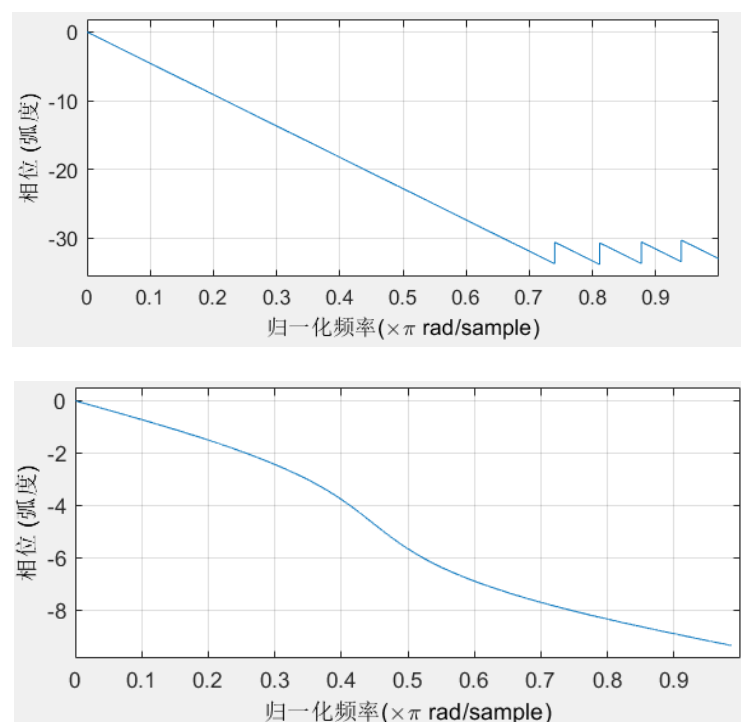
②、Blackman 设计低通滤波器

同样尝试阶数、直到满足设计要求。实验中选择阶数为 28, ω_c 为 0.5。得到的滤波器满足设计的通带与阻带参数要求。FIR 与 IIR 滤波器特性如下（前者为 FIR，后者为 IIR）：

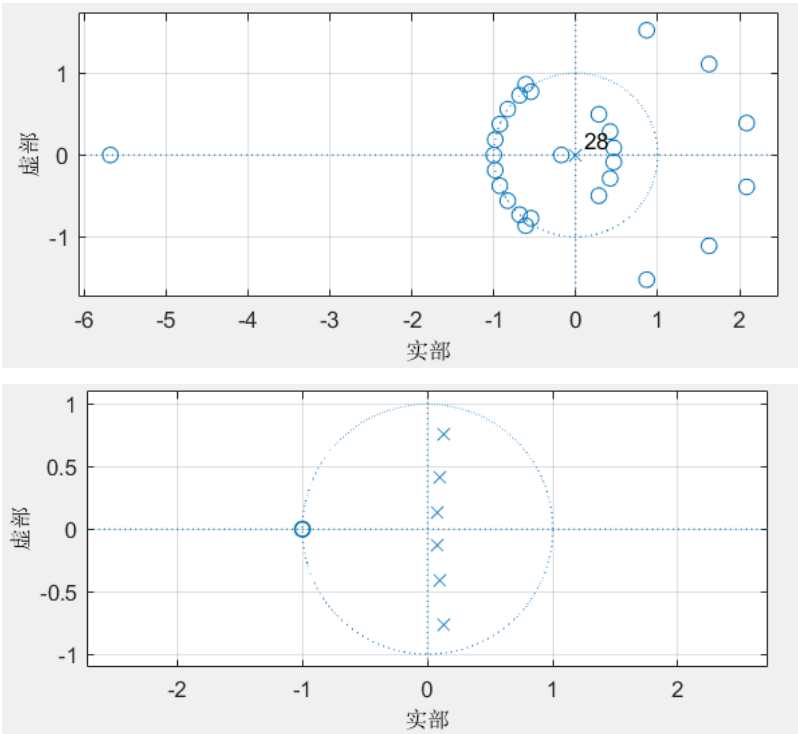
幅频特性：



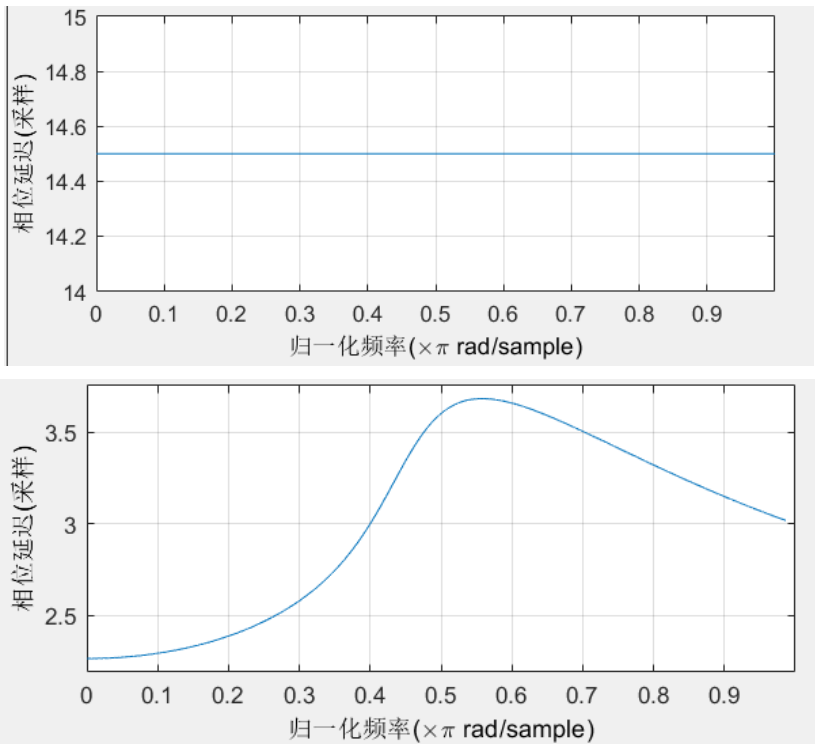
相频特性：



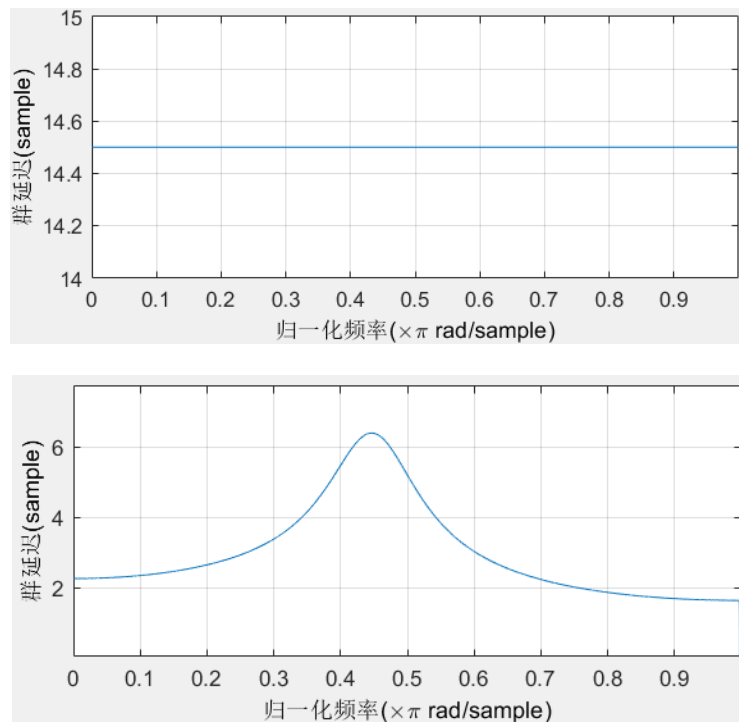
零极点：



相位延时：



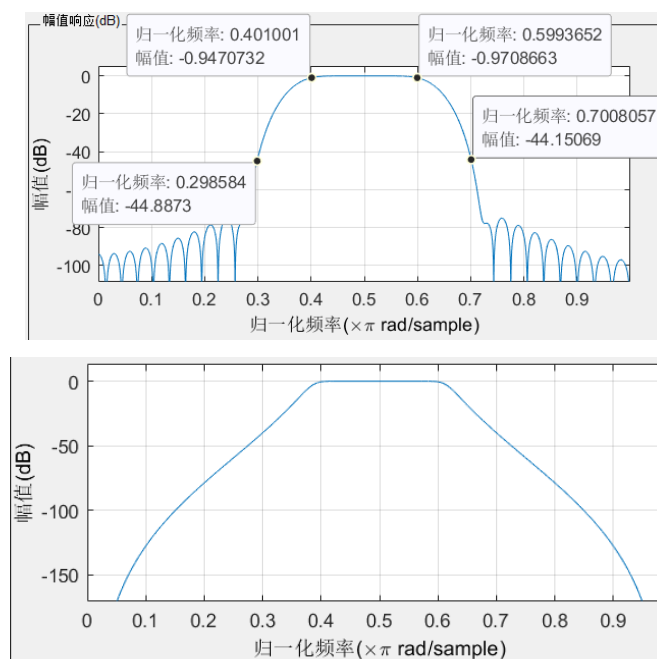
群延时:



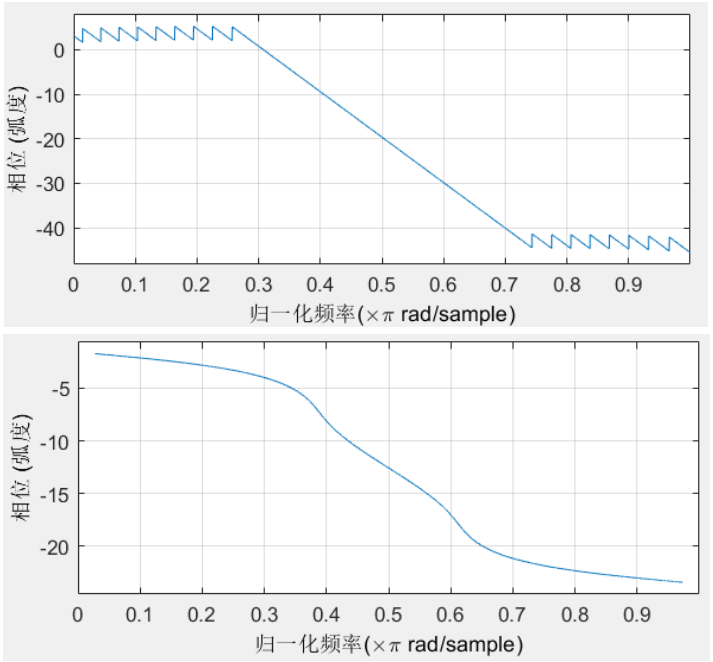
②、Blackman 设计带通滤波器

同样尝试阶数、直到满足设计要求。实验中选择阶数为 64, ω_{c1} 为 0.365, ω_{c2} = 0.635。得到的滤波器满足设计的通带与阻带参数要求。FIR 与 IIR 滤波器特性如下 (前者为 FIR, 后者为 IIR):

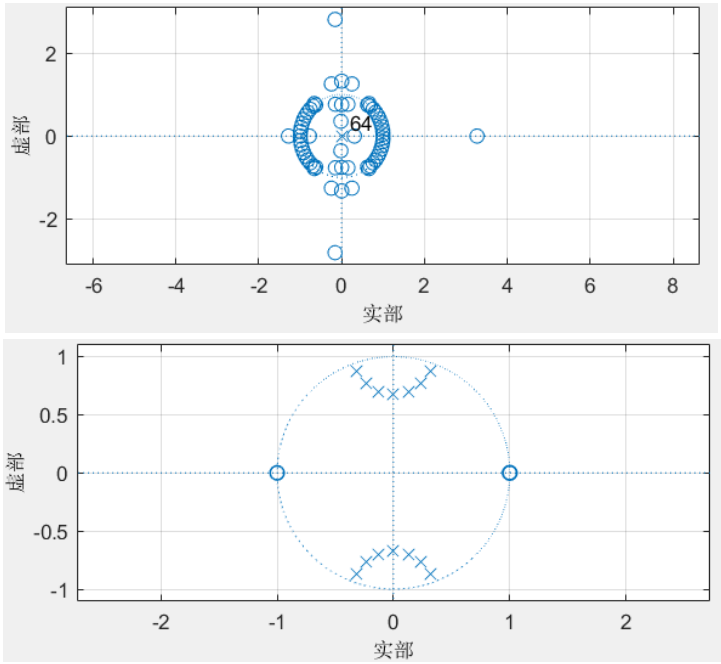
幅频特性:



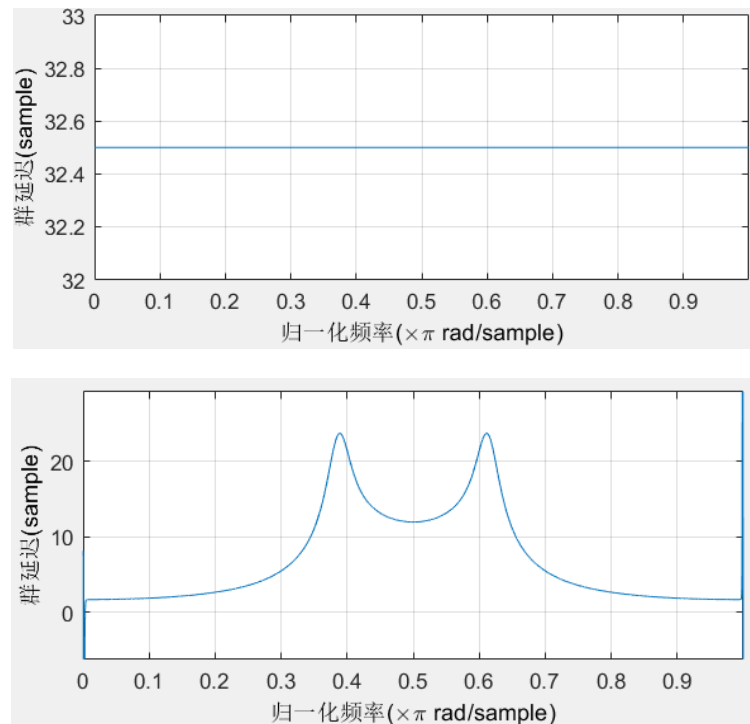
相频特性：



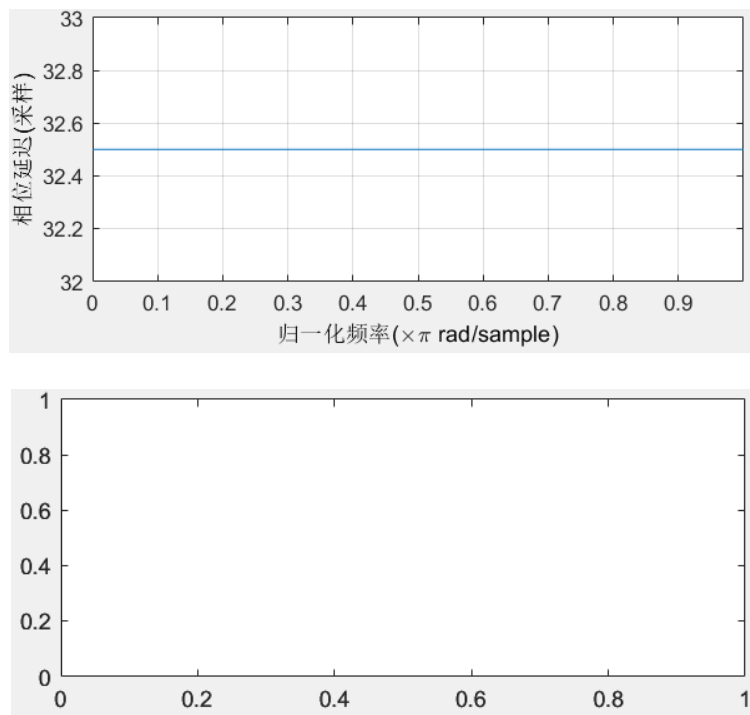
零极点：



群延时：



相位延时：



对比 FIR 滤波器与 IIR 滤波器，首先很直观的区别在于，实现相同要求的滤波器，IIR 所需要的阶数远小于 FIR 滤波器的阶数。从零极点图可以看到，FIR

滤波器只有零点而没有极点，或者说极点全部位于 $z=0$ 处，零点可以位于 z 平面任何位置，这和 FIR 滤波器理论相符。IIR 滤波器极点全部分布在单位圆内，这保证了滤波器的稳定性。IIR 滤波器单位圆上靠近极点的相位，即相近的频率，在幅频特性上表现为通带。这是因为靠近极点时 $H(z)$ 分母接近于 0，使幅频响应较大，表现为通带。相对应的，靠近零点，表现为阻带。

由于 IIR 滤波器用较小的阶数就能达到幅频响应要求，并且没有次峰的干扰，阻带衰减也很大，所以可以说 IIR 滤波器有着很好的幅频响应特性。相比而言，FIR 虽然阶数高，但同时有着线性相位的优点。这也使得 FIR 滤波器处理的信号，相位改变只取决于 ω 。此外，线性相位特性使得群延时为常数，阶数为奇数时，群延时是滤波器取样间隔的整数倍；阶数为偶数时，群延时为整数倍取样间隔加上 $1/2$ 取样间隔。

3.3.4 滤波器的实际运用

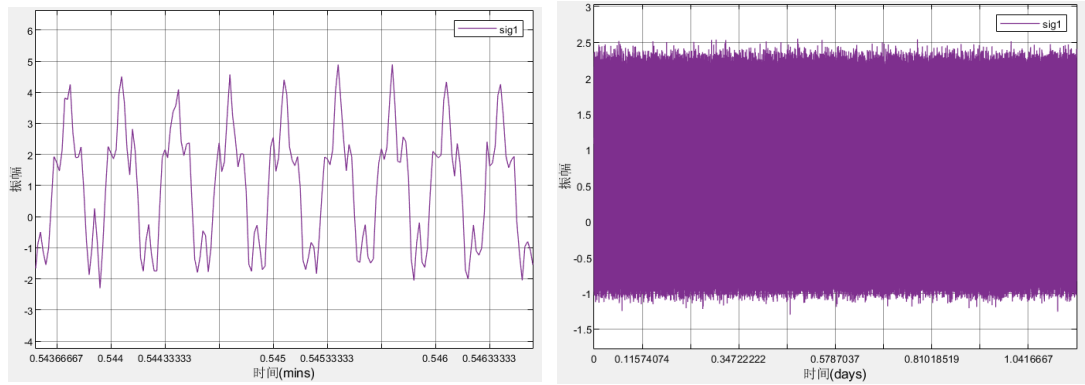
1) 用 Matlab 产生信号 $x(t)=0.5+1.2\sin(2\pi f_1 t)+0.5\cos(2\pi f_2 t)+\omega(t)$ ，其中 $f_1=50\text{Hz}$ ， $f_2=200\text{Hz}$ ， $\omega(t)$ 为高斯白噪声，采样频率 $f_s=1000\text{Hz}$ 。观察其频谱特性。

编写信号代码：

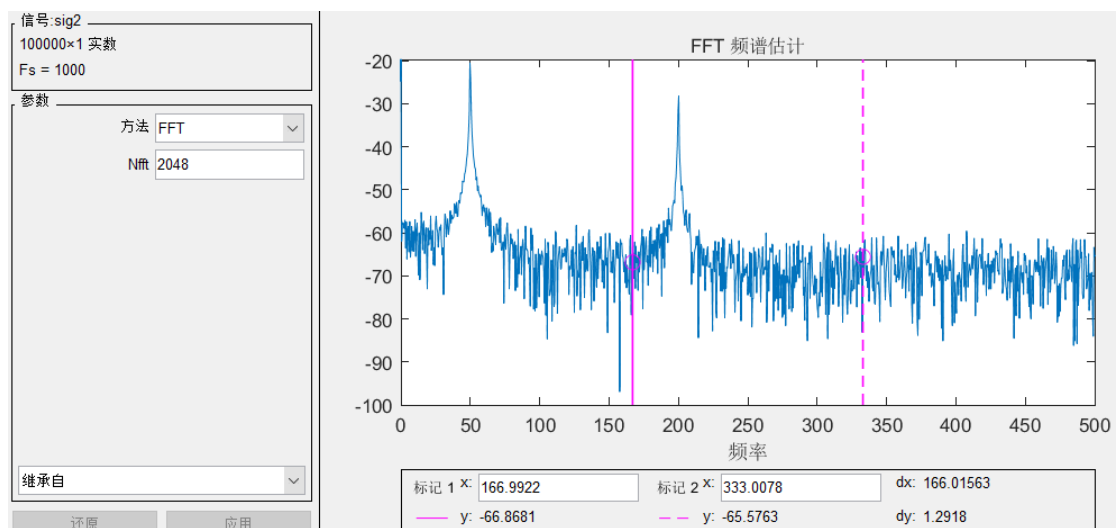
```
f1=50;
f2=200;
fs=1000;
n=1:100000;
x=0.5+1.2*sin(2*pi*f1*n/fs)+0.5*cos(2*pi*f2*n/fs);
x=x+awgn(x, 10, 'measured');
```

打开 sptool，导入 x；

时域如下（前者为缩放 x 轴的图像）：

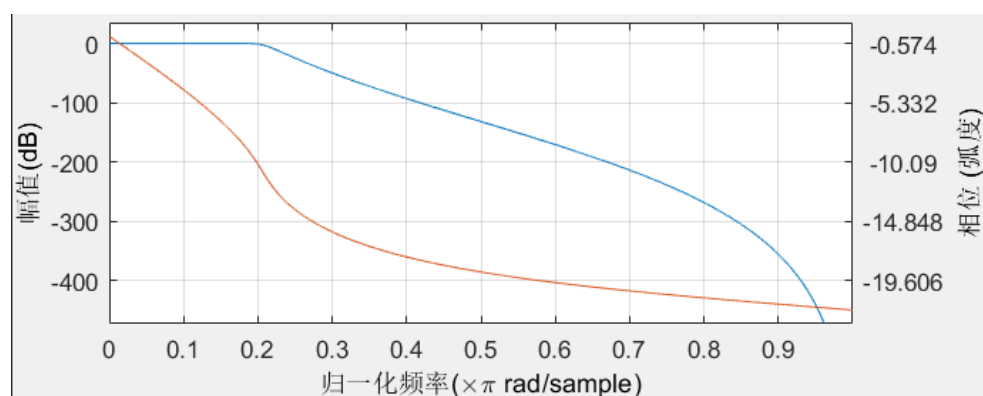


频谱:

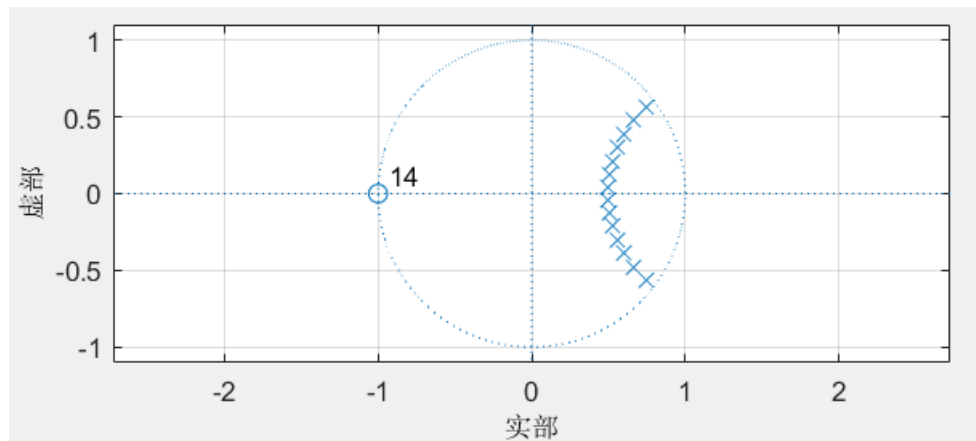


2) 设计一个 butterworth 低通滤波器，通带边界频率为 100Hz，阻带边界频率为 150Hz，通带波纹不大于 2dB，阻带衰减不小于 50dB，观察所设计滤波器的幅频特性、相频特性、零极点、群延时和脉冲响应。

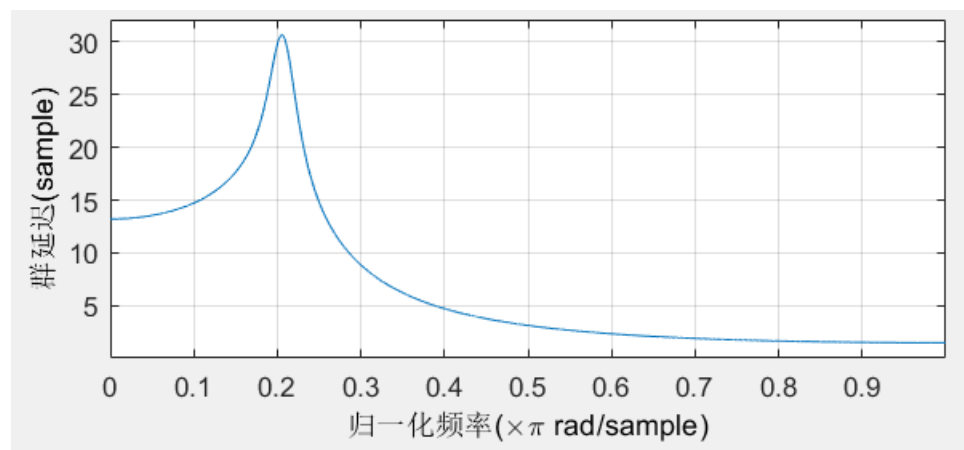
使用 filterdesigner 设计，幅频特性曲线（蓝色）和相频特性（红色）曲线如下：



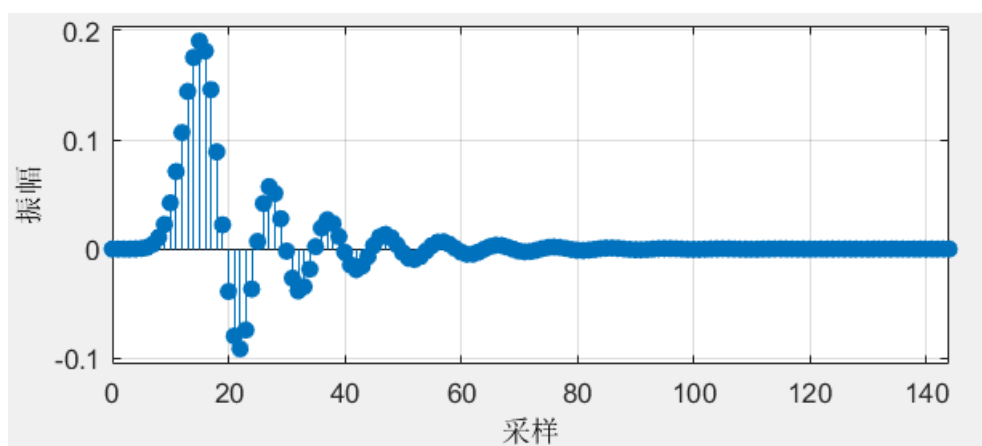
零极点：



群延时：



脉冲响应：

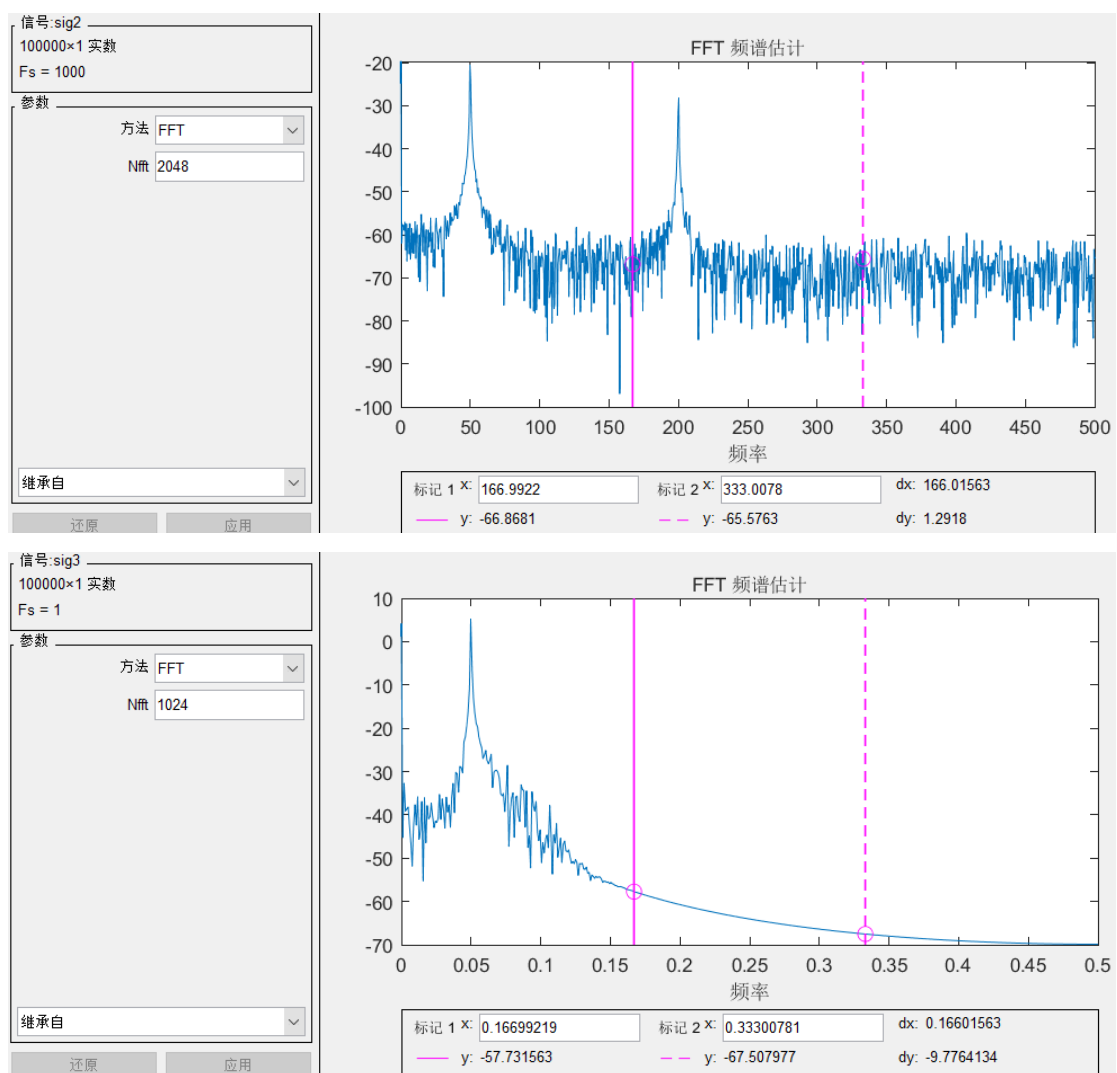


3) 用 (2) 中设计的滤波器对 (1) 中的信号进行滤波处理，并分析滤波前后信号的频谱变化。

使用应用滤波器工具：



滤波前后信号的频谱:



滤波器阻带截止位于归一化频率 0.3π 处，分析滤波前后频谱可见，该低通滤波器将归一化频率大于 0.3π 的高频成分基本滤除掉了。原信号为：

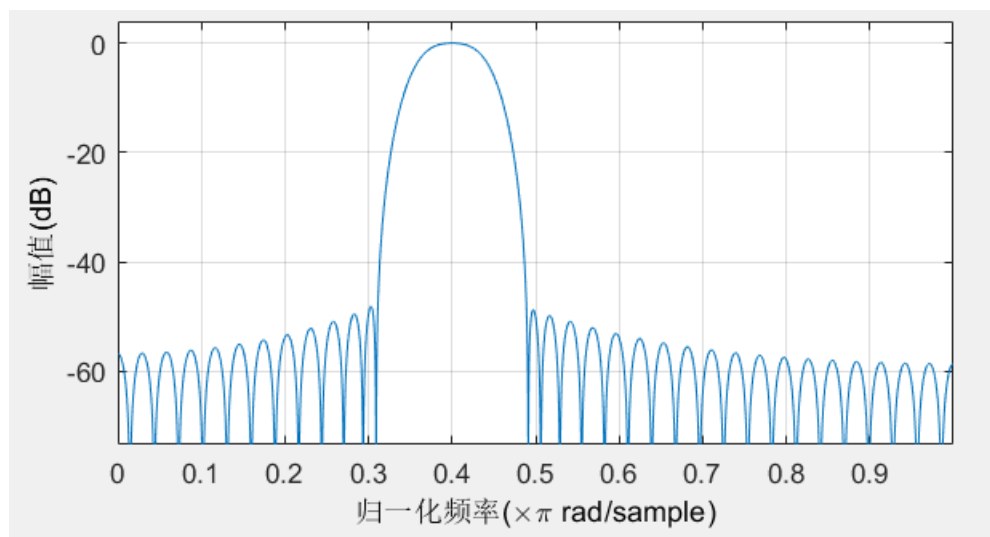
$$x(t) = 0.5 + 1.2\sin(2\pi f_1 t) + 0.5\cos(2\pi f_2 t) + \omega(t)$$

所以滤除的是 $f_2 = 200\text{Hz}$ 的这部分分量，已经一些高频噪声。留下的 0.5 直流分量和 $f_1 = 50\text{Hz}$ 的这部分分量。

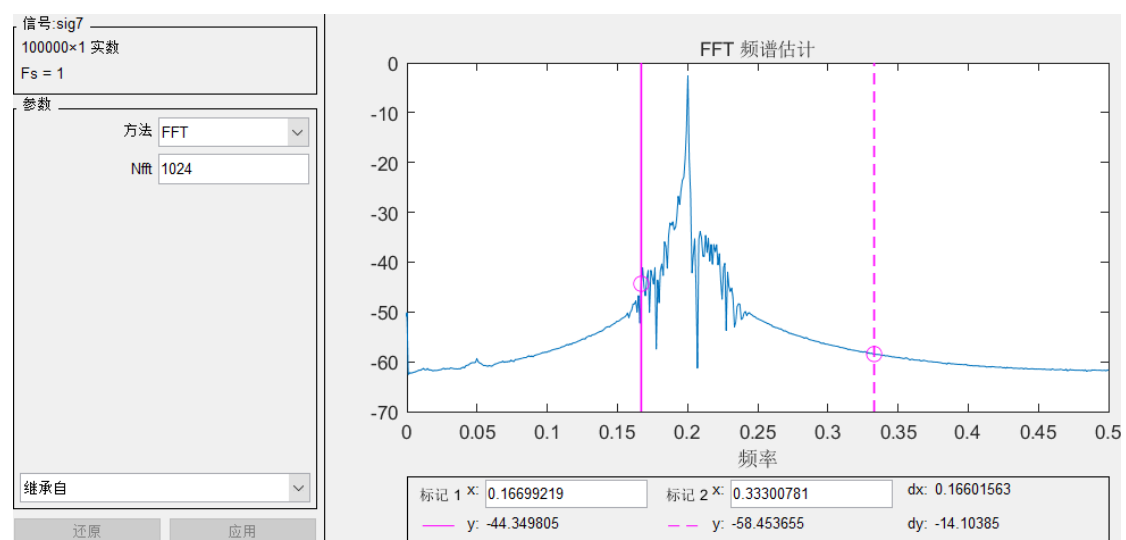
4) 用 Kaiser 窗设计一个能滤除 (1) 中信号 $x(t)$ 的直流分量和 f_1 频率分量的滤波器，观察滤波前后的频谱变化。

要滤除直流分量与 50Hz 分量，所以可以选择设计一个高通滤波器，鉴于存在高频白噪声，所以这里选择设计一个 200Hz 中心频率的带通滤波器。

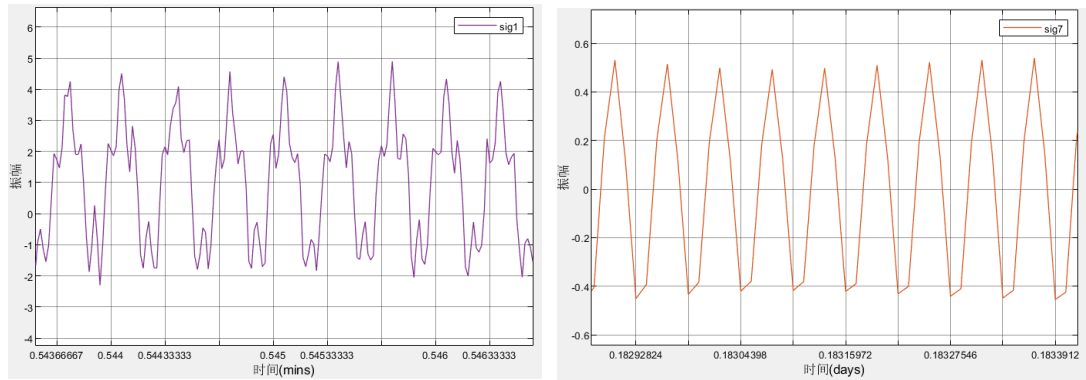
滤波器频谱：



滤波之后信号频谱：



滤波前后的时域特性：



观察滤波之后信号频谱，可以看到低频包括直流成分已经基本滤除，留下了 200Hz 成分。观察滤波前后的时域特性，可以明显看到 0.5 的直流分量被滤除了。

实验总结：

通过本次实验，学会了使用 Matlab 对信号进行处理，包括产生一个信号；输出一个信号的时域、频域特性；在信号上叠加一个高斯白噪声信号。熟悉了使用 filterdesigner 设计 IIR 与 FIR 滤波器，包括 butterworth 模型、chebyshev 模型设计；hanning 窗、kaiser 窗、矩形窗设计滤波器。进一步了解了低通、带通、高通滤波器特性，以及使用多个滤波器级联产生多通带滤波器。

Matlab 对滤波器特性显示非常方便，参数修改也很方便。这样可以在设计过程中不断地调整参数，来实现所要求的滤波器功能。并且，对于滤波器的零极点、冲激响应、系统函数系数的获得都很简单，这也提高了设计效率和对滤波器特性的分析效率。

巩固了 FIR、IIR 设计滤波器各自的优缺点，根据滤波器要求，选择合适的设计方法，进一步可以选择合适的窗函数、阶数等等。