
第六章 同态信号处理

6.1 引言

问题的提出:

● 加性组合信号:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

● 加性组合信号的分离方法:

- 线性滤波器
- 维纳滤波器或卡尔曼滤波器

问题的提出:

乘性组合信号:

$$\mathbf{x}(\mathbf{n}) = \mathbf{x}_1(\mathbf{n}) \times \mathbf{x}_2(\mathbf{n})$$

● 实际应用中存在不是加性组合的信号:

■ 例子1: 图象的模型



$$x(u, v) = x_i(u, v) \times x_r(u, v)$$

其中:

$x(u, v)$: 图象信号

$x_i(u, v)$: 照度图

$x_r(u, v)$: 反射图

问题的提出:

卷积组合信号:
 $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$

■ 例子2: 混响环境中的声音信号

$$x(n) = s(n) + \sum_{k=1}^M \alpha_k s(n - n_k) = s(n) * h(n)$$

其中:

$$h(n) = \delta(n) + \sum_{k=1}^M \alpha_k \delta(n - n_k)$$

$x(n)$: 得到的声音信号

$s(n)$: 真实的声音信号

n_k : 第 k 个回波信号相对于真实信号的时延

α_k : 第 k 个回波信号的反射系数

问题的提出:

● 分离非加性信号的意义:

- 对图象信号要压缩照度图的动态范围，同时拉伸反射图的动态范围。

$$x(u, v) = x_i(u, v) \times x_r(u, v)$$

- 对混响环境中的声音信号要恢复出真实的声音信号。

$$x(n) = s(n) + \sum_{k=1}^M \alpha_k s(n - n_k) = s(n) * h(n)$$

问题的提出:

● 问题:

- 怎样分离非加性组合的信号?

● 分离非加性组合信号的可能方法:

- 根据问题特性寻找新的方法。
- 将非加性组合信号转化为加性组合信号，用加性组合信号的分离方法处理后再转化为原来的信号。

● 研究代表性的问题:

- 分离乘性组合信号: $x(n) = x_1(n) \times x_2(n)$
- 分离卷积组合信号: $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$

问题的分析:

- 乘性组合信号转化为加性组合信号的可能性: $x(n) = x_1(n) \times x_2(n)$

$$\ln[x(n)] = \ln[x_1(n)] + \ln[x_2(n)]$$

$$L\{\ln[x(n)]\} = L\{\ln[x_1(n)]\} + L\{\ln[x_2(n)]\}$$

$$x'_1(n) = \exp\{L[\ln[x_1(n)]]\}$$

$$x'_2(n) = \exp\{L[\ln[x_2(n)]]\}$$

问题的分析:

- 卷积组合信号转化为加性组合信号的可能性: $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ $X(z) = X_1(z) \times X_2(z)$

$$\ln[X(z)] = \ln[X_1(z)] + \ln[X_2(z)]$$

$$Z^{-1}\{\ln[X(z)]\} = Z^{-1}\{\ln[X_1(z)]\} + Z^{-1}\{\ln[X_2(z)]\}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(n) = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n)$$

$$L\{\hat{x}(n)\} = L\{\hat{x}_1(n)\} + L\{\hat{x}_2(n)\}$$

$$x'_1(n) = Z^{-1}\{\exp\{Z[L[\hat{x}_1(n)]]\}\}$$

$$x'_2(n) = Z^{-1}\{\exp\{Z[L[\hat{x}_2(n)]]\}\}$$

问题的分析:

● 综合乘性组合信号和卷积组合信号的分 离方法:

$$x(n) = x_1(n) \times x_2(n)$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$\ln[x(n)] = \ln[x_1(n)] + \ln[x_2(n)]$$

$$\ln[X(z)] = \ln[X_1(z)] + \ln[X_2(z)]$$

$$\Rightarrow \hat{x}(n) = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n)$$

$$L\{\ln[x(n)]\} = L\{\ln[x_1(n)]\} + L\{\ln[x_2(n)]\} \quad L\{\hat{x}(n)\} = L\{\hat{x}_1(n)\} + L\{\hat{x}_2(n)\}$$

$$x_1(n) = \exp\{\ln[x_1(n)]\}$$

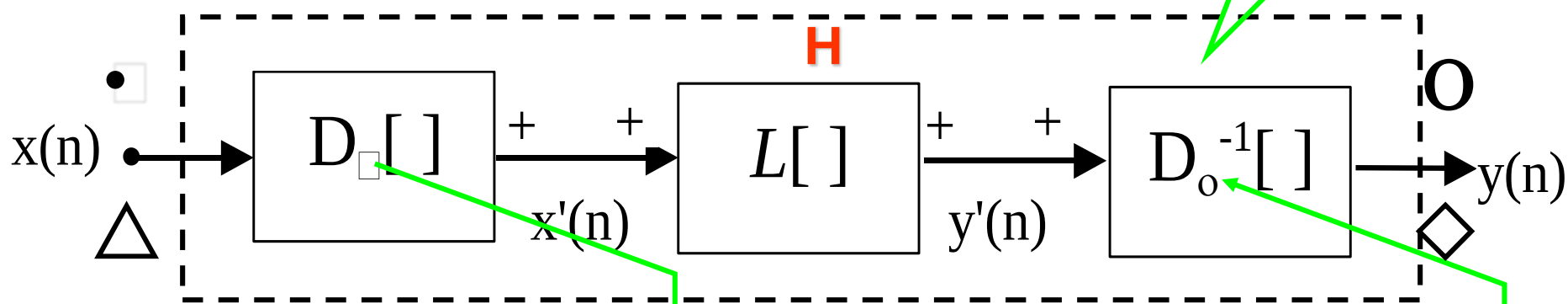
$$x_1(n) = Z^{-1}\{\exp\{Z[\hat{x}_1(n)]\}\}$$

6.2 同态信号处理的规范形式 和广义叠加原理

同态信号处理的基本概念：

● 同态系统的规范形式：

$$x(n) = [C1 \Delta x_1(n)] \bullet [C2 \Delta x_2(n)]$$



同态系统

运算 $\bullet \square$ 的特征系统

运算 O 的特征系统的逆系统

$$\begin{aligned} D. [x(n)] &= D. [x_1(n) \bullet x_2(n)] = D. [x_1(n)] + D. [x_2(n)] = x_1'(n) + x_2'(n) \\ y'(n) &= L[x'(n)] = L[x_1'(n) + x_2'(n)] = L[x_1'(n)] + L[x_2'(n)] = y_1'(n) + y_2'(n) \\ y(n) &= D_o^{-1}[y'(n)] = D_o^{-1}[y_1'(n) + y_2'(n)] = D_o^{-1}[y_1'(n)] O D_o^{-1}[y_2'(n)] \end{aligned}$$

● 广义叠加原理:

- 线性系统:

$$L[x_1(n) + x_2(n)] = L[x_1(n)] + L[x_2(n)]$$

$$L[c \times x(n)] = c \times L[x(n)], \quad c \text{ 为一常数}$$

- 定义: 满足以下条件的系统 H 称之为符合广义叠加原理:

$$H[x_1(n) \square x_2(n)] = H[x_1(n)] \bigcirc H[x_2(n)]$$

$$H[c \triangle x(n)] = c \diamond H[x(n)]$$

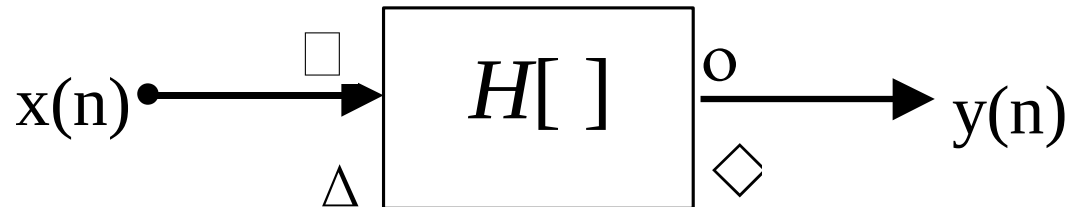
$$H[x_1(n) \square x_2(n)] = H[x_1(n)] \circ H[x_2(n)]$$

$$H[c \triangle x(n)] = c \diamond H[x(n)]$$

同态信号处理的基本概念：

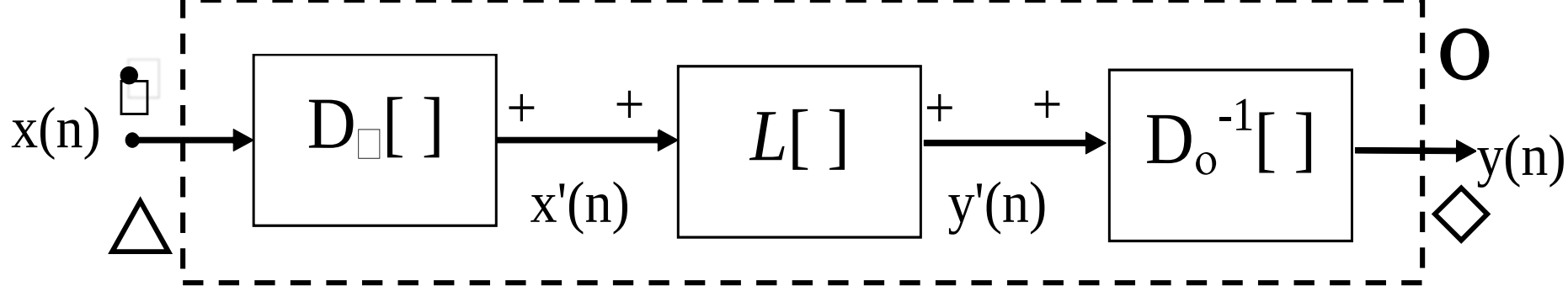
● 同态系统：

- 满足广义叠加原理的系统即为*同态系统*，其一般表示形式为：



- 注意： H 中运算 $\square$ 的特征系统和运算 $\circ$ 的特征系统的逆系统必须是一一映射的。

6.3 乘法同态系统



- 乘性组合信号的一般形式：

$$x(n) = [x_1(n)]^\alpha \times [x_2(n)]^\beta$$

□：乘法运算

△：指数运算

- 运算□的特征系统 $D_\times[]$ ：复对数

$$\ln[x(n)] = \alpha \ln[x_1(n)] + \beta \ln[x_2(n)]$$

$$L\{\ln[x(n)]\} = L\{\alpha \ln[x_1(n)]\} + L\{\beta \ln[x_2(n)]\}$$

- 运算O的特征系统的逆系统 $D_\times^{-1}[]$ ：复指数

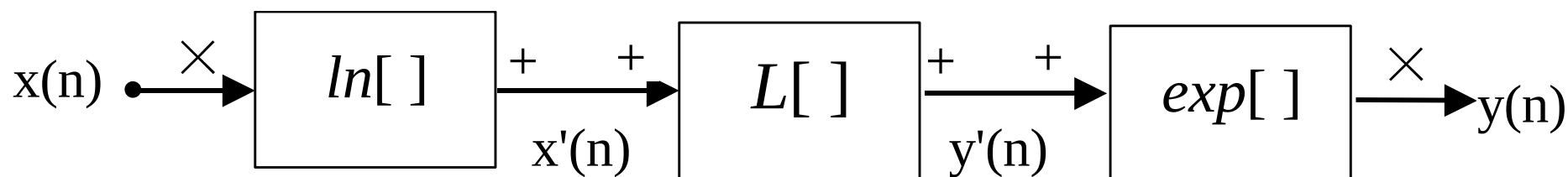
O：乘法运算

◇：指数运算

$$H[x_1(n) \square x_2(n)] = H[x_1(n)] \bigcirc H[x_2(n)] \quad H[c \triangle x(n)] = c \diamond H[x(n)]$$

乘法同态系统:

● 乘法同态系统的一般形式:



$$x(n) = [x_1(n)]^\alpha \times [x_2(n)]^\beta$$

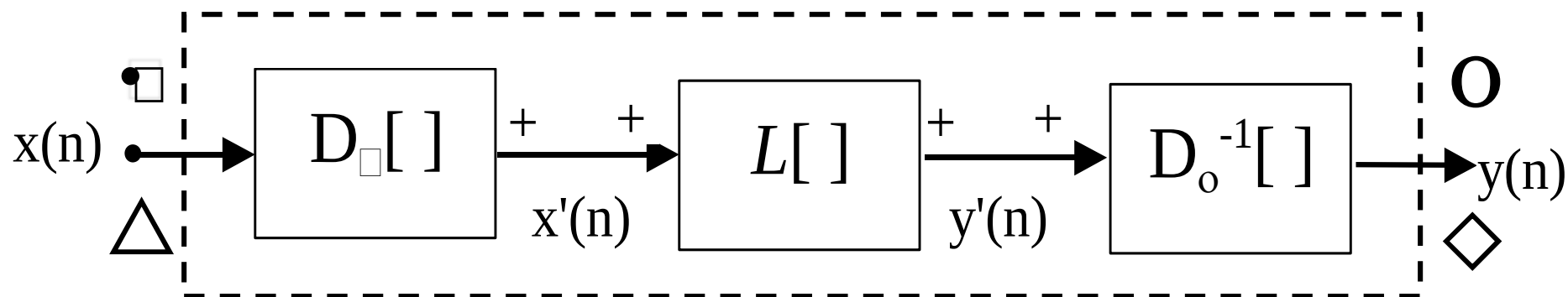
$$x'(n) = \ln[x(n)] = \alpha \ln[x_1(n)] + \beta \ln[x_2(n)] = \alpha x'_1(n) + \beta x'_2(n)$$

$$y'(n) = L\{x'(n)\} = \alpha L\{x'_1(n)\} + \beta L\{x'_2(n)\} = \alpha y'_1(n) + \beta y'_2(n)$$

$$y(n) = \exp\{y'(n)\} = \exp[\alpha y'_1(n) + \beta y'_2(n)] = [y_1(n)]^\alpha \times [y_2(n)]^\beta$$

$$y_1(n) = \exp[y'_1(n)], \quad y_2(n) = \exp[y'_2(n)]$$

6.4 卷积同态系统

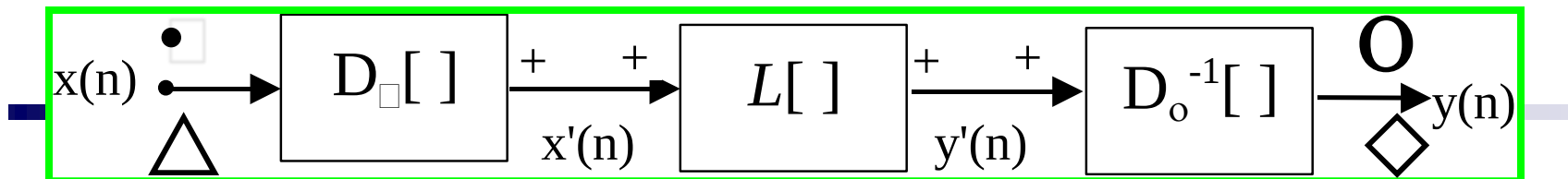


● 卷积组合信号的一般形式：

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

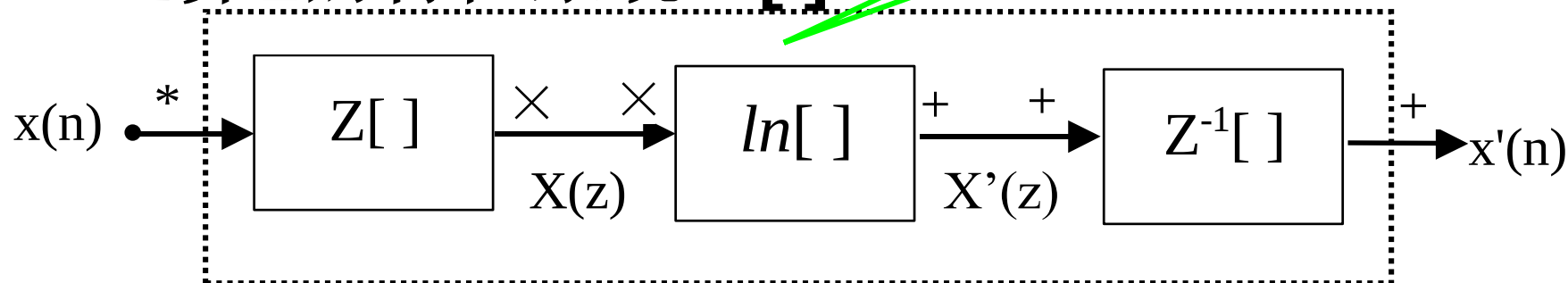
□：卷积运算——“*”

O：卷积运算——“*”



● 运算□的特征系统 $D_*[\]$:

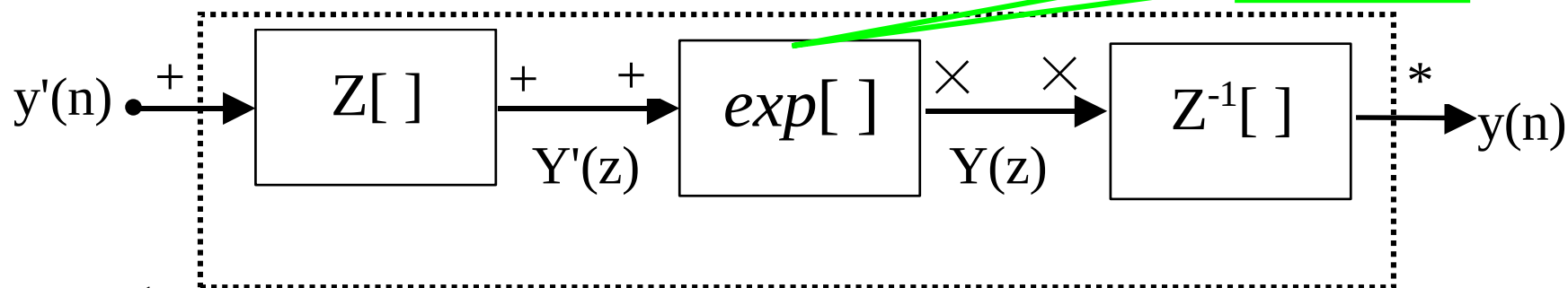
$D_*[\]$



$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n))]\} = Z^{-1}\{\ln[X_1(z)]\} + Z^{-1}\{\ln[X_2(z)]\} = x'_1(n) + x'_2(n)$$

● 运算O的特征系统的逆系统 $D_*^{-1}[\]$:

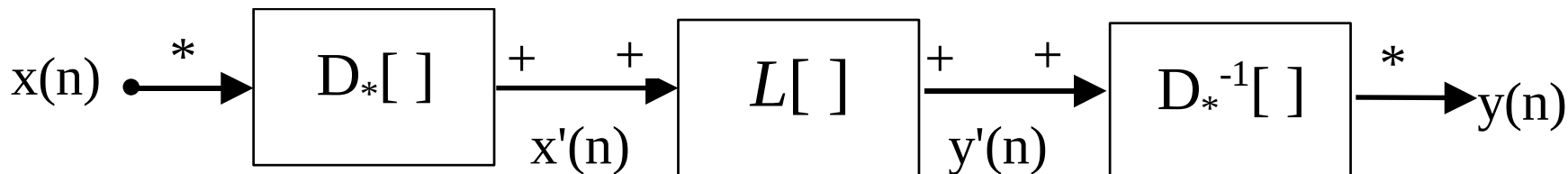
$D_*^{-1}[\]$



$$y(n) = Z^{-1}\{\exp[Z(y'(n))]\} = Z^{-1}\{\exp[Y'_1(z)] \times \exp[Y'_2(z)]\} = y_1(n) * y_2(n)$$

$$H[x_1(n) \square x_2(n)] = H[x_1(n)] \bigcirc H[x_2(n)] \quad H[c \triangle x(n)] = c \diamond H[x(n)]$$

● 卷积同态系统的一般形式:



$$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n))]\} = Z^{-1}\{\ln[X_1(z)]\} + Z^{-1}\{\ln[X_2(z)]\} = x'_1(n) + x'_2(n)$$

$$y'(n) = L\{x'_1(n) + x'_2(n)\} = y'_1(n) + y'_2(n)$$

复倒谱

$$y(n) = Z^{-1}\{\exp[Z(y'(n))]\} = y_1(n) * y_2(n)$$

同态信号处理的应用：

● 图象的同态处理（乘法同态系统）：

- 问题的提出：对于图象信号，怎样压缩照度图的动态范围，同时拉伸反射图提高对比度，以改善图象的质量？

$$x(m, n) = x_i(m, n) \times x_r(m, n)$$

其中：

$x(m, n)$: 图象信号

$x_i(m, n)$: 照度图

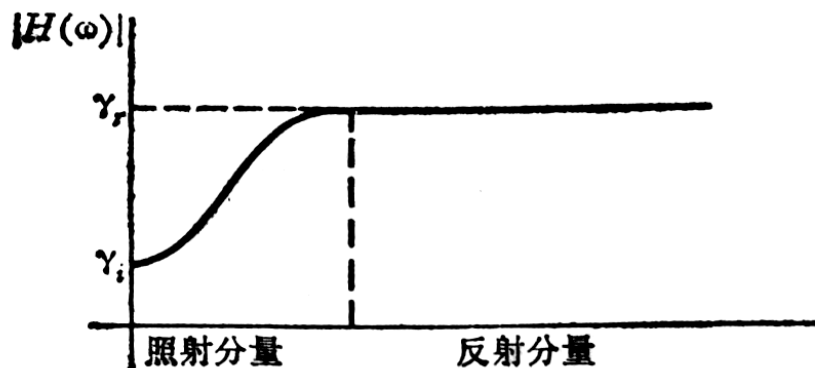
$x_r(m, n)$: 反射图

同态信号处理的应用:

■ 利用乘法同态系统处理:

$$x(m, n) = x_i(m, n) \times x_r(m, n)$$

$$x'(m, n) = \ln[x(m, n)] = \ln[x_i(m, n)] + \ln[x_r(m, n)] = x'_i(m, n) + x'_r(m, n)$$



$$X'(\omega_1, \omega_2) = X'_i(\omega_1, \omega_2) + X'_r(\omega_1, \omega_2)$$

$$L\{X'(\omega_1, \omega_2)\} = \gamma_i X'_i(\omega_1, \omega_2) + \gamma_r X'_r(\omega_1, \omega_2)$$

$$y'(m, n) = \gamma_i \ln[x_i(m, n)] + \gamma_r \ln[x_r(m, n)]$$

$$y(m, n) = \exp\{y'(m, n)\} = [x_i(m, n)]^{\gamma_i} [x_r(m, n)]^{\gamma_r}$$

线性系统

同态信号处理的应用：

● 解混响（卷积同态系统）：

- 问题的提出：怎样从混响信号中将真实的声音信号提取出来？

$$x(n) = s(n) + \alpha s(n - n_0) = s(n) * h(n)$$

其中：

$$h(n) = \delta(n) + \alpha \delta(n - n_0)$$

$x(n)$: 得到的混响信号

$s(n)$: 真实的声音信号

n_0 : 回波信号相对于真实信号的时延

α : 回波信号的反射系数

同态信号处理的应用：

- 利用卷积同态系统处理：

$$x(n) = s(n) + \alpha s(n - n_0) = s(n) * h(n)$$

运算*的特征系统

$$X(z) = S(z) \times H(z) = S(z) [1 + \alpha z^{-n_0}]$$

$$X'(z) = \ln[X(z)] = \ln[S(z)] + \ln[1 + \alpha z^{-n_0}]$$

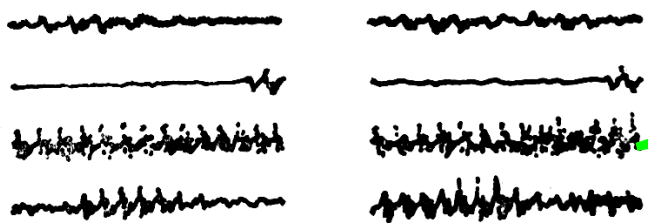
$$x'(n) = s'(n) + h'(n)$$

$$h'(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha^k}{k} \delta(n - kn_0), & n > 0 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

$$y'(n) = L[x'(n)] = x'(n) \times [1 - \sum_{k=1}^{\infty} \delta(n - kn_0)] = s'(n) \times [1 - \sum_{k=1}^{\infty} \delta(n - kn_0)]$$

原始信号

混响信号

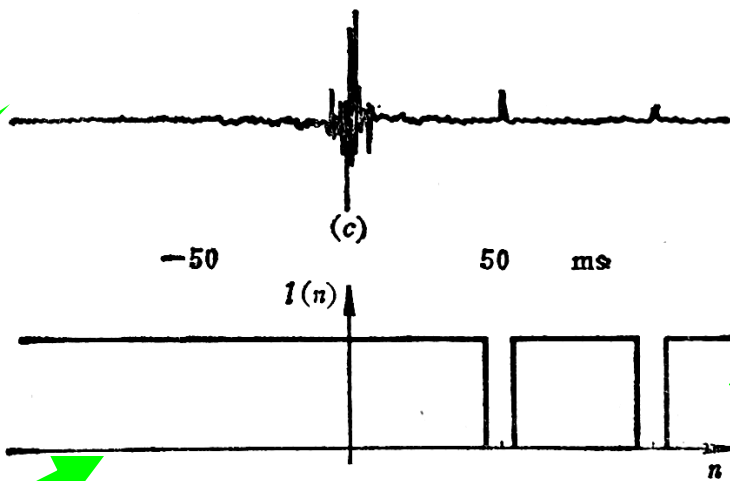


(a)

(b)

复倒谱

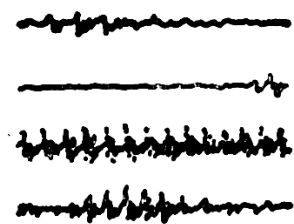
滤波器



(c)

(d)

恢复结果



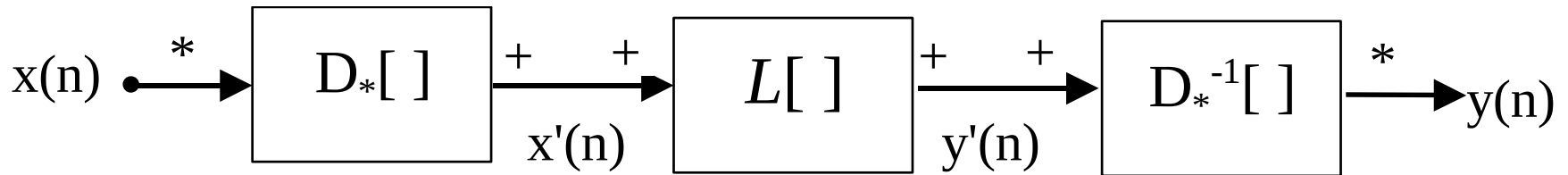
(e)

$$[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \delta(n - kn_0)]$$

6.5 复倒谱

卷积同态系统：

● 卷积同态系统的一般形式：



$$\ln[X(z)] = \ln[|X(z)|] + j(\arg[X(z)] + 2\pi k),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n))]\} = Z^{-1}\{\ln[X_1(z)]\} + Z^{-1}\{\ln[X_2(z)]\} = x'_1(n) + x'_2(n)$$

$$y'(n) = L\{x'_1(n) + x'_2(n)\} = Z^{-1}\{\ln[Y_1(z)]\} + Z^{-1}\{\ln[Y_2(z)]\}$$

$$y(n) = Z^{-1}\{\exp[Z(y'(n))]\} = y_1(n) * y_2(n)$$

怎么求？

复倒谱:

- 定义:

- 序列 $x(n)$ 的复倒谱定义为:

$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n))]\}$$

- 存在的问题:

- 复对数的多值性问题:

$$\ln[X(z)] = \ln[|X(z)|] + j(\arg[X(z)] + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

- $X'(z)$ 的解析性问题:

$$X'(e^{j\omega}) = \ln[|X(e^{j\omega})|] + j(\arg[X(e^{j\omega})] + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

- 复对数的多值性问题的解决:

- 问题的分析:

$$\mathbf{x}'(\mathbf{n}) = \mathbf{Z}^{-1}\{\ln[X(\mathbf{z})]\}$$

$$X'(z) = \ln[X(z)] = \ln|X(z)| + j(\arg\{X(z)\} + 2k\pi),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\dots$$

- 解决的方法:

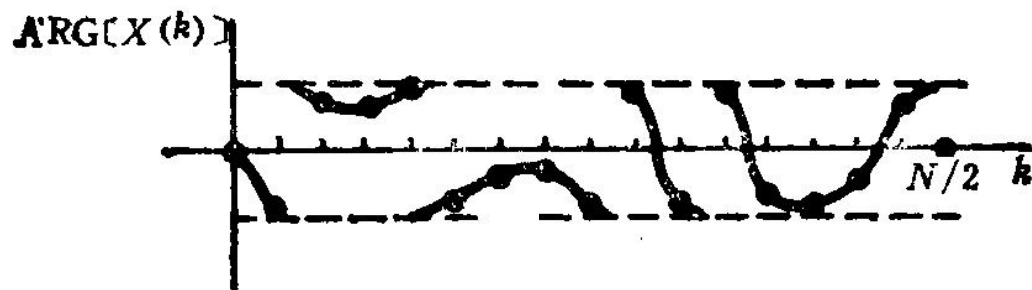
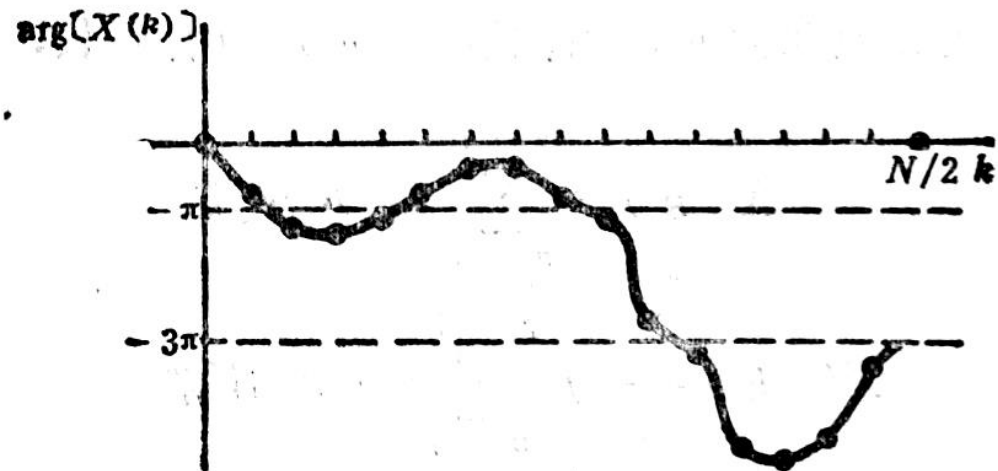
- 按照一定的规则取一个幅角值，一般情况下取主值，即将幅角对 π 取模得到的结果，令其为 $\mathbf{ARG}\{X(\mathbf{z})\}$ ，则:

$$\mathbf{ARG}\{X(z)\} = \langle \arg\{X(z)\} + 2k\pi \rangle_{\pi}$$

$$-\pi < \mathbf{ARG}\{X(z)\} < \pi$$

■ 例子:

$$\text{ARG}\{X(z)\} = \langle \arg\{X(z)\} + 2k\pi \rangle_{\pi}$$





- $X'(z)$ 的解析性问题的解决:

- 解析性问题的提出:

$$X'(z) = \ln[X(z)]$$

$$X'(e^{j\omega}) = \ln[|X(e^{j\omega})|] + j\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$$

- $X'(z)$ 为一个序列的Z变换的条件是 $X'(z)$ 在其收敛域内为一解析函数（连续、可微）。
- 一般要求 $x'(n)$ 为一稳定的且是因果的序列，则 $X'(z)$ 的收敛域包含单位圆，故 $X'(e^{j\omega})$ 应为解析函数。
- 从以上解决复对数的多值性的结果可以看出，至少有 $X'(e^{j\omega})$ 的虚部是不连续的，因而存在 $X'(z)$ 的解析性问题。



■ 问题的分析:

- $X'(e^{j\omega}) = \ln|X(e^{j\omega})| + j\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$, 若要使 $X'(e^{j\omega})$ 解析, $X'(e^{j\omega})$ 的实部和虚部都要解析。
- $x(n)$ 稳定, 则 $X(z)$ 的极点不在单位圆上, 故只要 $X(z)$ 在单位圆上无零点, $X'(e^{j\omega})$ 的实部解析。
- 当 $X'(e^{j\omega})$ 的虚部为 $j\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$ 时, $X'(e^{j\omega})$ 的虚部不解析。

■ $X'(e^{j\omega})$ 的虚部不解析的解决方法:

- 根据 $j\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$ 的特点, 利用幅角可以加 $2k\pi$ 复数值仍不变的特点, 通过在不连续处选择适当的 k 值来使 $X'(e^{j\omega})$ 成为连续函数 (相当于在圆柱面上求幅角)。

■ 例子:

