
第六章 同态信号处理

6.6 实序列的复倒谱及其性质 (Cepstrum)

● 问题的提出:

- 实际应用中序列 $x(n)$ 一般都是实序列, 因此有必要研究实序列的复倒谱的计算方法以及与 $x(n)$ 的某些参数的关系。
- 研究方法:

$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n))]\} = Z^{-1}\{\ln[X(z)]\}$$

Diagram illustrating the components of the Z-transform equation:

$$X(z) = Az^r \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)},$$

Labels and their corresponding components:

- 时移 (Time Shift): Az^r
- 单位圆内零点 (Zeros inside the unit circle): $\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1})$
- 单位圆外零点 (Zeros outside the unit circle): $\prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)$
- 单位圆外极点 (Poles outside the unit circle): $\prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)$
- 单位圆内极点 (Poles inside the unit circle): $\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1})$
- 放大倍数 (Gain): A

其中: $|a_k|$ 、 $|b_k|$ 、 $|c_k|$ 和 $|d_k|$ 都小于1

● 求解过程:

$$X(z) = Az^r \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)}, \quad x'(n) = Z^{-1}\{\ln[X(z)]\}$$

其中: $|a_k|$ 、 $|b_k|$ 、 $|c_k|$ 和 $|d_k|$ 都小于1

$$\begin{aligned} \ln[X(z)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x'(n) z^{-n} \\ &= \ln(A) + r \ln(z) + \sum_{k=1}^{m_i} \ln(1 - a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{m_o} \ln(1 - b_k z) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{p_i} \ln(1 - c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{p_o} \ln(1 - d_k z) \end{aligned}$$

- 忽略 z^r 项作用

$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n))]\}$$

$$X(z) = Az^r \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)},$$

其中： $|a_k|$ 、 $|b_k|$ 、 $|c_k|$ 和 $|d_k|$ 都小于1

$$X(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)},$$

其中： $|a_k|$ 、 $|b_k|$ 、 $|c_k|$ 和 $|d_k|$ 都小于1;

同时假定 $A > 0$ 。

$$Z^{-1}\{\ln(A)\} = \ln(A)\delta(n)$$

$$\ln[X(z)] = \ln(A) + \sum_{k=1}^{m_i} \ln(1 - a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{m_o} \ln(1 - b_k z) \\ - \sum_{k=1}^{p_i} \ln(1 - c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{p_o} \ln(1 - d_k z)$$

$$\ln(1 - x) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1 - a_k z^{-1}) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (a_k z^{-1})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{a_k^n}{n}\right) z^{-n}$$

$$\ln(1 - b_k z) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (b_k z)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{b_k^n}{n}\right) z^n$$

$$\ln(1 - c_k z^{-1}) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (c_k z^{-1})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{c_k^n}{n}\right) z^{-n}$$

$$\ln(1 - d_k z) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (d_k z)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{d_k^n}{n}\right) z^n$$

$$X(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)},$$

其中： $|a_k|$ 、 $|b_k|$ 、 $|c_k|$ 和 $|d_k|$ 都小于1；
同时假定 $A > 0$ 。

● 结果：

$$x'(n) = \begin{cases} \ln(A), & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^n}{n}, & n > 0 \\ \sum_{k=1}^{m_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{p_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)},$$

其中： $|a_k|$ 、 $|b_k|$ 、 $|c_k|$ 和 $|d_k|$ 都小于1；
同时假定 $A > 0$ 。

$$x'(n) = \begin{cases} \ln(A), & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^n}{n}, & n > 0 \\ \sum_{k=1}^{m_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{p_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, & n < 0 \end{cases}$$

- 性质1：若 $x(n)$ 为实序列， $x'(n)$ 也为是实序列

根据实序列的Z变换的性质，零、极点若是复数总是共轭出现。

- 性质2：若 $x(n)$ 为最小相位序列，则 $x'(n)$ 为因果序列。
- 性质3：若 $x(n)$ 为最大相位序列，则 $x'(n)$ 为非因果序列。

$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n))]\}$$

$$x'(n) = \begin{cases} \ln(A), & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^n}{n}, & n > 0 \\ \sum_{k=1}^{m_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{p_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, & n < 0 \end{cases}$$

- 性质4：即使 $x(n)$ 为有限长的时间序列， $x'(n)$ 也总是无限长的时间序列。
- 性质5：复倒谱的衰减速度很快，至少是以 $1/|n|$ 的速度衰减。
- 性质6：间隔为 N_p 的冲激序列的复倒谱仍然是一个间隔为 N_p 冲激序列。

$$x(n) = \sum_{k=-(M-1)}^{(M-1)} \alpha_k \delta(n - kN_p)$$

$$\ln(1-x) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$X(z) = \sum_{k=-(M-1)}^{(M-1)} \alpha_k z^{-kN_p} = \prod_k (1 - u_k z^{-N_p}) \prod_k (1 - v_k z^{N_p}), |u_k| < 1, |v_k| < 1$$

$$X'(z) = \ln X(z) = \sum_k \ln(1 - u_k z^{-N_p}) + \sum_k \ln(1 - v_k z^{N_p})$$

$$X'(z) = \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(u_k)^n}{n} z^{-nN_p} \right] + \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(v_k)^n}{n} z^{nN_p} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{-nN_p} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^{nN_p}$$

$$x'(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_n \delta(n - rN_p) + \sum_{r=-\infty}^{-1} \gamma_n \delta(n - rN_p)$$

间隔为 N_p 的冲激序列的复倒谱仍然是一个间隔为 N_p 的冲激序列。

同态信号处理的应用:

- 利用卷积同态系统处理:

$$x(n) = s(n) + \alpha s(n - n_0) = s(n) * h(n)$$

$$X(z) = S(z) \times H(z) = S(z) [1 + \alpha z^{-n_0}]$$

$$X'(z) = \ln[X(z)] = \ln[S(z)] + \ln[1 + \alpha z^{-n_0}]$$

$$x'(n) = s'(n) + h'(n)$$

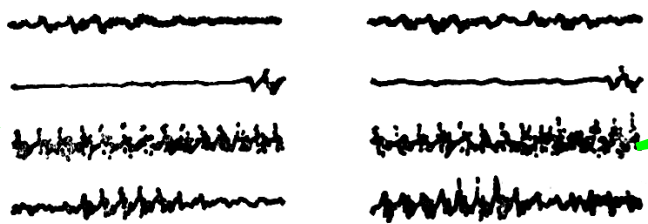
$$h'(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha^k}{k} \delta(n - kn_0), & n > 0 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

运算*的特征系统

$$y'(n) = L[x'(n)] = x'(n) \times [1 - \sum_{k=1}^{\infty} \delta(n - kn_0)]$$

原始信号

混响信号

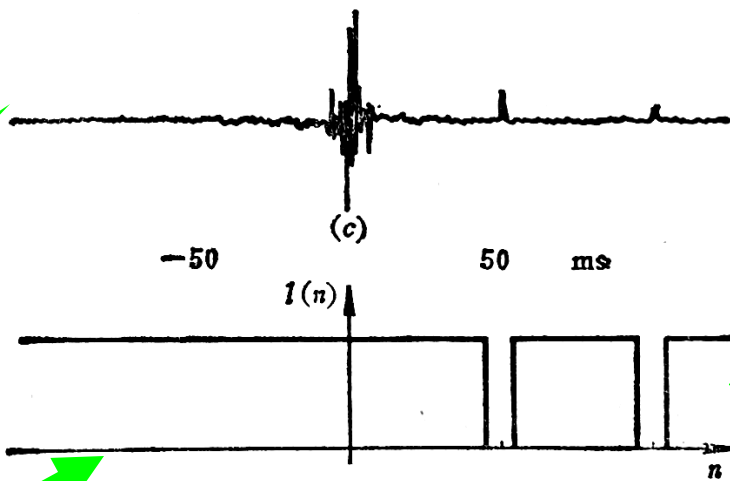


(a)

(b)

复倒谱

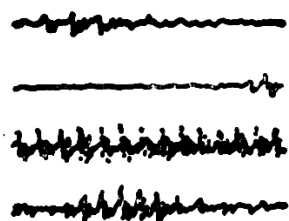
滤波器



(d)

$$[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \delta(n - kn_0)]$$

恢复结果



(e)

6.7 实序列的复倒谱计算方法

● 问题的提出:

- 怎样快速准确地计算复倒谱 $x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n))]\}$?

$$x'(n) = \begin{cases} \ln(A), & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^n}{n}, & n > 0 \\ \sum_{k=1}^{m_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{p_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, & n < 0 \end{cases}$$

● 研究两种情况下复倒谱的计算方法:

- 一般情况下。
- $x(n)$ 为最小相位序列或最大相位序列的情况下。

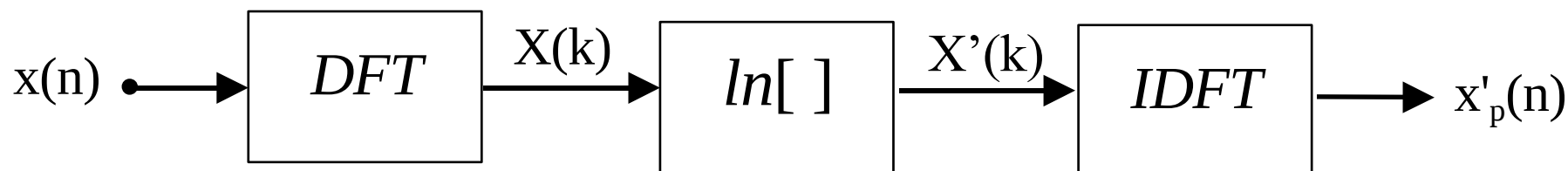
一般情况下复倒谱的计算方法：

● 方法1：按复倒谱的定义计算

■ 基本原理：

$$\mathbf{x}'(n) = \mathbf{Z}^{-1}\{\ln[\mathbf{Z}(\mathbf{x}(n))]\}$$

$$\mathbf{x}'(n) = \text{IDFT}\{\ln[\text{DFT}(\mathbf{x}(n))]\}$$



$$x'_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x'(n+rN), \quad \text{其中：} N \text{ 为计算} FFT \text{ 所取的点数，}$$

要取足够大以避免混淆失真。

一般情况下复倒谱的计算方法：

● 方法2：复对数求导数算法

- 基本思想：利用Z变换的微分性质以及对数函数的导数性质避免计算复对数的困难。

● $X'(z) = \ln[X(z)]$ ，求 $X'(z)$ 的反变换的主要困难是复对数运算的存在。

● Z变换的微分性质： $-z dX(z)/dz = Z[nx(n)]$ 。

● $d\ln(x)/dx = 1/x$

一般情况下复倒谱的计算方法:

■ 主要原理:

$$-z dX(z)/dz = Z[nx(n)].$$

$$X'(z) = \ln[X(z)]$$

$$\frac{d X'(z)}{d z} = \frac{d \ln[X(z)]}{d z} = \frac{1}{X(z)} \frac{d X(z)}{d z}$$

$$nx'(n) = Z^{-1}\left\{-\frac{z}{X(z)} \frac{d X(z)}{d z}\right\}$$

●性质1: 若 $x(n)$ 为实序列, $x'(n)$ 也是实序列

$$nx'(n) = F^{-1}\left\{-\frac{e^{j\omega}}{X(e^{j\omega})} \frac{dX(e^{j\omega})}{de^{j\omega}}\right\} = F^{-1}\left\{-\frac{1}{jX(e^{j\omega})} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right\}$$

$$x'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X'_r(e^{j\omega}) + jX'_i(e^{j\omega})] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(e^{j\omega})| d\omega$$

$$nx'(n) = F^{-1}\left\{-\frac{1}{jX(e^{j\omega})} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right\}$$

一般情况下复倒谱的计算方法:

■ 实际计算方法:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\frac{dX(k)}{dk} = -j\frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} nx(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x'(n) = -\frac{1}{jnN} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{X(k)} \frac{dX(k)}{dk} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 1 \leq n \leq N-1$$

$$x'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(e^{j\omega})| d\omega \Rightarrow x'(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln |X(k)|$$

与第一种方法相比，混叠失真加重，因此这种算法虽然避免了计算复对数问题，但导致了更严重的混叠失真。

最小相位条件下复倒谱的计算方法:

- 方法1: 利用最小相位条件简化基于定义的复倒谱计算方法

- 基本思想: 利用最小相位条件避免对复对数的计算。

- 原理1: 任何实序列 $x(n)$ 都可分解为奇序列 $x_o(n)$ 和偶序列 $x_e(n)$, 同时 $X_r(j\omega)$ 与 $x_e(n)$ 构成傅立叶变换对, 而 $jX_i(j\omega)$ 与 $x_o(n)$ 构成傅立叶变换对

偶, 实

奇, 虚

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad X(j\omega) = X_r(j\omega) + jX_i(j\omega)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \quad X_r(j\omega) = F\{x_e(n)\}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \quad jX_i(j\omega) = F\{x_o(n)\}$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

●原理2：因果实序列 $x(n)$ 可由偶序列恢复出来。

$$x(n) = 0, \quad n < 0$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$$

$$x(n) = \begin{cases} 2x_e(n), & n > 0 \\ x_e(n), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

- 计算原理：最小相位条件下复倒谱 $x'(n)$ 为因果实序列，故可由其偶序列完全决定，也就是由其傅立叶变换的实部完全决定。

$$X'(j\omega) = \ln[X(j\omega)] = \ln|X(j\omega)| + j \arg[X(j\omega)]$$

$$x'_e(n) = F^{-1}\{\ln|X(j\omega)|\}$$

$$x'_e(n) = \frac{1}{2}[x'(n) + x'(-n)] \quad x'(n) = \begin{cases} 2x'_e(n), & n > 0 \\ x'_e(n), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\ln|X(j\omega)| \Rightarrow x'_e(n) \Rightarrow x'(n)$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法:

- 具体方法:

$$\ln |X(j\omega)| \Rightarrow x'_e(n) \Rightarrow x'(n)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad N \text{取足够大, 减少混叠的影响。}$$

$$X'_r(k) = \ln |X(k)|$$

$$x'_e(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X'_r(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

由于复倒谱是无限长的, 用DFT计算会产生混叠失真, 因此N应取得足够大。

$$x'(n) = \begin{cases} 2x'_e(n), & 1 \leq n < N/2 \\ x'_e(n), & n = 0, n = N/2 \\ 0, & N/2 < n \leq N-1 \end{cases}$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

- 方法2：递推计算方法

- 基本思想：

- 利用复对数求导数算法中得到的关系式，并利用 $x(n)$ 和 $x'(n)$ 都为因果序列进行化简，以得到 $x'(n)$ 的递推关系式。

$$\frac{dX'(z)}{dz} = \frac{1}{X(z)} \frac{dX(z)}{dz}$$

$$Z^{-1} \left\{ -z \frac{dX(z)}{dz} \right\} = nx(n)$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法:

- 求解过程:

$$\frac{dX'(z)}{dz} = \frac{1}{X(z)} \frac{dX(z)}{dz}$$

$$X(z) \left\{ -z \frac{dX'(z)}{dz} \right\} = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kx'(k)x(n-k) = nx(n)$$

$$x(n) = x'(n) = 0, \quad n < 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^n kx'(k)x(n-k) = nx(n)$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法:

$$\sum_{k=0}^n kx'(k)x(n-k) = nx(n)$$

$$nx'(n)x(0) + \sum_{k=0}^{n-1} kx'(k)x(n-k) = nx(n)$$

$$x'(n) = \begin{cases} \ln(A), & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^n}{n}, & n > 0 \end{cases}$$

$$x'(n) = \frac{x(n)}{x(0)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{nx(0)} x'(k)x(n-k), \quad n \neq 0$$

$$X(z) = |A| \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1})}$$

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = |A|$$

$$x'(0) = \ln |A| = \ln[x(0)]$$

总结：

- 通过分析乘性组合信号和卷积组合信号的分离问题，引出了同态系统的概念，所谓同态系统是符合广义叠加原理的系统。
- 具体介绍了两种类型的同态系统：乘法同态系统和卷积同态系统。
- 介绍了卷积同态系统中的复倒谱的性质以及计算方法。