第五章　　现代谱估计

5.8 AR谱估计的参数提取方法

随机过程模型

AR谱估计：

$$\sum_{k=0}^{p} a_k R_{xx}(m-k) = \begin{cases} \sigma^2, m=0 \\ 0, m>0 \end{cases}$$

$$S_{AR}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma^2}{\left|1+\sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}\right|^2}$$

- 基本思路：
  - 利用AR谱估计与线性预测误差滤波谱估计等效。
    - AR模型的参数通过对过程的[有限个观察信号]最优线性预测误差滤波得到。即：AR模型参数的提取可化为以下优化问题：

$$\underset{a_k,\ k=1,\ 2\cdots p}{Min}\quad E\{[e_p^+(n)]^2\} \qquad \underset{a_k,\ k=1,\ 2\cdots p}{Min}\quad E\{[e_p^-(n)]^2\}$$

$$\underset{a_k,\ k=1,\ 2\cdots p}{Min}\quad E\{[e_p^+(n)]^2+[e_p^-(n)]^2\}$$

    - 对于平稳的随机时间序列，可用时间平均代替集合平均

- 具体方法：
  - 自相关法（ **Yule - Walker**法）；
  - 协方差法；
  - Burg法。

$$\boxed{E[e^2(n)] = \min}$$

$$\boxed{\mathbf{R}_{N+1}\begin{bmatrix}1\\ -\mathbf{A}_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_{aN}\\ 0\end{bmatrix}}$$

一 自相关法（ Yule - Walker法）

$$\{x(n)\}_{n=0}^{N-1} \longrightarrow \boxed{A_p(z)} \longrightarrow e_p^+(n) = \sum_{i=0}^{p} a_{pi} x(n-i)$$

$$\boxed{R_N = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(N-1) & r(N-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}}$$

$$A_p(z) = \sum_{i=0}^{p} a_{pi} z^{-i}, a_{p0} = 1$$

$$\boxed{r_x(k) = E[x(n)x(n+k)]}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N+p-1}[e_p^+(n)]^2 = \sum_{i,j=0}^{p} a_{pi}\widehat{R}(i-j)a_{pj} \Rightarrow \min$$

$$\widehat{R}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k), 0 \le k \le p$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{p+1} = \begin{bmatrix} \widehat{R}(0) & \widehat{R}(1) & \dots & \widehat{R}(p) \\ \widehat{R}(1) & \widehat{R}(0) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widehat{R}(p) & \widehat{R}(p-1) & \dots & \widehat{R}(0) \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{p+1}\begin{bmatrix}1\\ -\mathbf{A}_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma^2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\sum_{n=n_1}^{n=n_2} e_p^2(n) = \min}$$

1)$\widehat{\mathbf{R}}_{p+1}$正定；

2)$|\gamma_{\mathrm{k}}| < 1$

$$\mathbf{A}_p = [a_{p1}, a_{p1}, \dots, a_{pp}]^T$$

二 协方差法

$$\{x(n)\}_{n=0}^{N-1} \longrightarrow \boxed{A_p(z)} \longrightarrow e_p^+(n) = \sum_{i=0}^{p} a_{pi} x(n-i)$$

$$A_p(z) = \sum_{i=0}^{p} a_{pi} z^{-i}, a_{p0} = 1$$

$$\boxed{\sum_{n=n_1}^{n=n_2} e_p^2(n) = \min}$$

$$\varepsilon = \sum_{n=p}^{N-1} [e_p^+(n)]^2 = N \sum_{i,j=0}^{p} a_{pi} \hat{R}(i,j) a_{pj} \Rightarrow \min$$

$$\hat{R}(i,j) = \frac{1}{N} \sum_{n=p}^{N-1} x(n-i)x(n-j), 0 \le, i, j \le p$$

- **自相关矩阵的估计 $\hat{\mathbf{R}} = [\hat{R}(i,j)]$不是Toplitz的；**
- **协方差法存在着稳定性的问题**

$$\boxed{\text{注意}: \hat{R}(i,j) \ne \hat{R}(i+k, j+k), k \ne 0}$$

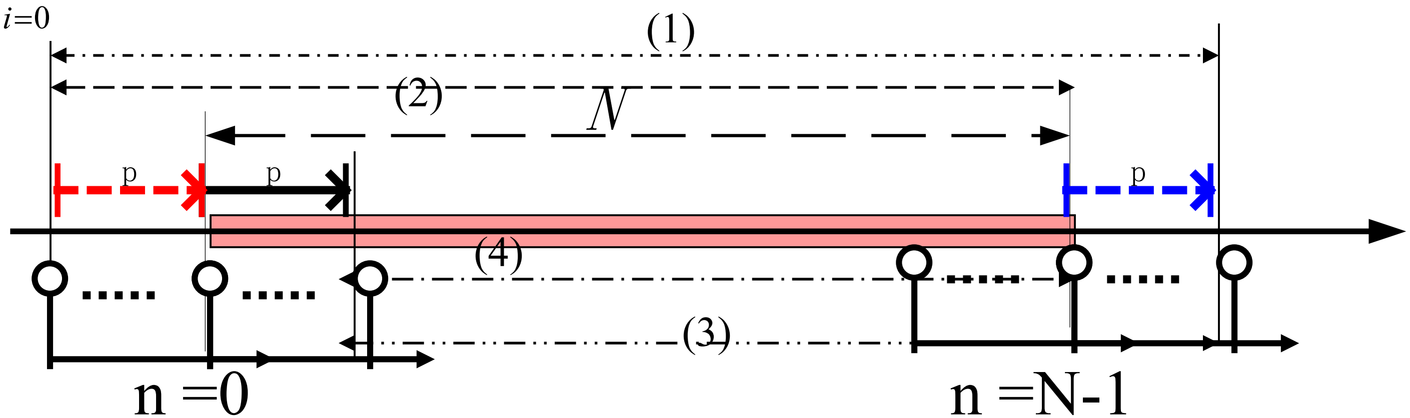
[selection of n_1 and n_2(Data windowing)]

1) $n_1=0$, $n_2=N+p-1$,前后补零p个(自相关法)
2) $n_1=0$, $n_2=N-1$,前补零p个,后不补零(前加窗法)
3) $n_1=p$, $n_2=N+p-1$,前不补零后补零p个 (后加窗法)
4) $n_1=p$, $n_2=N-1$,前后不补零(协方差法)

$$\sum_{n=n_1}^{n=n_2} e_p^2(n)=\min$$

$$e_p^+(n)=\sum_{i=0}^{p} a_{pi}x(n-i)$$

$$\Rightarrow R(m,k)=\sum_{n=n_1}^{n=n_2} x(n-k)x(n-m),\ m,k=0,1,\ldots,p$$



$$\varepsilon = \sum_{n=p}^{N-1}[e_p^+(n)]^2 = N\sum_{i,j=0}^{p} a_{pi}\widehat{R}(i,j)a_{pj} \Rightarrow \min$$

例：设输入序列长度为3，对它进行1阶线性预测

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{2}[e_p^+(n)]^2 = [e_1^+(1)]^2 + [e_1^+(2)]^2$$

$$e_p^+(n) = \sum_{i=0}^{p} a_{pi}x(n-i)$$

$$= [x(1) + a_{11}x(0)]^2 + [x(2) + a_{11}x(1)]^2$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_{11}} = 2[x(1) + a_{11}x(0)]x(0) + 2[x(2) + a_{11}x(1)]x(1) = 0$$

$$a_{11} = \frac{-[x(1)x(0) + x(2)x(1)]}{x^2(0) + x^2(1)}$$

上式中，a_{11}分母与$x(2)$无关→当$x(2)$大→ $|a_{11}| > 1$→不是最小相位的

$$A(z) = 1 + a_{11}z^{-1}$$

三 Burg法

自相关法计算效率高→数据加窗→精度下降

协方差：不稳定；

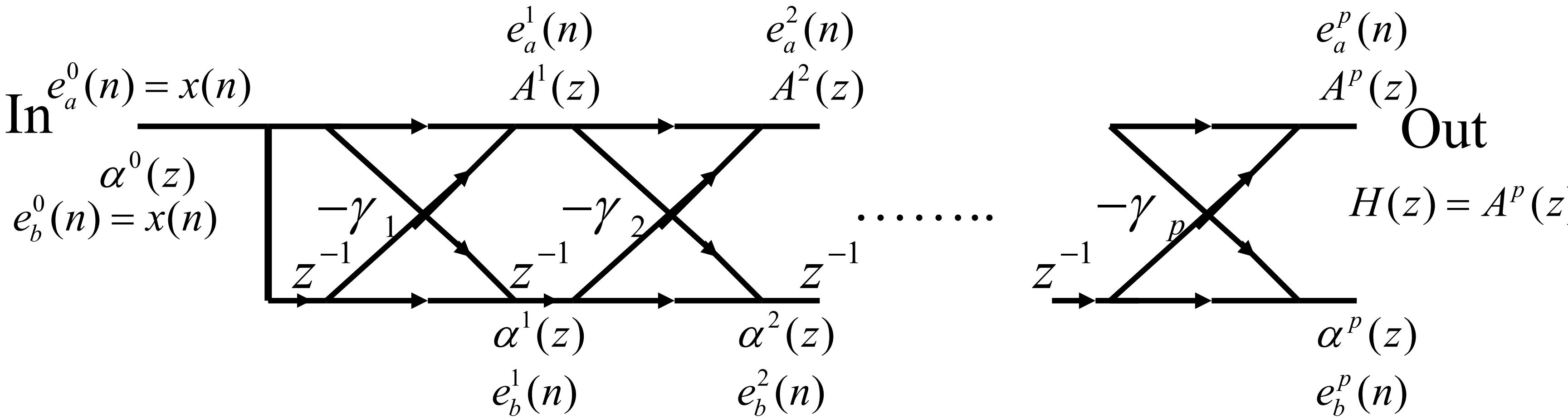
Burg法：希望避免使用已知数据两端以外的未知数据为零的假设，同时设法保证使预测误差滤波器是最小相位。

先估计反射系数→Levinson递推算法由反射系数求得AR参数

Burg法所采用的准则：前向和后向预测误差功率估计的平均值最小

$$\varepsilon=\sum_{n=k}^{N-1}\left\{[\mathrm{e}_{\mathrm{k}}^{+}(\mathrm{n})]^{2}+[\mathrm{e}_{\mathrm{k}}^{-}(\mathrm{n})]^{2}\right\}=\min$$

Lattice Architecture I



$$\begin{cases} e_a^j(n) = e_a^{j-1}(n) - \gamma_j e_b^{j-1}(n-1) \\ e_b^j(n) = e_b^{j-1}(n-1) - \gamma_j e_a^{j-1}(n) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}_{\mathrm{k}}^{+}(\mathrm{n}) \\ \mathrm{e}_{\mathrm{k}}^{-}(\mathrm{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_k \\ -\gamma_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}_{\mathrm{k-1}}^{+}(\mathrm{n}) \\ \mathrm{e}_{\mathrm{k-1}}^{-}(\mathrm{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \sum_{n=k}^{N-1}\left\{[\mathrm{e}_k^+(\mathrm{n})]^2 + [\mathrm{e}_k^-(\mathrm{n})]^2\right\}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}_k^+(\mathrm{n}) \\ \mathrm{e}_k^-(\mathrm{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_k \\ -\gamma_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}_{k-1}^+(\mathrm{n}) \\ \mathrm{e}_{k-1}^-(\mathrm{n-1}) \end{bmatrix}, k \le n \le N-1$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma_k} = 2\sum_{n=k}^{N-1}\left[\mathrm{e}_k^+(\mathrm{n})\frac{\partial \mathrm{e}_k^+(\mathrm{n})}{\partial \gamma_k} + \mathrm{e}_k^-(\mathrm{n})\frac{\partial \mathrm{e}_k^-(\mathrm{n})}{\partial \gamma_k}\right] = 0$$

$$\sum_{n=k}^{N-1}\left[\mathrm{e}_k^+(\mathrm{n})\mathrm{e}_{k-1}^-(\mathrm{n-1}) + \mathrm{e}_k^-(\mathrm{n})\mathrm{e}_{k-1}^+(\mathrm{n})\right] = 0$$

$$\sum_{n=k}^{N-1}\left[\{\mathrm{e}_{k-1}^+(\mathrm{n}) - \gamma_k \mathrm{e}_{k-1}^-(\mathrm{n-1})\}\mathrm{e}_{k-1}^-(\mathrm{n-1}) + \{\mathrm{e}_{k-1}^-(\mathrm{n-1}) - \gamma_k \mathrm{e}_{k-1}^+(\mathrm{n})\}\mathrm{e}_{k-1}^+(\mathrm{n})\right] = 0$$

$$\boxed{\gamma_k = \frac{2\sum_{n=k}^{N-1}\mathrm{e}_{k-1}^+(\mathrm{n})\mathrm{e}_{k-1}^-(\mathrm{n-1})}{\sum_{n=k}^{N-1}\left[\{\mathrm{e}_{k-1}^+(\mathrm{n})\}^2 + \{\mathrm{e}_{k-1}^-(\mathrm{n-1})\}^2\right]}}$$

Burg法计算步骤

1）初始条件 $e_0^+(n)=e_0^-(n)=x(n), 0\le n\le N-1$

$$\sigma_0^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x^2(n),$$

$$k=1$$

2）计算

$$\gamma_{\mathrm{k}}=\frac{2\sum_{n=k}^{N-1}\mathrm{e}_{\mathrm{k-1}}^+(\mathrm{n})\mathrm{e}_{\mathrm{k-1}}^-(\mathrm{n-1})}{\sum_{n=k}^{N-1}\left[\{\mathrm{e}_{\mathrm{k-1}}^+(\mathrm{n})\}^2+\{\mathrm{e}_{\mathrm{k-1}}^-(\mathrm{n-1})\}^2\right]}$$

3）计算 $A_k(z)$

$$a_{k,i}=a_{k-1,i}-\gamma_k a_{k-1,k-i}, i=1,2,\ldots,k-1$$

$$a_{k,k}=-\gamma_k$$

4）计算 $e_k^+(n), e_k^-(n), k \le n \le N-1$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}_{\mathrm{k}}^+(\mathrm{n}) \\ \mathrm{e}_{\mathrm{k}}^-(\mathrm{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_k \\ -\gamma_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}_{\mathrm{k-1}}^+(\mathrm{n}) \\ \mathrm{e}_{\mathrm{k-1}}^-(\mathrm{n-1}) \end{bmatrix}, k \le n \le N-1$$

5）计算k阶误差 $\sigma_k^2 = (1-\gamma_k^2)\sigma_{k-1}^2$

6）k←k+1, 若k<=p，转至2）；否则结束。

5.9 MA模型法和ARMA模型法

当随机时间序列符合MA模型或ARMA模型时，若用AR模型法进行谱估计，要想获得高的精度，模型阶数要很高，由于随机采样样本是有限的，这样就容易出现虚假谱峰。

一 ARMA模型参数与过程的自相关函数间的关系

$$u(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x(n)$$

均值为零，方差为 σ^2 的白噪声序列

随机过程模型

$$S_{xx}(z) = \sigma^2 \frac{B(z)B(\frac{1}{z})}{A(z)A(\frac{1}{z})} \qquad H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \Leftrightarrow h(k)$$ 实，因果

$$S_{xx}(z)A(z) = \sigma^2 \frac{B(\frac{1}{z})}{A(\frac{1}{z})} B(z) = \sigma^2 H(\frac{1}{z}) B(z)$$

$$\Big\Downarrow z^{-1} \qquad\qquad \Big\Downarrow z^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k R_{xx}(m-k) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{q} b_k h(k-m), [h(n)\text{实}]$$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k R_{xx}(m-k) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{q} b_k h(k-m), [h(n)\text{实}]$$

因为h(n)=0,n<0;所以k-m>=0,k>=m

$$\sum_{k=0}^{q} b_k h(k-m) = \begin{cases} \sum_{k=m}^{q} b_k h(k-m), m = 0,1,..,q \\ 0, m \ge q+1 \end{cases}$$

or

$$\sigma^2 \sum_{k=0}^{q} b_k h(k-m) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k), m = 0,1,..,q \\ 0, m \ge q+1 \end{cases}$$

$$\boxed{R_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k R_{xx}(m-k) + \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k), m = 0,1,..,q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k R_{xx}(m-k), \quad m \ge q+1 \end{cases}}$$

$$H(z)=B(z)\Leftrightarrow h(k)=b_k, S_{xx}(z)\Leftrightarrow R_{xx}(z)$$

二 MA模型谱估计

均值为零，方差为 σ^2 的白噪声序列

随机过程模型

MA模型：$a_0=1$, 且$a_k=0$, $k=1, 2, \ldots, p$；此时，$h(k)=b_k$

$$\boxed{R_{xx}(m)=\begin{cases}\sigma^2\sum_{k=0}^{q-m}b_{k+m}b_k, m=0,1,..,q\\ 0, m\geq q+1\end{cases}}$$

<MA(q)模型和传统自相关法谱估计等价>

$$S_{xx}(z)=\sigma^2B(z)B(z^{-1})=\sigma^2D(z)$$

$$D(z)=B(z)B(z^{-1})=\sum_{m=-q}^{m=q}d_mz^{-m}$$

$$d_m=\sum_{k=0}^{q-|m|}b_{k+m}b_k, |m|\leq q$$

$$S_{xx}(z)=\sum_{m=-q}^{m=q}\underbrace{[\sigma^2\sum_{k=0}^{q-|m|}b_{k+m}b_k]}_{R_{xx}(m)}z^{-m}$$

结论：

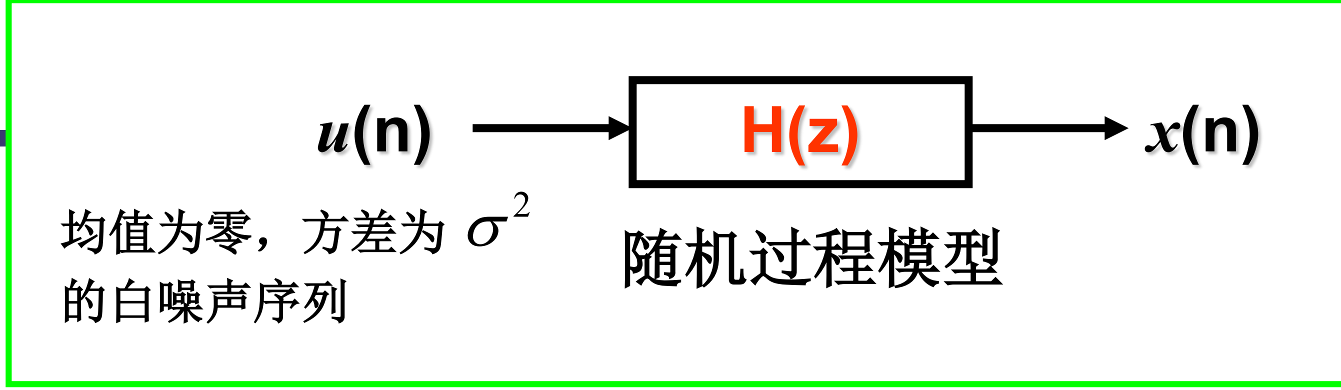
1）MA模型法不需要估计模型参数，而只要根据已给数据估计出**|m|≤q**时的自相关函数值即可得到功率谱估计。

2）MA模型法实际上就是自相关法谱估计，也与周期图法谱估计是等效的。只是符合**MA(q)**模型的随机时间序列本身只有**k**小于等于**q**的***R*(k)**才不为**0**，因此只要估计出**k**小于等于**q**时的***R*(k)**，就能得到精确的谱估计结果。

$$\boxed{R_{xx}(m)=\begin{cases}\sigma^2\sum_{k=0}^{q-m}b_{k+m}b_k, m=0,1,..,q\\ 0, m\geq q+1\end{cases}}$$

模型阶数q的选择：

利用m大于q时*R*(m)等于0来选择模型阶数。



二 ARMA模型谱估计

- 求解目标：
  - 模型阶数p和q；
  - 模型参数a_k，k=1, 2 … p、 b_k，k=1, 2 … q；
  - 白噪声的方差σ^2。
- 求解方法：
  - 假定模型阶数p和q。
  - 模型阶数已知时对模型两边同求某种统计特征以将随机变量转化为确定性的量。
  - 对各种阶数下的模型进行比较应用某种准则选出最好的模型。

$$R_{xx}(m)=\begin{cases}-\sum_{k=1}^{p}a_kR_{xx}(m-k)+\sigma^2\sum_{k=0}^{q-m}b_{k+m}h(k), m=0,1,..,q,(1)\\ -\sum_{k=1}^{p}a_kR_{xx}(m-k), \qquad m\ge q+1,(2)\end{cases}$$

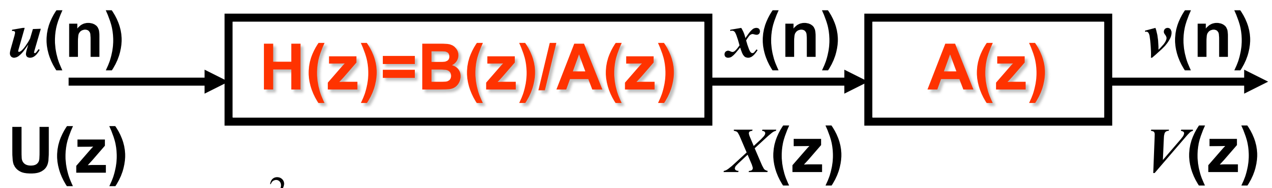
若已知R_{xx}(m),q+1<=m<=q+p:

1)由（2）式求模型参数a_k，k=1, 2 ... p;

2）求得a_k后，再由（1）式求b_k，k=1, 2 … q→解非线性方程

问题：解非线性方程计算量大

一种解决方法：求得a_k后，用**A(z)**对x**(n)**进行滤波，得到**MA(q)**信号**v(n)**



均值为零，方差为 σ^2 的白噪声序列

随机过程模型

$$v(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k x(n-k) \ , \qquad n = 0,\ 1 \ \cdots \ N-1$$

$$\hat{S}_{vv}(z) = \sum_{m=-q}^{q} \hat{R}_{vv}(m) z^{-m}$$

$$\hat{S}_{vv}(z) = A(z)A(z^{-1})\hat{S}_{xx}(z) \quad \Rightarrow \quad \hat{S}_{xx}(z) = \frac{\hat{S}_{vv}(z)}{A(z)A(z^{-1})}$$

问题：当p+q相对于采样时间长度N较大时，估计R_{xx}(m), [q+1<=m<=q+p]不准确→对模型参数a_k的估计不准确。

改进方法：最小二乘法

$$\hat{R}_{xx}(m) = -\sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k \hat{R}_{xx}(m-k) \quad, m = q+1,\ q+2\ \cdots\ M < N, M-q > p$$

$$\varepsilon = \sum_{n=q+1}^{M} e^2(n) = \sum_{n=q+1}^{M} [\hat{R}_{xx}(n) + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k \hat{R}_{xx}(n-k)\ ]^2 = \min$$

$$\Rightarrow \hat{a}_k, k = 1, \ldots, p$$

最小二乘方修正Yule-Walker 方法

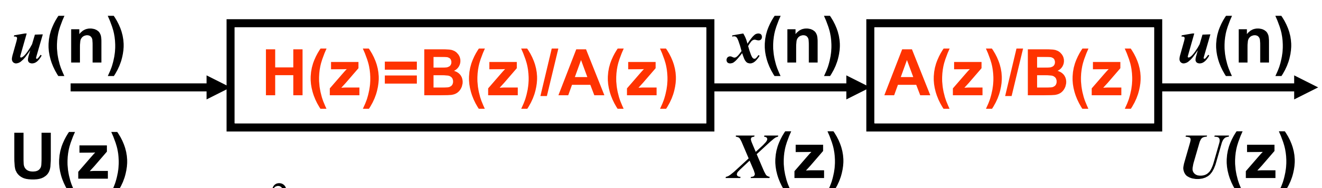
- 模型阶数p和q的选择：
  - **Akaike信息准则（AIC）：**

$$AIC(p,\ q) = N\ln\hat{\sigma}^2_{p,q} + 2(p+q)$$

  - 用逆滤波器*A*(z)/*B*(z)对*X*(z)进行处理，判断输出信号*U*(z)与白噪声的符合程度来选择模型阶数。

$$Q = \sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\hat{R}_u(k)}{\hat{R}_u(0)}\right)^2$$

其中：M为某一常数，具体的值可以根据逆滤波器*A*(z)/*B*(z)冲激响应的有效长度来选择。



均值为零，方差为 σ^2 的白噪声序列

随机过程模型