
第五章 现代谱估计

5.1 引言

信号 { 确定性信号 周期信号 非周期信号
非确定信号 随机信号

确定信号的谱：付立叶变换

随机信号：付立叶变换不存在---》功率谱密度/功率谱

功率谱估计

估计

观察到有限个信号样本

应用：语音信号分析，雷达信号处理，机械振动信号分析等

5.2 离散随机信号及其数字特征

一 离散随机信号的分类

随机信号：概率密度函数

统计特征参数[均值，方差，相关函数，协方差函数，高阶矩等]

平稳随机信号 (**Stationary**):

1) 弱平稳 (广义平稳, **wide sense stationary**)

一阶和二阶矩与时间无关

各态历经 (**ergodicity**): 时间均值等于统计均值

2) 强平稳 (严格平稳)

限于讨论各态历经随机信号

二 离散随机信号的数字特征

设: $x(n)=0, n<0$;-----因果实的离散随机信号

1. 平均 各态历经条件下, 统计平均等于时间平均

$$\text{均值: } m_x(n) = m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = E[x(n)]$$

$$\text{方差: } \sigma_x^2(n) = \sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - m_x]^2 = E[(x(n) - m_x)^2]$$

$$\text{均方值: } m_{x^2}(n) = m_{x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = E[x^2(n)]$$

2 相关函数和协方差函数

a) 相关函数

离散确定性信号

$$x_3(n) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x_1(m)x_2(n+m) \quad \begin{cases} x_1 = x_2 & \text{自相关} \\ x_1 \neq x_2 & \text{互相关} \end{cases}$$

离散随机信号

$$\text{自相关} \quad R_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n)x(n+m) = E[x(n)x(n+m)]$$
$$R_x(m) = R_x(-m) \quad R_x(\infty) = m_x^2$$

若 $x(n)$ 是复数

$$R_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n)x^*(n+m) = E[x(n)x^*(n+m)]$$

互相关
$$R_{xy}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n)y(n+m) = E[x(n)y(n+m)]$$

$$R_{xy}(m) = R_{yx}(-m); R_x(0)R_y(0) \geq |R_{xy}(m)|^2$$

自协方差
$$C_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} [x(n) - m_x][x(n+m) - m_x]$$

$$= E[(x(n) - m_x)(x(n+m) - m_x)]$$

$$= R_x(m) - m_x^2$$

$$C_x(0) = \sigma_x^2$$

$$m_x = 0 \Rightarrow C_x(m) = R_x(m), R_x(0) = C_x(0) = \sigma_x^2$$

互协方差
$$C_{xy}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} [x(n) - m_x][y(n+m) - m_y]$$

$$= E\{[x(n) - m_x][y(n+m) - m_y]\}$$

$$C_{xy}(m) = R_{xy}(m) - m_x m_y$$

5.3 功率谱估计概述

一 功率谱密度定义

1 定义 $x(n)$

$$(1) \begin{cases} S_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} R_x(m) e^{-j\omega m} \\ R_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega \end{cases}$$

维纳—辛钦公式

由于 $R_x(\infty) = m_x^2$, 所以若 $m_x \neq 0$, $S_x(e^{j\omega})$ 不一定收敛.

故一般地假设 $m_x = 0$ [若 $m_x \neq 0$, 可通过对 $x(n)$ 去均值处理]

物理意义: $R_x(m)$ 随着 m 越快衰减, 说明该时间序列随时间变化越剧烈; 反之则说明该时间序列随时间变化越平缓。故 $R_x(m)$ 中包含了各种频率成分的功率信息。

$$\begin{aligned}(2) \quad S_x(e^{j\omega}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^{n=N} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \right\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} R_x(m) e^{-j\omega m}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=-N}^{n=N} \sum_{m=-N}^{m=N} f(n-m) = \sum_{k=-2N}^{k=2N} [2N+1-|k|]f(k)$$

$$\begin{aligned} S_x(e^{j\omega}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^{n=N} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=N} \sum_{m=-N}^{m=N} x(n) e^{-j\omega n} x(m) e^{j\omega m} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=N} \sum_{m=-N}^{m=N} R(n-m) e^{-j\omega(n-m)} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-2N}^{k=2N} [2N+1-|k|] R(k) e^{-j\omega k} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=-2N}^{k=2N} \left[1 - \frac{|k|}{2N+1} \right] R(k) e^{-j\omega k} \right\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} R_x(m) e^{-j\omega m} \end{aligned}$$

2.功率谱密度的性质

$$\begin{cases} S_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} R_x(m)e^{-j\omega m} \\ R_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega \end{cases}$$

功率谱密度的性质：

- $S_x(e^{j\omega})$ 为实的偶函数。
- $S_x(e^{j\omega}) \geq 0$ 。（由定义2）
- 随机序列的平均功率：

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}) d\omega$$

- 随机序列 $\omega_1 > 0$ 到 $\omega_2 > 0$ 之间的平均功率为：

$$2 * \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_x(e^{j\omega}) d\omega$$

3. 平稳白噪声序列功率谱密度

- 平稳白噪声序列：

- 定义：平稳随机时间序列 $x(n)$ 不同时刻的随机变量两两不相关。
- 数字特征：
 - 均值： $E\{x(n)\}=0$ 。
 - 自相关函数： $R_x(m) = \sigma^2\delta(m)$ 。
 - 功率谱密度： $S_x(e^{j\omega}) = \sigma^2$ 。

二 功率谱估计问题及谱估计方法

1 谱估计问题 $x(n)$

给定一个随机过程的一个实现中的有限长度数据

$$x(0), x(1), \dots, x(N-1)$$

来估计: $S_x(e^{j\omega})$

2 谱估计方法

非参数法谱估计

周期图法, 自相关法

平滑周期图法

最小方差法

参数法谱估计

时间序列模型

最大熵谱估计法

线性谱分析法 (经典谱估计)

非线性谱分析法 (现代谱估计)

三 统计估计基础回顾

估计量仍是一个随机变量

$$\hat{a} = F(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

1) 无偏估计

估计偏量（偏差） $B(\hat{a}) = a - E[\hat{a}]$

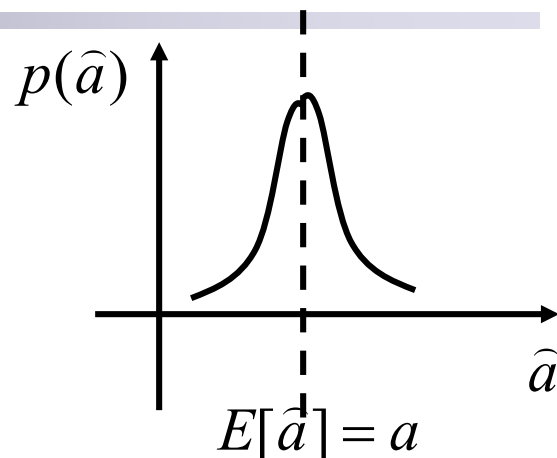
若 $B(\hat{a}) = 0$, 则称无偏估计

若 $\lim_{N \rightarrow \infty} B(\hat{a}) = 0$, 则称 $\hat{a}$ 是真值 a 的渐进无偏估计

例: $x(n) = m_x + e(n), E[e(n)] = 0$

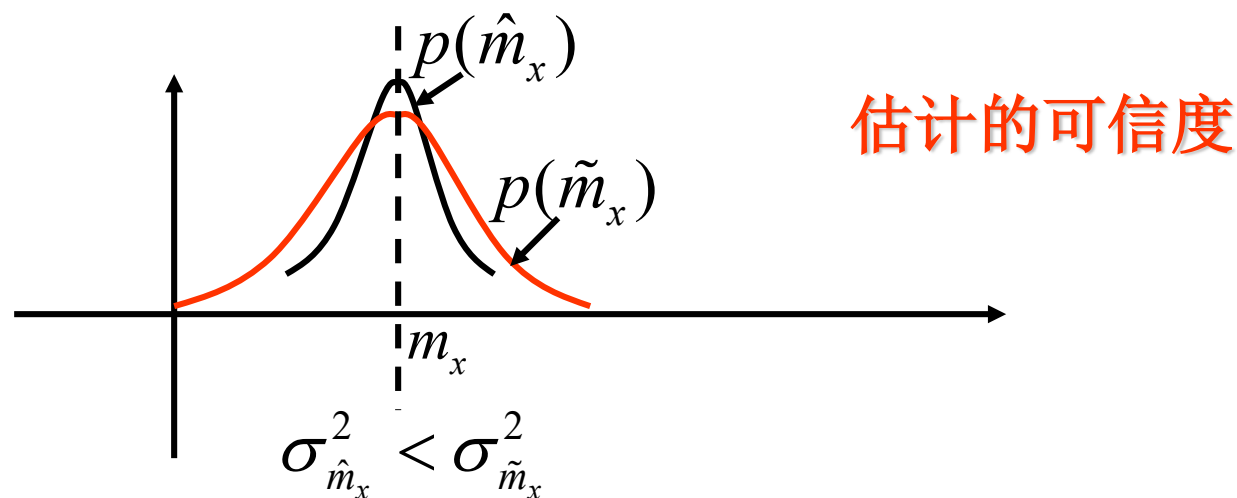
$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$E[\hat{m}_x] = m_x$, 即 $\hat{m}_x$ 是 m_x 的无偏估计



2) 最小方差估计 (有效估计)

$$\text{Var}[\hat{a}] = E\{[(\hat{a} - E(\hat{a}))]^2\} = \sigma_{\hat{a}}^2 \Rightarrow \min$$



3) 一致估计

$$MSE[\hat{a}] = E\{[\hat{a} - a]^2\} = \sigma_{\hat{a}}^2 + B^2 \Rightarrow \min \quad (\text{均方误差最小})$$

若 $MSE[\hat{a}] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, 则 $\hat{a}$ 是 a 的渐进一致估计

4) 偏量与方差的折衷

$\hat{m}_x$: 无偏, $E[\hat{m}_x] = m_x$

令: $\tilde{m}_x = a\hat{m}_x$

则: $B[\tilde{m}_x] = (1-a)m_x$

$Var[\tilde{m}_x] = a^2 Var[\hat{m}_x]$


$$\begin{aligned} B(\tilde{m}_x) &= m_x - E[\tilde{m}_x] \\ &= m_x - E[a\hat{m}_x] \\ &= m_x - am_x \\ &= (1-a)m_x \end{aligned}$$

5.4 自相关函数的估计

$x(n) : x(0), x(1), \dots, x(N-1) \rightarrow R_x(m) : \hat{R}_x(m)$, 设 $E[x(n)] = 0$

一 窗估计法

方法1:
$$R_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+|m|), |m| \leq N-1$$

方法2:
$$R'_N(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+|m|), |m| \leq N-1$$

$$E[R'_N(m)] = R_x(m)$$

无偏估计

$$R_N(m) = \frac{N-|m|}{N} R'_N(m)$$

$$E[R_N(m)] = \frac{N-|m|}{N} R_x(m) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E[R_N(m)] = R_x(m)$$

渐进无偏

$$\text{Var}[R_N(m)] = \left(\frac{N-|m|}{N}\right)^2 \text{Var}[R'_N(m)] \leq \text{Var}[R'_N(m)]$$

二 自相关函数的Rader算法

1.问题

$$\begin{cases} R_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m), 0 \leq m \leq N-1 \\ R_N(m) = R_N(-m), m=-1, -2, \dots, -N+1 \end{cases}$$

线性相关可由圆周相关计算，此时圆周相关的周期 **$L \geq 2N+1$**

$$\begin{aligned} R_N(m) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{L-1} x(l)x((l+m))_L \\ &= \frac{1}{N} IFFT[X(k)X^*(k)], 0 \leq m \leq N-1 \end{aligned}$$

一般地， $|m| \leq M \ll N$ ，因此利用上述方法计算量较大

2.Rader法 2: 1分段

$$R_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m), 0 \leq m \leq N-1$$

$$v_i(n) = \begin{cases} x(n + (i-1)M), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & M \leq n \leq 2M-1 \end{cases}$$

$$u_i(n) = \begin{cases} x(n + (i-1)M), & 0 \leq n \leq 2M-1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, K \geq N/M$$

$$R_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K \sum_{n=0}^{M-1} v_i(n)u_i(n+m)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K \text{IFFT}[V_i(k)U_i^*(k)]$$

$$V_i(k) = \text{FFT}_{2M}[v_i(n)]$$

$$U_i(k) = \text{FFT}_{2M}[u_i(n)]$$

$$= \frac{1}{N} \text{IFFT}\left[\sum_{i=1}^K V_i(k)U_i^*(k)\right]$$

$$\because u_i(n) = v_i(n) + v_{i+1}(n+M) \quad i = 1, 2, \dots, K-1$$

$$\therefore U_i(k) = V_i(k) + e^{j\frac{2\pi}{2M}Mk} V_{i+1}(k) = V_i(k) + (-1)^k V_{i+1}(k)$$

$$\text{而 } U_K(k) = V_K(k)$$

Rader算法步骤

$$1. V_i(k), i=1, 2, \dots, K, K=[N/M], V_i(k) = FFT_{2M}[v_i(n)]$$

$$\text{乘法: } \frac{N}{M} \bullet \frac{2M}{2} \log_2(2M) = N \log_2(2M)$$

$$2. U_i(k) = V_i(k) + (-1)^k V_{i+1}(k); i=1, 2, \dots, K-1;$$

$$U_K(k) = V_K(k)$$

$$3. X_i(k) = V_i(k) U_i^*(k); i=1, 2, \dots, K; \quad 4. X(k) = \sum_{i=1}^K X_i(k);$$

$$\text{乘法: } \frac{N}{M} \bullet 2M = 2N$$

$$5. R_N(m) = \frac{1}{N} IFFT[X(k)], 0 \leq m \leq M-1$$

$$\text{乘法: } \frac{2M}{2} \bullet \log_2(2M) = M \log_2(2M)$$

$$\text{总计算量: } (N+M) \log_2(2M) + 2N$$

5.5 传统功率谱估计 (非参数谱估计)

一 间接法（BT法，自相关法）

间接法I $\hat{S}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-M}^M R_N(m) e^{-j\omega m}, M \leq N-1$ 渐进无偏

间接法II $\hat{S}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-M}^M R'_N(m) e^{-j\omega m}, M \leq N-1$ 渐进无偏

二 直接法（周期图法）

$$x(n), n = 0, 1, \dots, N-1 \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

定义: $I_N(\omega) = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega})|^2 \Leftarrow$ 周期图

则令: $\hat{S}(e^{j\omega}) = I_N(\omega)$

$$S_x(e^{j\omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^{n=N} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \right\}$$

< 直接法和间接法间的关系 >

$$\begin{aligned} I_N(\omega) &= \frac{1}{N} \left| X(e^{j\omega}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\omega k} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\omega n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(k) x(n) e^{-j\omega(k-n)} \end{aligned}$$

令 $m = k - n, k = n + m$

$$\begin{aligned} I_N(\omega) &= \frac{1}{N} \left| X(e^{j\omega}) \right|^2 \\ &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n) x(n+m) e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_N(m) e^{-j\omega m} \end{aligned}$$

$\therefore I_N(\omega)$ 是间接法 I 当 $M = N - 1$ 时的功率谱估计

三 直接法和间接法估计质量

<均值>

间接法I(M=N-1)

$$E[\hat{S}(e^{j\omega})] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E[R_N(m)]e^{-j\omega m} = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} R_x(m)e^{-j\omega m}$$

直接法

$$E[\hat{S}(e^{j\omega})] = E[I_N(\omega)] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R_x(m)e^{-j\omega m}$$

定义

$$w_B(m) = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{N}, & |m| < N \\ 0, & \text{others} \end{cases} \Rightarrow W_B^N(\omega) = \frac{\sin^2 \frac{N}{2} \omega}{N \sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

间接法I(M=N-1)和直接法的均值可统一表示为:

$$E[\hat{S}(e^{j\omega})] = S(e^{j\omega}) * W_B^N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta}) W_B^N(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

间接法II

$$\begin{aligned} E[\hat{S}(e^{j\omega})] &= \sum_{m=-M}^M E[R'_N(m)]e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{m=-M}^M R_x(m)e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_R(m)R_x(m)e^{-j\omega m} \\ &= W_R(\omega) * S_x(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

$$\text{其中: } w_R(n) = \begin{cases} 1, |n| \leq M, M \leq N-1 \\ 0, \text{others} \end{cases}, W_R(\omega) = \frac{\sin[\omega(2M-1)/2]}{\sin[\omega/2]}$$

<方差>

表达式较为复杂，当 $x(n)$ 是高斯随机过程时：

$$\text{Var}[\hat{S}(e^{j\omega})] \approx S_x^2(e^{j\omega}) \left\{ 1 + \frac{\sin^2[\omega N]}{[N \sin \omega]^2} \right\}$$

四 传统功率谱估计的改进

1. 平均周期图法

K个独立同分布随机变量的平均值的方差为单独一个变量方差的**1/K**

$x(n), n = 0, 1, \dots, N-1 \Rightarrow$ 分成 K 段, 每段 M 个取样, $N=KM$

$$x^i(n) = x(n + iM - M), 0 \leq n \leq M-1, 1 \leq i \leq K$$

$$I_M^i(\omega) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x^i(n) e^{-j\omega n} \right|^2, 1 \leq i \leq K$$

$$\text{定义: } B_x(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K I_M^i(\omega)$$

$$\text{则: } E[B_x(\omega)] = E[I_M^i(\omega)] = S_x(e^{j\omega}) * W_B^M(e^{j\omega})$$

$$\text{而: } \text{Var}[B_x(\omega)] = \frac{1}{K} \text{Var}[I_M^i(\omega)] \approx \frac{1}{K} S_x^2(e^{j\omega}) \left\{ 1 + \frac{\sin^2[\omega M]}{[M \sin \omega]^2} \right\}$$

→有偏渐近一致估计

2.平滑周期图法（BT谱估计的改进）

$$BT: \hat{S}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-M}^M R_N(m) e^{-j\omega m}, M \leq N-1$$

$$= \sum_{m=-(N-1)}^{M=N-1} R_N(m) e^{-j\omega m}$$

m 大 $\rightarrow$ 估计 $R_N(m)$ 所用数据少 $\rightarrow$ 估计 $R_N(m)$ 不可靠, 方差大
 $\rightarrow \hat{S}(e^{j\omega})$ 的方差大 $\Rightarrow$ 减少 m 大的 $R_N(m)$ 对 $\hat{S}(e^{j\omega})$ 的贡献 $\Rightarrow$ 对 $R_N(m)$ 加权

$$\hat{S}_{BT}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w(m) R_N(m) e^{-j\omega m}$$

$$w(m) \Leftrightarrow W(e^{j\omega}), R_N(m) \Leftrightarrow \hat{S}(e^{j\omega}) = I_N(\omega)$$

$$\hat{S}_{BT}(e^{j\omega}) = I_N(\omega) * W(e^{j\omega})$$

- $0 \leq w(m) \leq w(0) = 1$
- $w(-m) = w(m)$
- $w(m) = 0, |m| > M, M \leq N-1$

$$\begin{aligned}
E[\hat{S}_{BT}(e^{j\omega})] &= E[I_N(\omega) * W(e^{j\omega})] \\
&= E[I_N(\omega)] * W(e^{j\omega}) \\
&= S_x(e^{j\omega}) * W_B^N(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \\
&\stackrel{M \ll N}{\approx} S_x(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \quad W(e^{j\omega}) \stackrel{M \rightarrow \infty}{\Rightarrow} \delta(\omega), \therefore \text{渐近无偏}
\end{aligned}$$

$$\text{而: } Var[\hat{S}_{BT}(\omega)] \approx S_x^2(e^{j\omega}) \frac{1}{N} \sum_{m=-(M-1)}^{(M-1)} w^2(m)$$

偏倚与方差之间存在矛盾，一般取**M=N/5**

3.修正周期图求平均法（Welch法）

加窗平滑+分段平均

$x(n), n = 0, 1, \dots, N-1 \Rightarrow$ 分成 K 段, 每段 M 个取样, $N=KM$

$$x^i(n) = x(n + iM - M), 0 \leq n \leq M-1, 1 \leq i \leq K$$

$$J_M^i(\omega) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x^i(n) w(n) e^{-j\omega n} \right|^2, 1 \leq i \leq K \quad U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$$

$$\text{定义: } \hat{S}_{avpd}(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K J_M^i(\omega)$$

$$\text{则: } E[\hat{S}_{avpd}(e^{j\omega})] = E[J_M^i(\omega)] = S_x(e^{j\omega}) * W_B^M(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

$$\text{Var}[\hat{S}_{avpd}(e^{j\omega})] \approx \frac{1}{K} S_x^2(e^{j\omega}) \quad W(e^{j\omega}) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(n) e^{-j\omega n} \right|^2$$

4.传统谱估计的主要问题

偏差和方差的折衷  分辨率和可靠性



- 人为地将观察到的数据以外的数据视为零

$$E[\hat{S}(e^{j\omega})] = S(e^{j\omega}) * W_B^N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta}) W_B^N(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

●经典谱估计方法的缺点：

$$\text{Var}[\hat{S}(e^{j\omega})] \approx S_x^2(e^{j\omega}) \left\{ 1 + \frac{\sin^2[\omega N]}{[N \sin \omega]^2} \right\}$$

- 有偏估计：经典谱估计方法无法进一步提高分辨率，存在较严重的旁瓣“泄漏”现象。
- 方差很大：估计的方差随着采样数目N的增大基本上不减小。
- 经典谱估计得到的功率谱密度不是一致性估计。
- 在采样数目N有限的条件下，经典谱估计方法无法较好地调和估计偏差和方差的矛盾。

●产生经典谱估计方法缺点的原因分析：

- 数据长度有限是造成分辨率低和旁瓣“泄漏”的根本原因。
- 经典谱估计都仅是对提供数据的“简单”利用，没有想办法挖掘并利用数据间内在的规律性。