
第四章 短时傅立叶分析

4.1 有关时频分析的概念

一 信号的时频分析

同时具有时间和频率分辨能力的信号分析方法

- 信号时频分析的重要性：
 - 时间和频率是描述信号的两个最重要的物理量。
 - 信号的时域和频域之间具有紧密的联系。
- 传统的傅立叶变换分析方法的缺点：
 - 傅立叶变换：

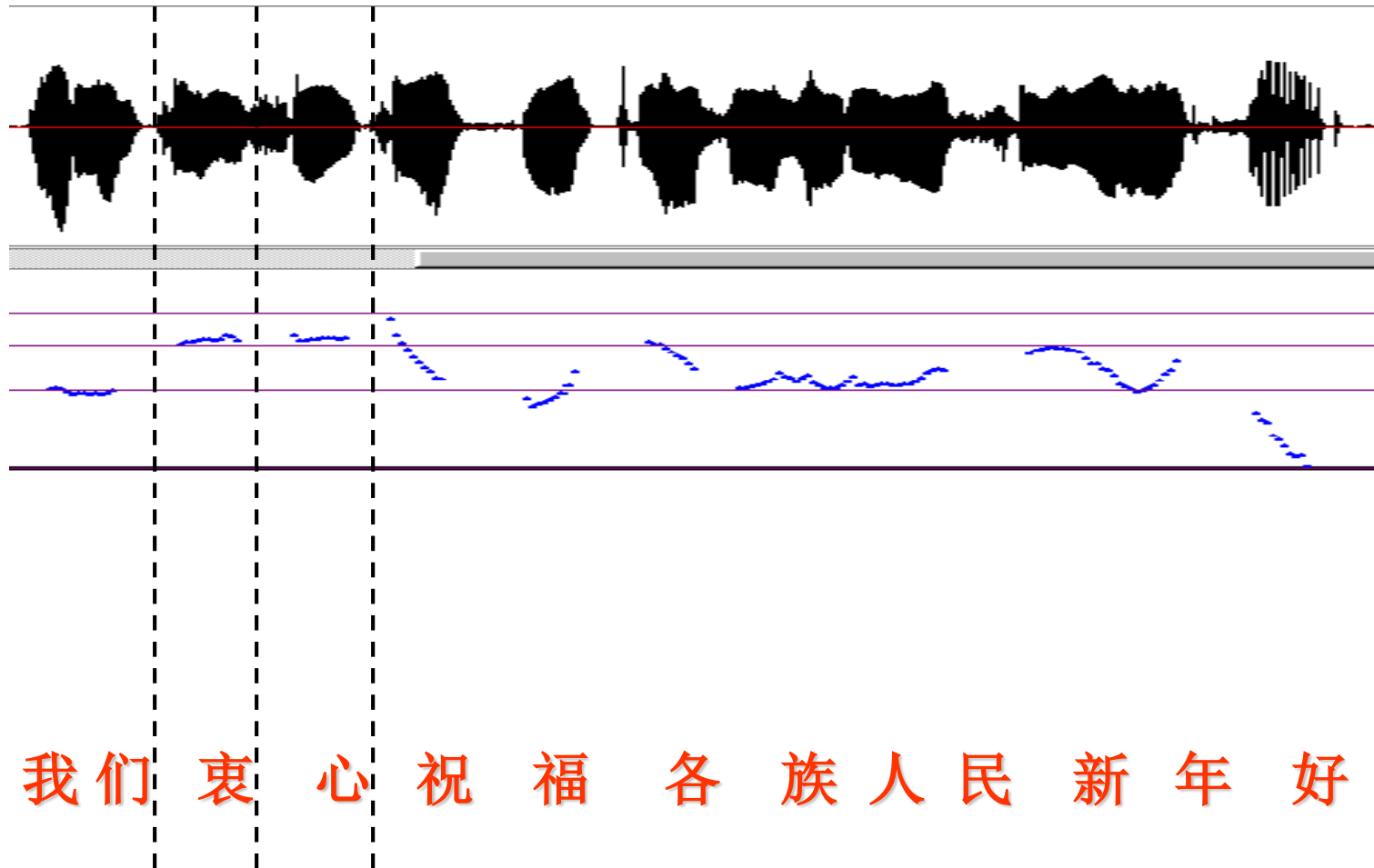
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

反映傅立叶变换缺点的例子：

- 例：语音识别



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

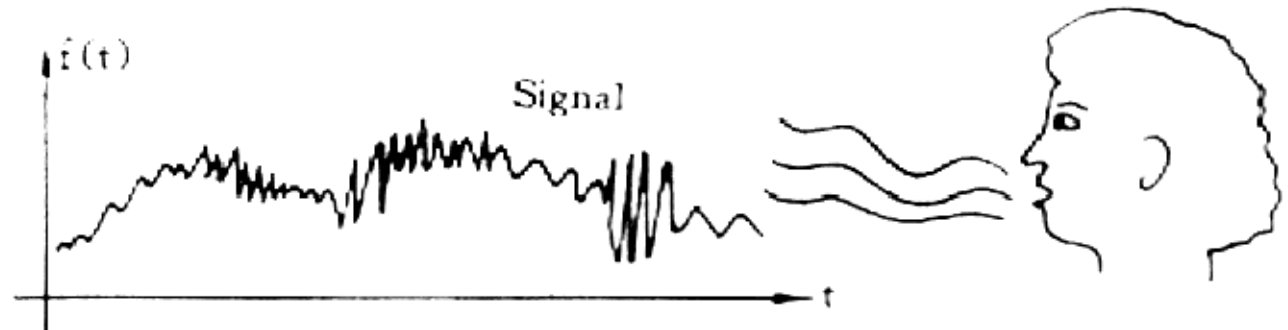
傅立叶变换的优缺点：

优点：

精确的频率分辨能力；

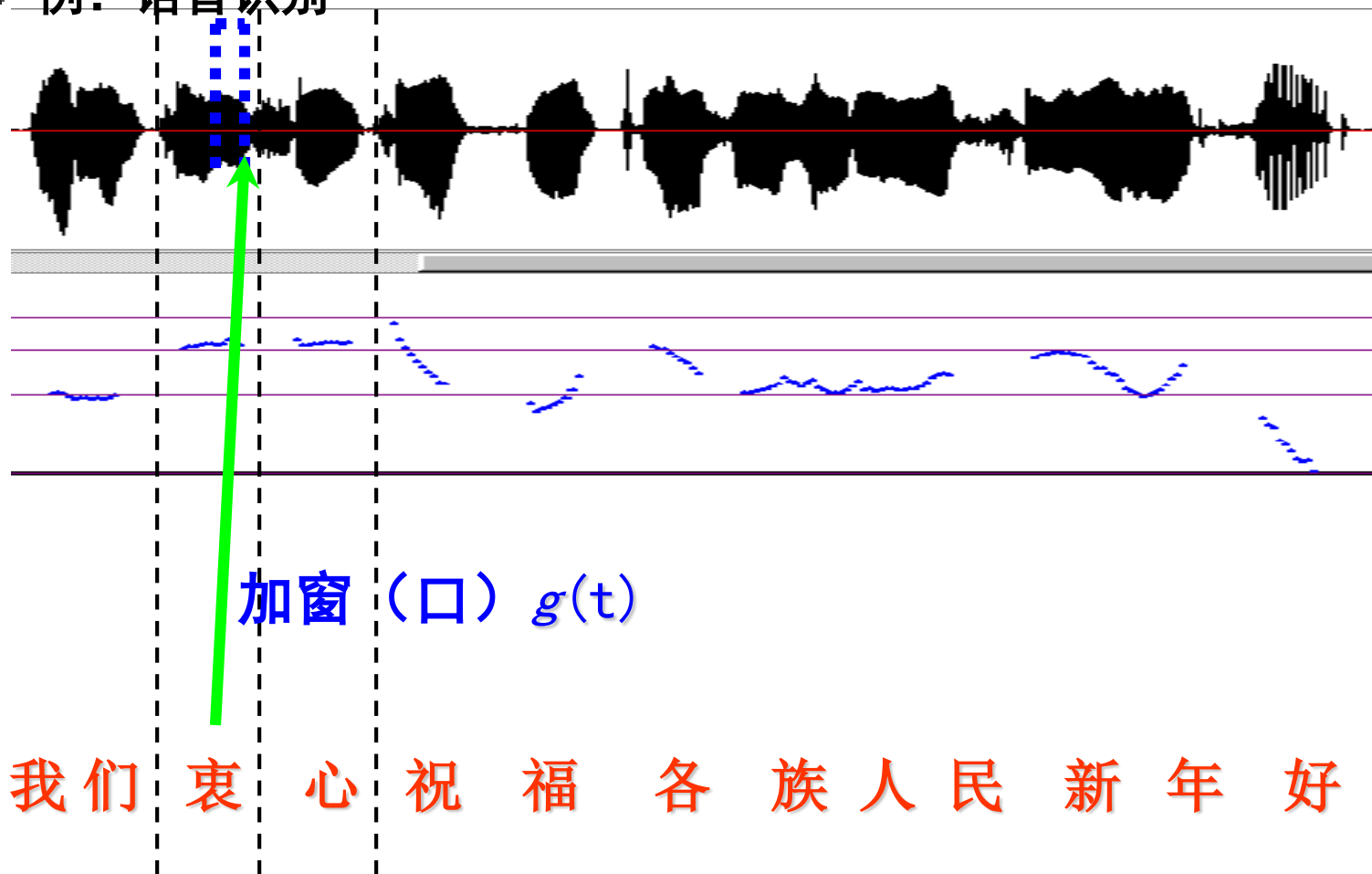
缺点：

- 用傅立叶变换提取信号的频谱需要利用信号的全部时域信息。
- 傅立叶变换没有反映出信号的非平稳的特性。事实上，非平稳信号的频率成分是随着时间变化的，而傅立叶变换不能反映信号的这种非平稳性质。如：傅立叶变换的积分作用平滑了非平稳信号的突变成分。



解决傅立叶变换缺点的方法：

● 例：语音识别



二 窗口傅立叶变换 (Gabor变换)

1) 进一步分析为什么傅立叶变换具有精确的频率分辨能力而没有时间分辨能力

$$\langle f(t), g(t) \rangle_{Parseval} = \frac{1}{2\pi} \langle F(\eta), G(\eta) \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t) dt \quad f(t) \Leftrightarrow F(\eta); g(t) \Leftrightarrow G(\eta)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F(\eta), G(\eta) \rangle$$

$$g(t) = e^{j\omega t}$$

$$G(\eta) = 2\pi\delta(\eta - \omega)$$

窗口(持续区间) 在时域无穷大 窗口(持续区间) 在频域无穷小

2) 窗口傅立叶变换的定义:

- 假设 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 则以 $g(t)$ 作为窗函数的窗口傅立叶变换定义为:

$$WF_g(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - b) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{令: } g_{\omega, b}(t) = g(t - b) e^{j\omega t}$$

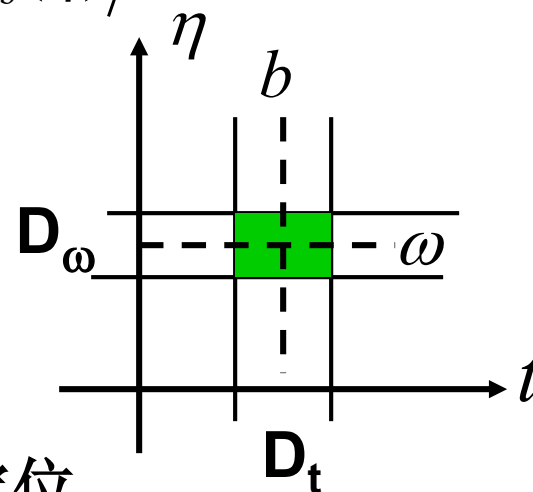
$$\begin{aligned} \text{则: } WF_g(\omega, b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_{\omega, b}^*(t) dt \\ &= \langle f(t), g_{\omega, b}(t) \rangle \end{aligned}$$

$$WF_g(\omega, b) = \langle f(t), g_{\omega, b}(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F(\eta), G_{\omega, b}(\eta) \rangle$$

3) 窗口傅立叶变换的物理意义

$$WF_g(\omega, b) = \langle f(t), g_{\omega, b}(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F(\eta), G_{\omega, b}(\eta) \rangle$$

●若 $g(t)$ 的有效窗口宽度为 $D_t \times D_\omega$ ，则 $WF_g(\omega, b)$ 给出的是 $f(t)$ 在时频窗口 $[b - D_t/2, b + D_t/2] \times [\omega - D_\omega/2, \omega + D_\omega/2]$ 内的时频信息



●有效窗口宽度 D_t 越小，对信号的时间定位能力越强

●有效窗口宽度 D_ω 越小，对信号的频率定位能力越强

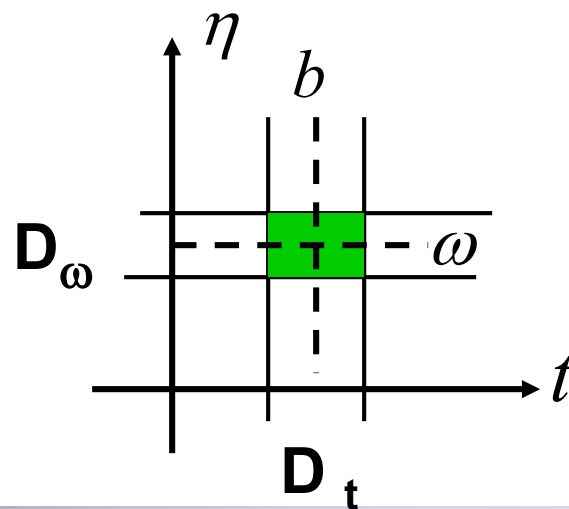
●由于 $D_t D_\omega \geq \frac{1}{2}$ (Heisenberg测不准原理)，窗口傅立叶变换对信号的时间定位和频率定位能力是矛盾的

4) 窗口傅立叶变换时频分辨能力的性能分析:

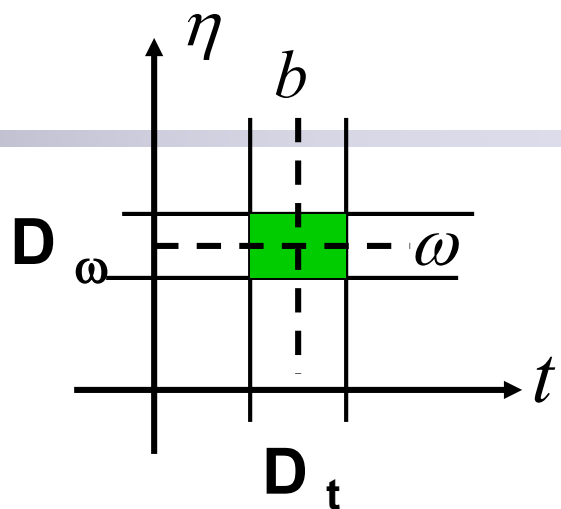
由于 $D_t D_\omega \geq \frac{1}{2}$ (**Heisenberg测不准原理**), 窗口傅立叶变换对信号的时间定位和频率定位能力是相互矛盾的:

窗口傅立叶变换的时间分辨率和频率分辨率不可能同时提高, 只能以一种分辨率的降低来换取另一种分辨率的提高; *以高斯函数作为窗函数相对来说综合效果最好。*

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$



5) 解决窗口傅立叶变换缺点的方法:



● 问题的提出:

- 窗口傅立叶变换窗口没有自适应性, 只适合分析所有特征尺度大致相同的信号, 不适于分析多尺度信号和突变过程。

● 解决方法:

- 引入窗口变化机制, 同时求各种窗口大小下的变换, 这样变换系数中就同时包含各种特征尺度下信号的信息。

$$F(a, b) = |a|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad \text{-----小波变换}$$

但小波变换物理意义不明确, 而窗口傅立叶变换有着较为明确的物理意义。

4.2 短时傅立叶分析

(STFT, Short Time Fourier Transform)

窗口付立叶变换我们又称为短时傅立叶分析

一 STFT定义

$\{x(n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ 的离散时间**STFT**定义为

$$X(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m)w(n-m)e^{-j\omega m} = X_n(e^{j\omega})$$

分析窗

$\{x(n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ 的离散**STFT**定义为

$$X(n, k) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m)w(n-m)e^{-j2\pi km/N} = X_n(e^{j2\pi k/N})$$

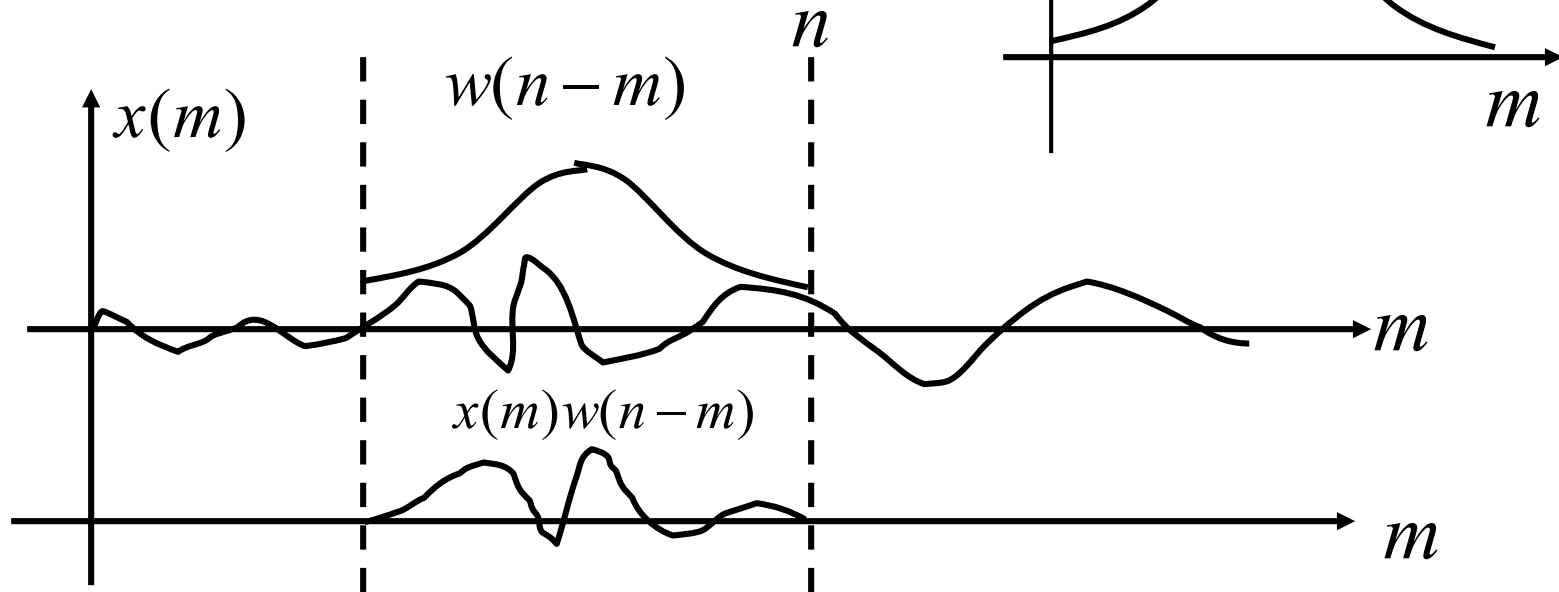
两种解释:

1) n 固定时,离散时间**FT** 或 **DFT** $\{x(m)w(n-m)\}_{m=-\infty}^{m=\infty}$

2) ω 或 k 固定时 $\rightarrow$ 滤波 $\{[x(n)e^{-j\omega n}] * [w(n)]\}$

1 傅立叶变换的解释

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} [x(m)w(n-m)]e^{-j\omega m}$$



$$X_n(e^{j\omega}) = \{ \text{FT}[x(m)w(n-m)] \}_{-\infty < n < \infty}$$

$$X_n(e^{j\omega}) = \{ \text{FT}[x(m)w(n-m)] \}_{-\infty < n < \infty}$$

$$X_n(e^{j\omega}) = F[x(m)] * F[w(n-m)]$$

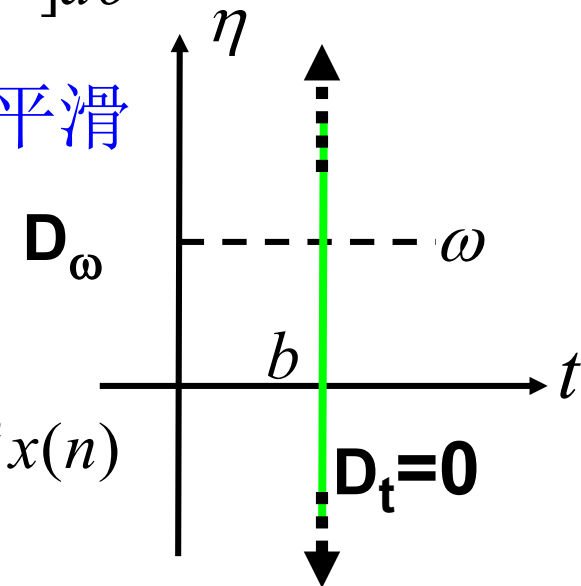
$$X_n(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [W(e^{-j\theta})e^{-j\theta n}] X[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta$$

在频域平滑

讨论:

$$1) w(n) = \delta(n) \Rightarrow W(e^{j\omega}) = 1$$

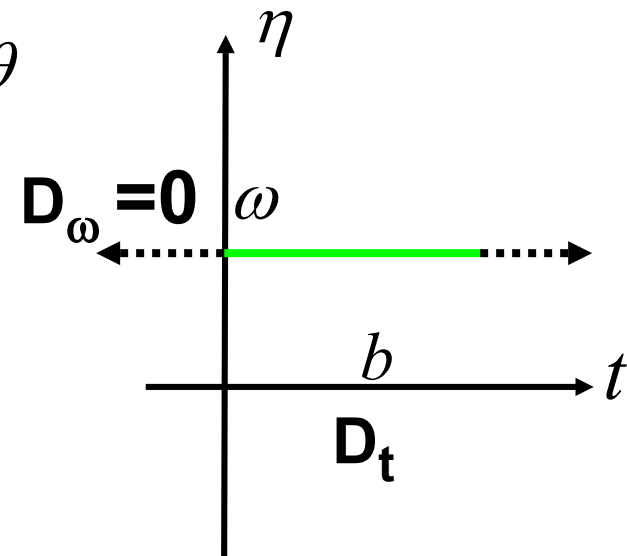
$$X_n(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X[e^{j(\omega-\theta)}] e^{-j\theta n} d\theta = e^{-j\omega n} x(n)$$



保留了信号的所有时间变化,但不提供任何频率分辨率

2) $w(n) = 1 \Rightarrow W(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$

$$\begin{aligned} X_n(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [W(e^{-j\theta}) e^{-j\theta n}] X[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [2\pi\delta(\theta) e^{-j\theta n}] X[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta) X[e^{j(\omega-\theta)}] e^{-j\theta n} d\theta \\ &= X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$



退化为傅立叶变换,不提供任何时间分辨率

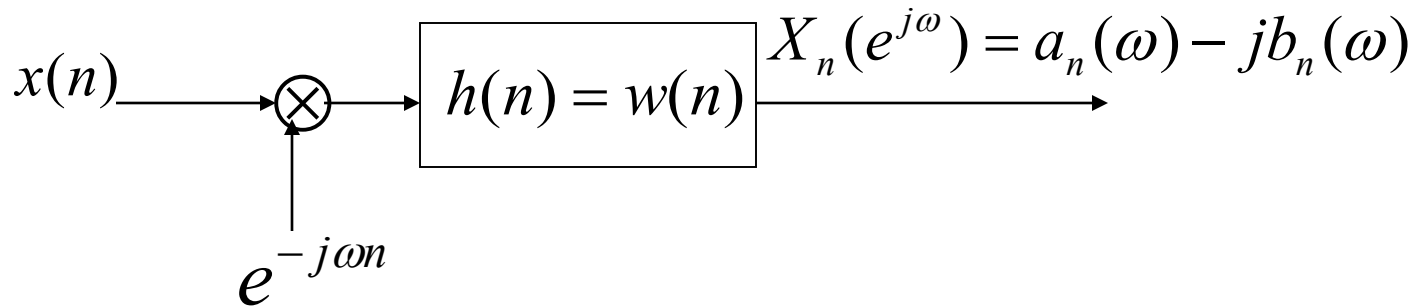
$$X(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m)w(n-m)e^{-j\omega m} = X_n(e^{j\omega})$$

2 滤波器的解释

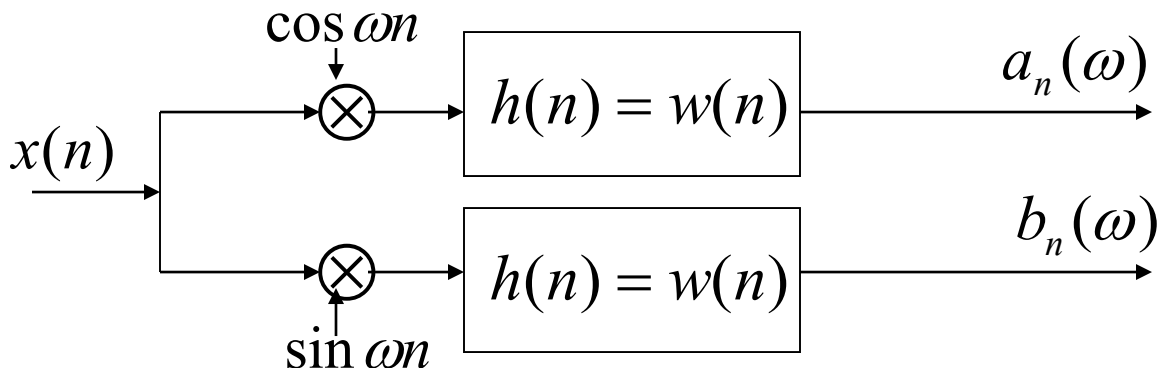
1) 第一种形式(低通)

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} [x(m)e^{-j\omega m}]w(n-m) = [x(n)e^{-j\omega n}] * w(n)$$

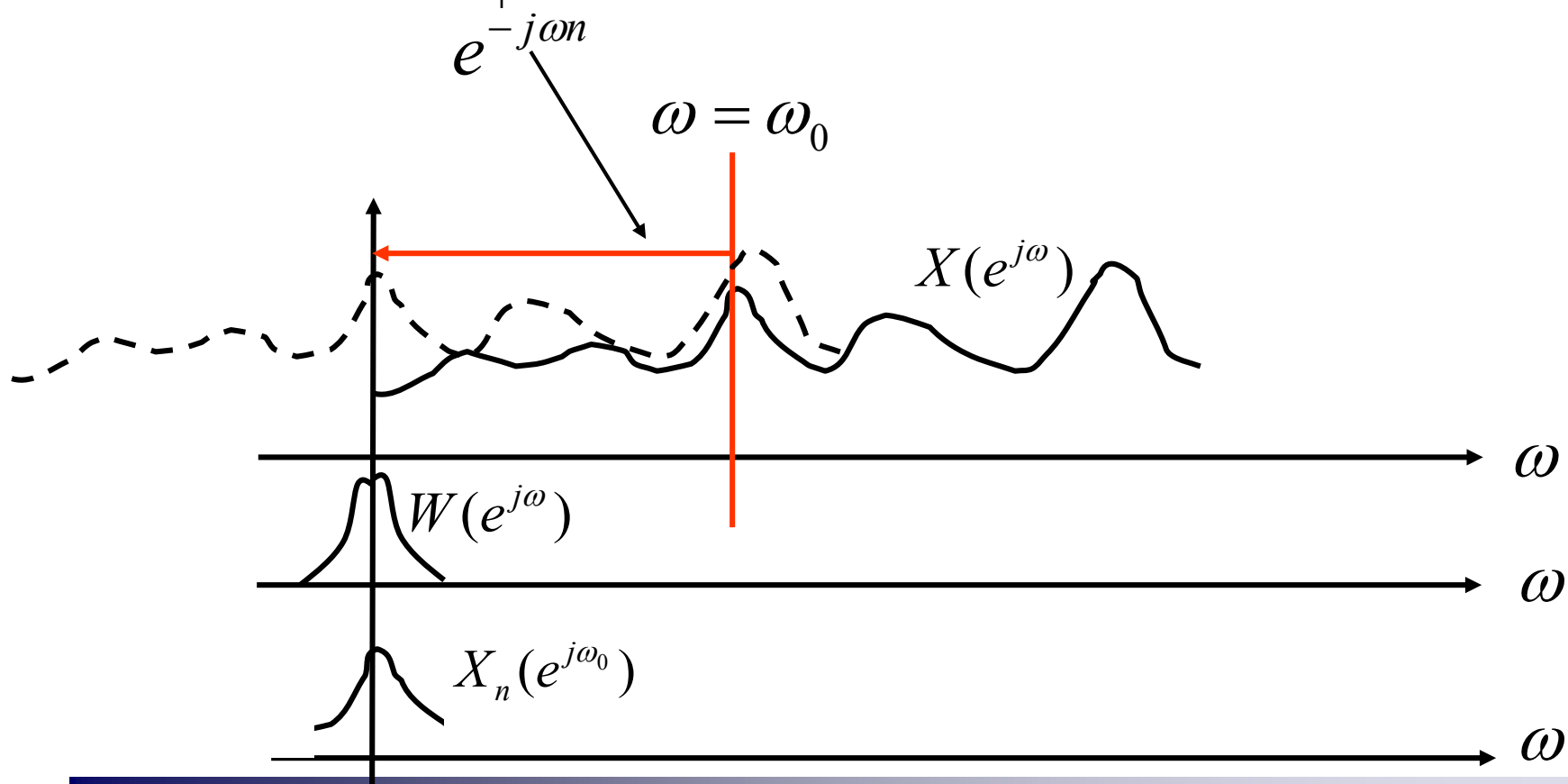
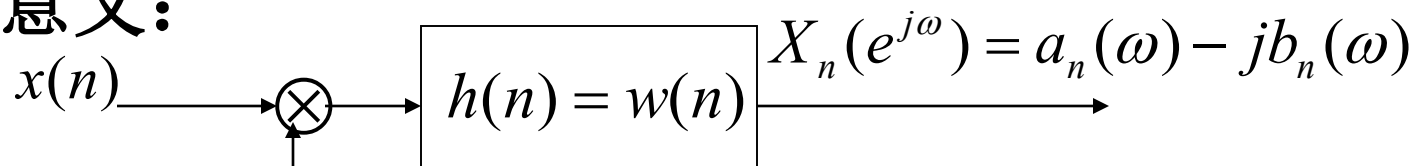
复数实现
形式



实数实现
形式



物理意义:



$$X(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m)w(n-m)e^{-j\omega m}$$

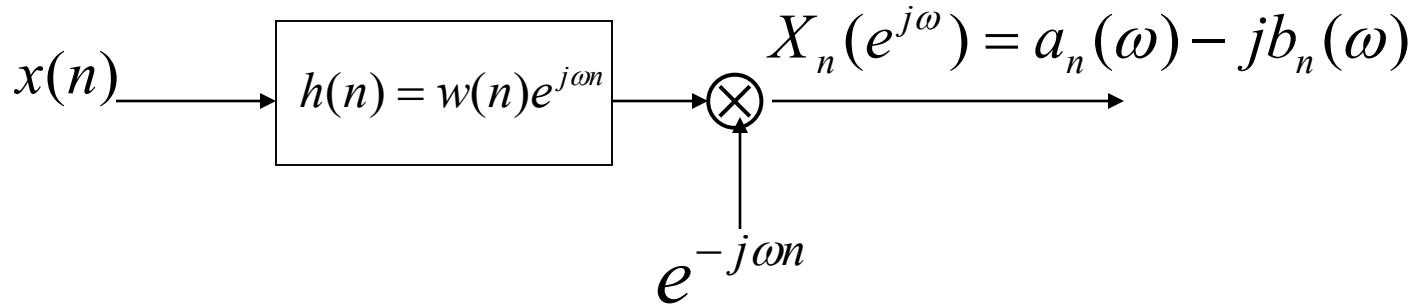
2) 第二种形式(带通)

$$n-m=m'; m' \rightarrow m$$

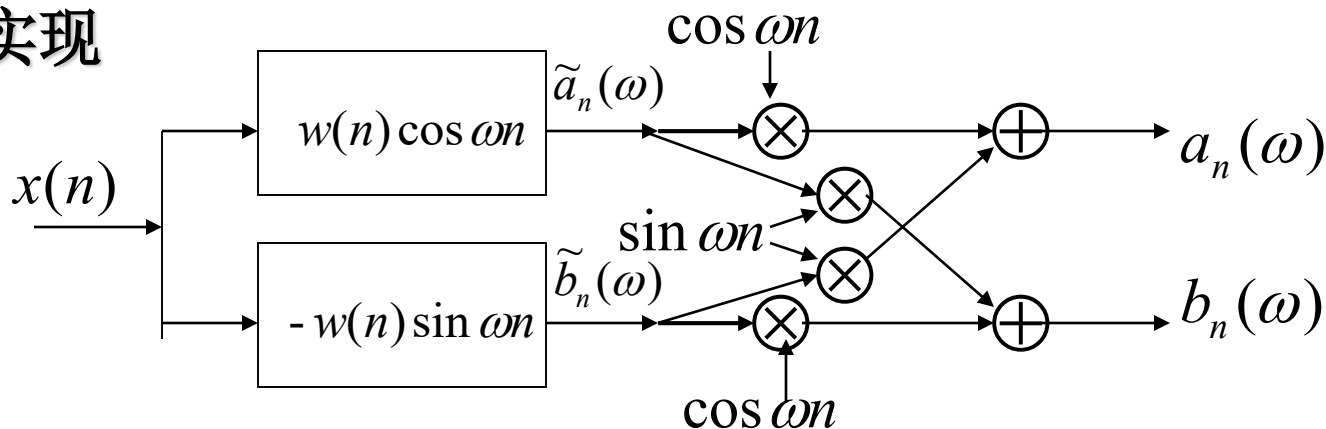
$$X_n(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} [x(n-m)] \times [w(m)e^{j\omega m}] \right] = e^{-j\omega n} \{ x(n) * [w(n)e^{j\omega n}] \}$$

$$\tilde{X}_n(e^{j\omega}) = \tilde{a}_n(\omega) - j\tilde{b}_n(\omega)$$

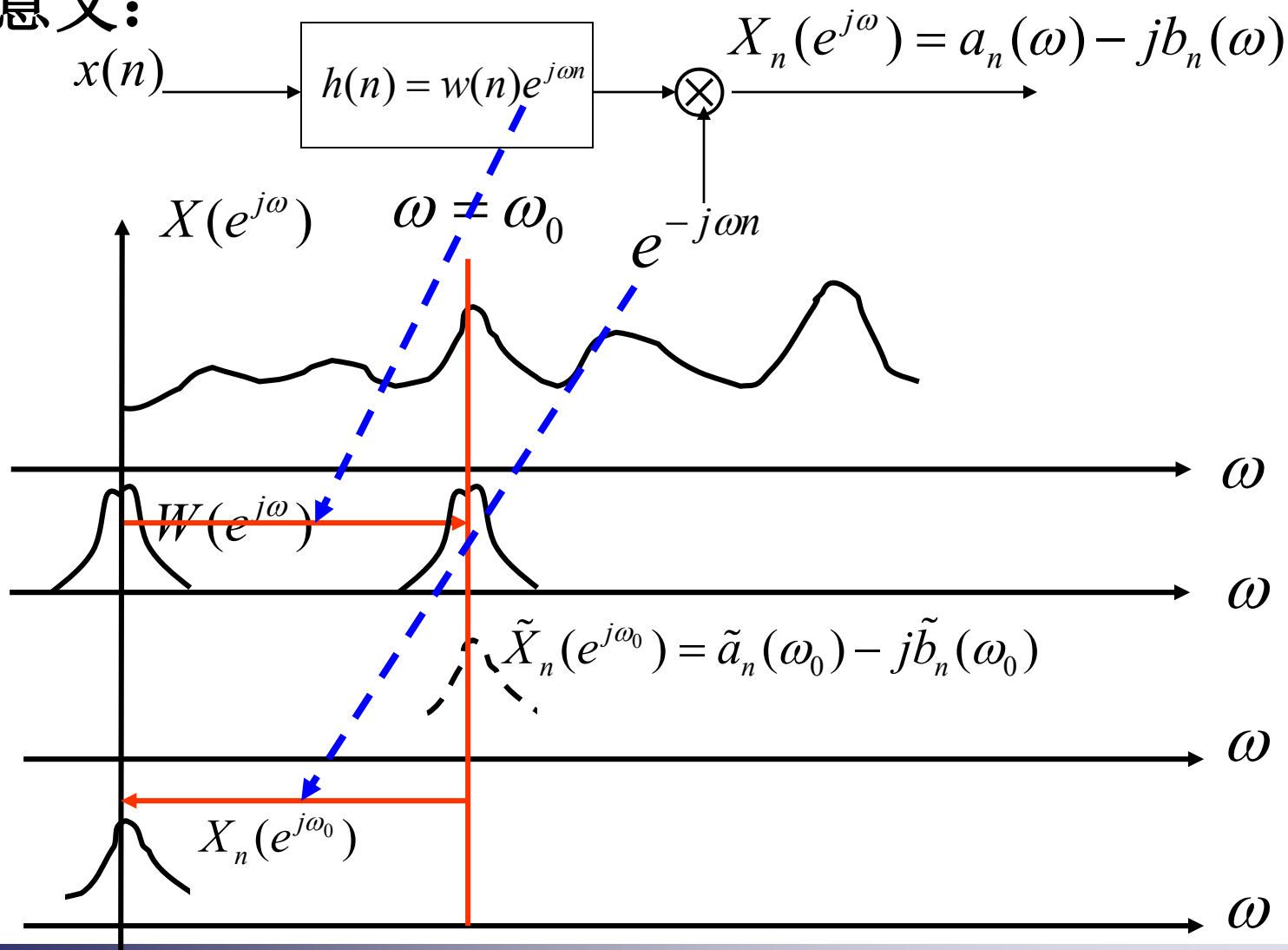
复数实现
形式



实数实现
形式



物理意义:



$$X_n(e^{j\omega}) = [x(n)e^{-j\omega n}] * w(n)$$

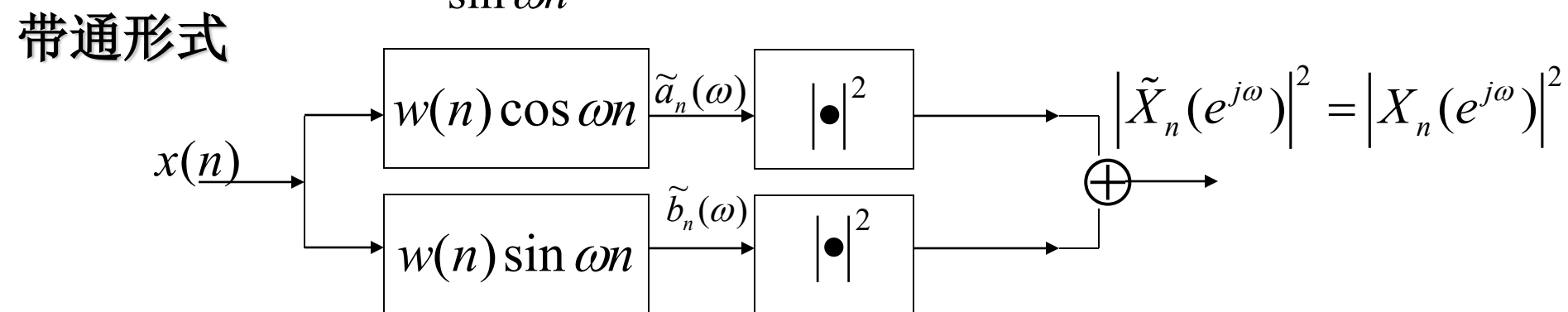
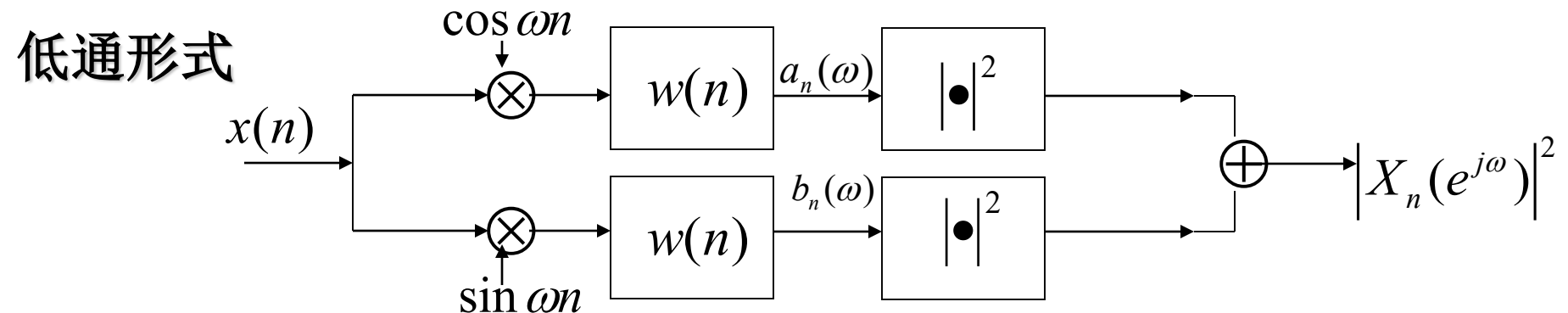
$$X_n(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n} \{x(n) * [w(n)e^{j\omega n}]\}$$

3) 二种形式的比较

若需求出复数结果, 低通形式简单些

若只需求出幅度谱, 带通形式简单些

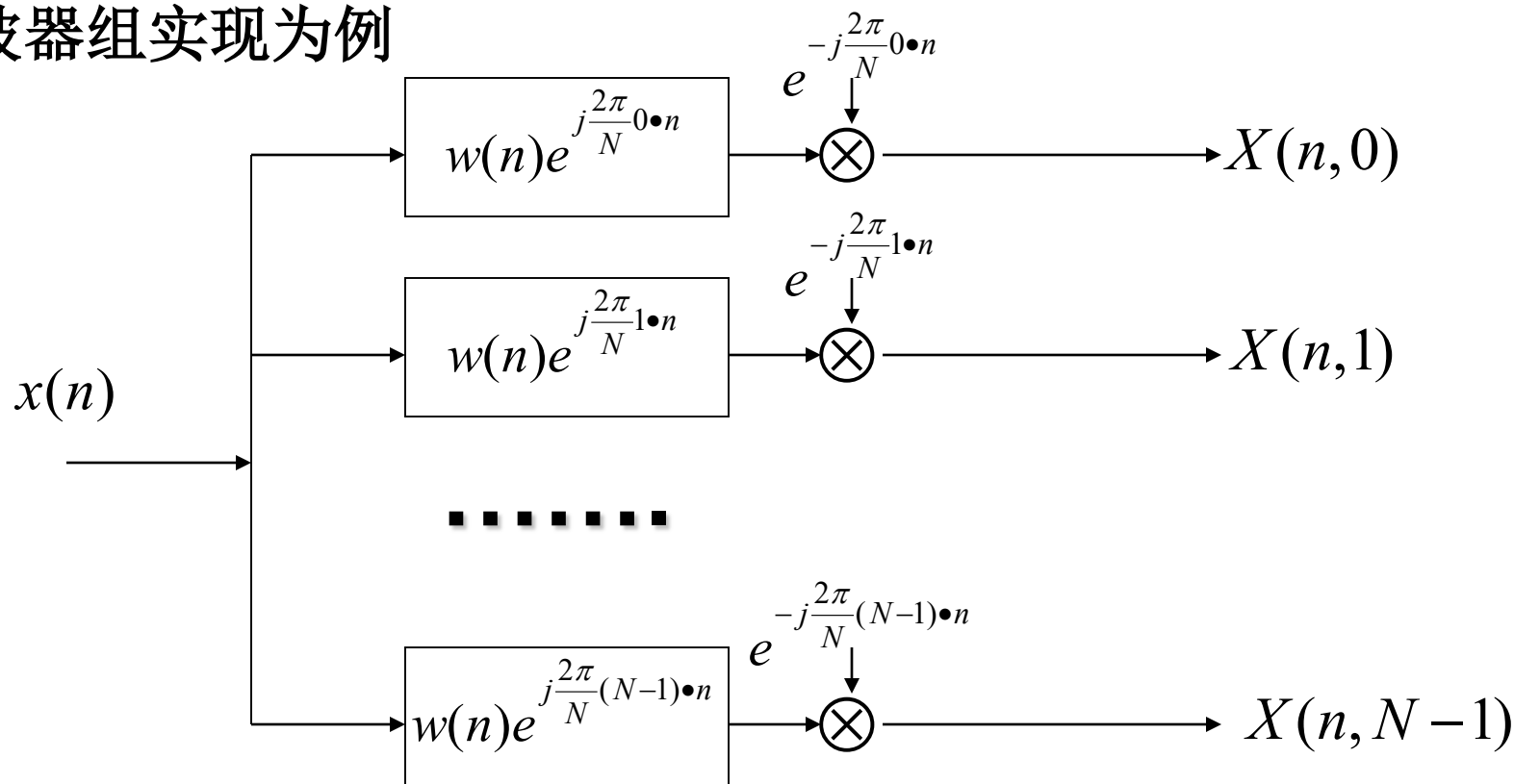
$$X_n(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n} \tilde{X}_n(e^{j\omega}) \Rightarrow |X_n(e^{j\omega})|^2 = |\tilde{X}_n(e^{j\omega})|^2$$



$$X(n, k) = X_n(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \{x(n) * [w(n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}]\}$$

4)离散STFT的滤波器组实现

离散**STFT**和离散时间**STFT**一样可有两种解释.在此以带通滤波器组实现为例



N 个中心频率处于 $\frac{2\pi}{N}k, (k = 0, 1, \dots, N-1)$ 的滤波器组成的滤波器组

$$X_n(e^{j\omega}) = [x(n)e^{-j\omega n}] * w(n)$$

$$X_n(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n} \{x(n) * [w(n)e^{j\omega n}]\}$$

二 STFT性质

从FT角度：离散时间STFT

$$X(n, \omega) = X(n, \omega + 2\pi)$$

$$x(n) \text{ real} \leftrightarrow X(n, \omega) = X^*(n, -\omega)$$

$$x(n) \text{ real} \leftrightarrow |X(n, \omega)| = |X(n, -\omega)|$$

$$x(n) \text{ real} \leftrightarrow \arg X(n, \omega) = -\arg X(n, -\omega)$$

$$x(n - n_0) \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(n - n_0, \omega)$$

从FT角度：离散STFT

$$X(n, k) = 0, k < 0 \text{ or } k > N - 1$$

$$x(n) \text{ real} \leftrightarrow X(n, k) = X^*(n, N - k)$$

$$x(n) \text{ real} \leftrightarrow |X(n, k)| = |X(n, N - k)|$$

$$x(n) \text{ real} \leftrightarrow \arg X(n, k) = -\arg X(n, N - k)$$

$$x(n - n_0) \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0} X(n - n_0, k)$$

$$X_n(e^{j\omega}) = [x(n)e^{-j\omega n}] * w(n)$$

$$X_n(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n} \{x(n) * [w(n)e^{j\omega n}]\}$$

从Filtering角度：离散时间STFT

$$X(n, 0) = x(n) * w(n)$$

$x(n)$ 长度为 N , $w(n)$ 长度为 M , $X(n, \omega)$ 长度为 $N+M-1$

$X(n, \omega)$ 的带宽 $\leq w(n)$ 的带宽

$X(n, \omega_0)$ 的频谱中心点是原点

若 $x(n), w(n)$ 为因果信号, $X(n, \omega)$ 也是因果的

因此，可对 $X(n, \omega)$ 进一步下抽样

三 可逆性与反变换的存在性

1)离散时间**STFT**

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m)w(n-m)e^{-j\omega m}$$

固定 $n = n_0$

$$x(m)w(n_0 - m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{n_0}(e^{j\omega})e^{j\omega m} d\omega \Rightarrow x(n)w(n_0 - n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{n_0}(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

令 $n_0 = n$

$$x(n)w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_n(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

若 $w(0) \neq 0$

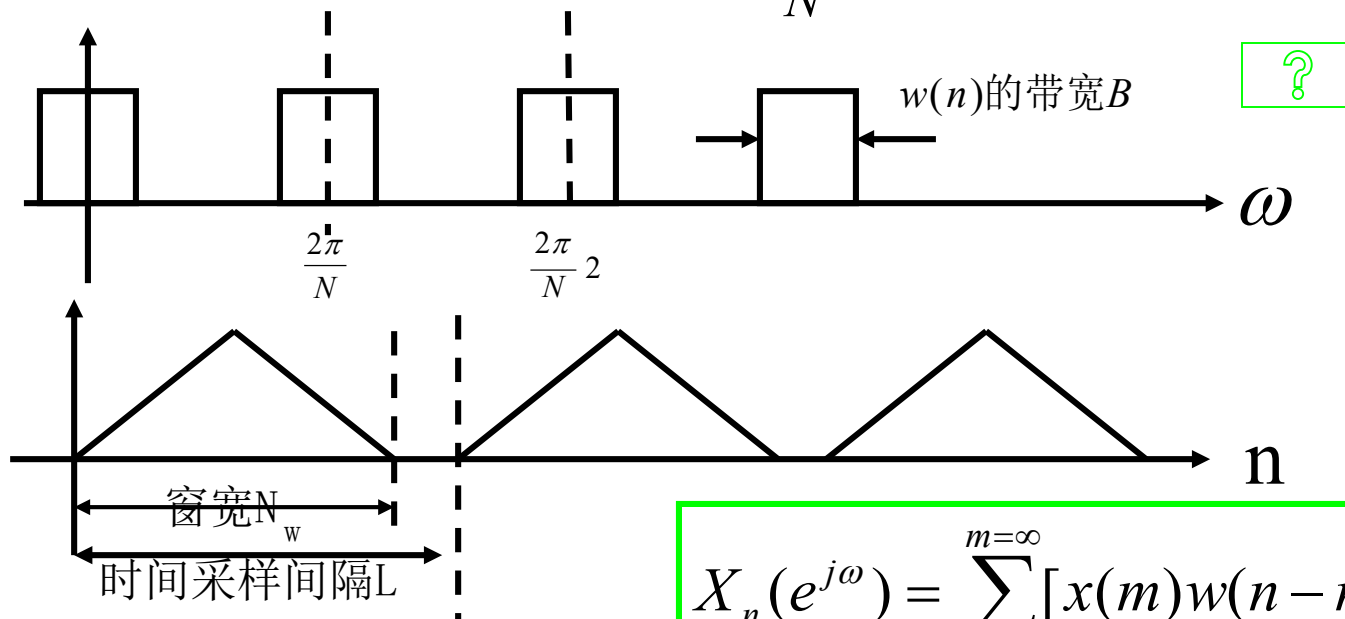
$$x(n) = \frac{1}{2\pi w(0)} \int_{-\pi}^{\pi} X_n(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

所以，离散时间**STFT**的反变换总是存在的，但反变换的形式不是唯一的

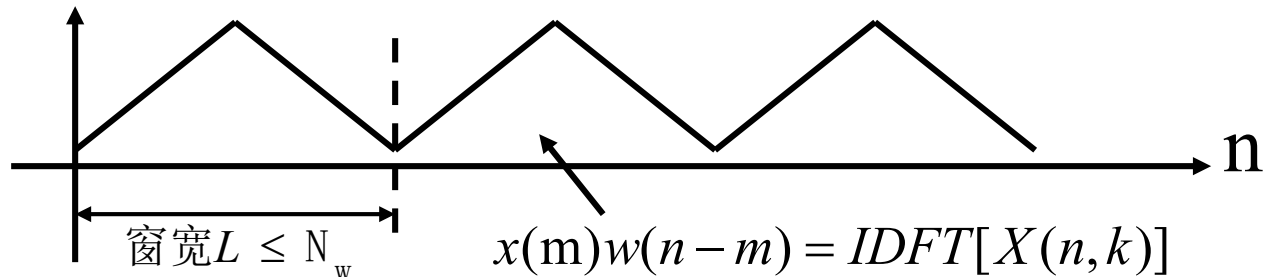
$$X(n, k) = X_n(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \{x(n) * [w(n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}]\}$$

2) 离散STFT 反变换并不总是存在

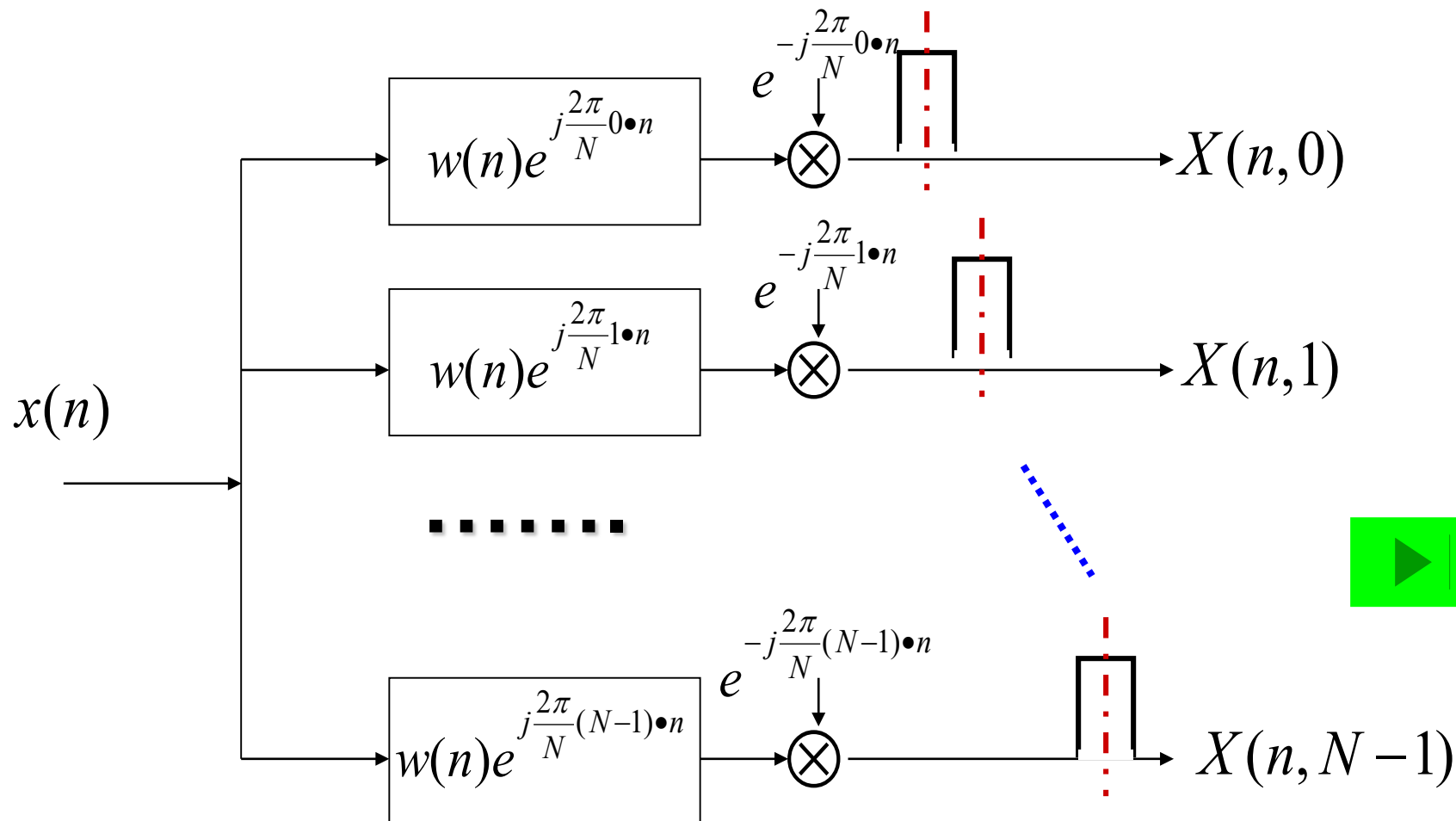
反变换不存在的情况：频率采样间隔： $\frac{2\pi}{N} > w(n)$ 的带宽 B



反变换存在的情况：



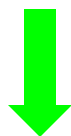
离散STFT的滤波器组实现



4.3 离散短时傅立叶反变换

一 滤波器组求和法 (FBS, Filter Bank Summation)

由离散时间STFT的反变换



离散STFT的反变换

$$x(n) = \left[\frac{1}{2\pi w(0)} \right] \int_{-\pi}^{\pi} X_n(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$



$$y(n) = \left[\frac{1}{Nw(0)} \right] \sum_{k=0}^{N-1} X_n(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

什么条件下?

$$y(n) = x(n)$$

$$X_n(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m)w(n-m)e^{-j2\pi km/N}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\frac{1}{Nw(0)} \right] \sum_{k=0}^{N-1} X_n(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \left[\frac{1}{Nw(0)} \right] \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m)w(n-m)e^{-j2\pi km/N} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \left[\frac{1}{Nw(0)} \right] \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} w(n-m)e^{j2\pi k(n-m)/N} \\ y(n) &= \left[\frac{1}{Nw(0)} \right] x(n) * \sum_{k=0}^{N-1} w(n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \left[\frac{1}{Nw(0)} \right] x(n) * \left[w(n)N \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \delta(n-rN) \right] \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = N \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \delta(n-rN)$$

$y(n) = x(n)$ 的条件:

$$w(n) \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \delta(n-rN) = w(0)\delta(n) \text{ or}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} W(\omega - \frac{2\pi}{N}k) = Nw(0)$$

$$w(n) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - rN) = w(0)\delta(n)$$

or

$$\sum_{k=0}^{N-1} W(\omega - \frac{2\pi}{N}k) = Nw(0)$$

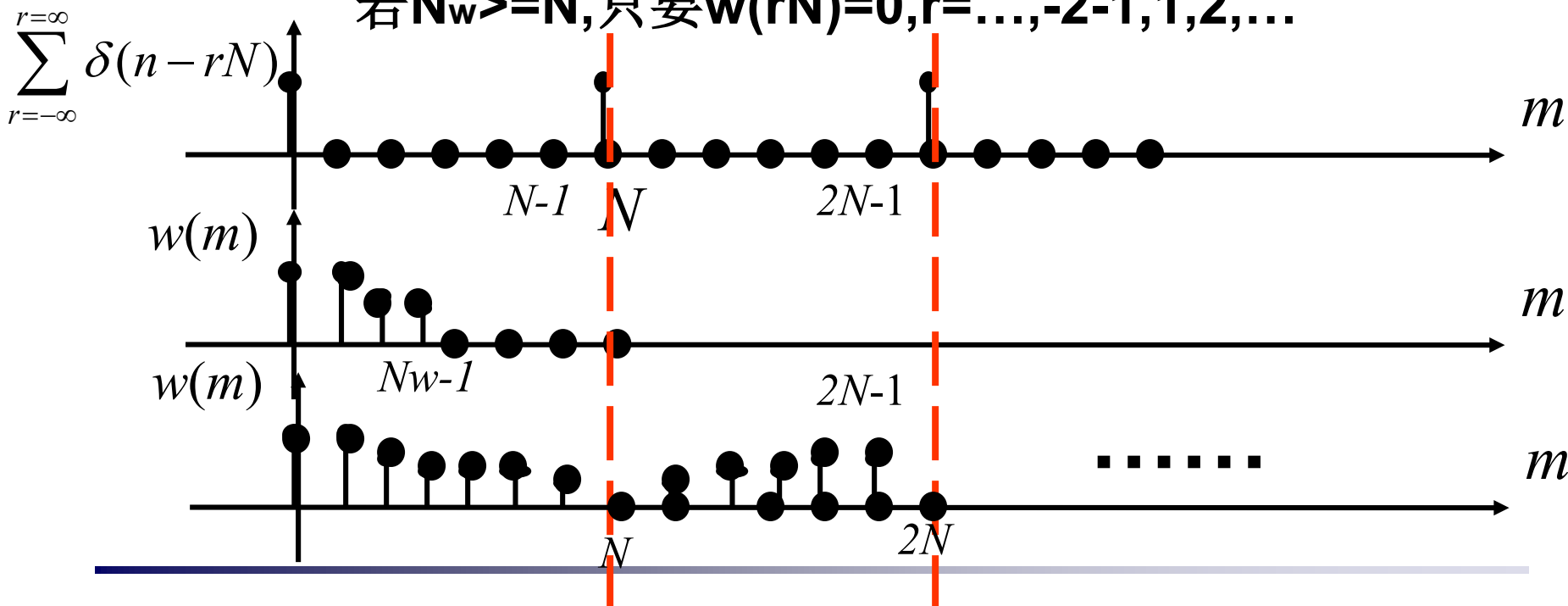
条件分析

(1)时域条件

$$w(n) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - rN) = w(0)\delta(n)$$

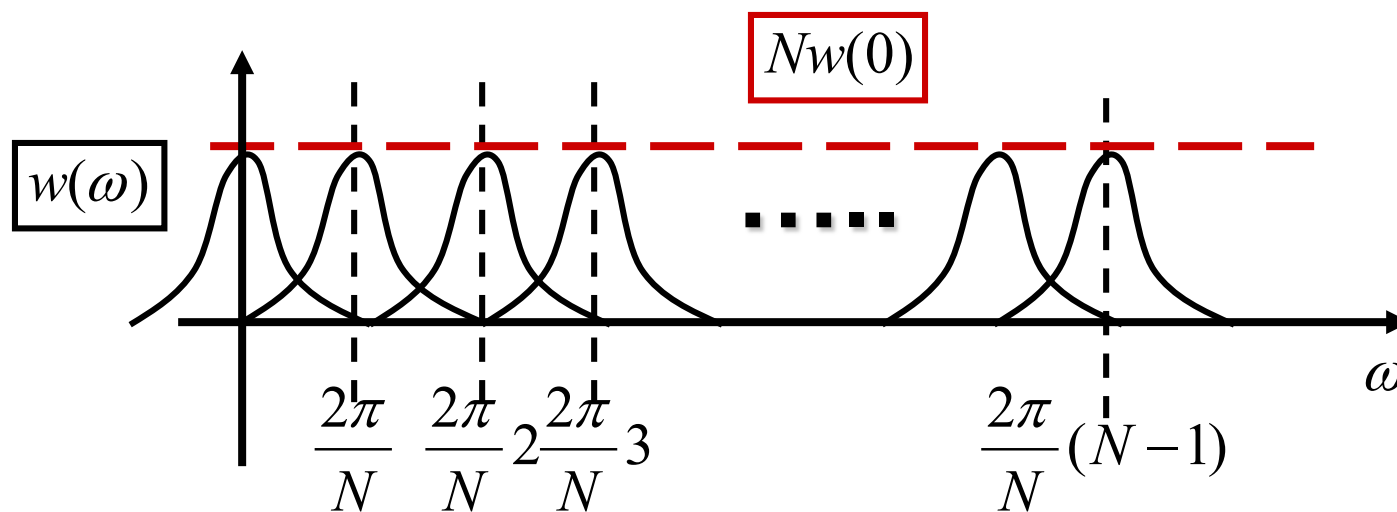
若 $N_w < N$, 上式总成立;

若 $N_w \geq N$, 只要 $w(rN) = 0, r = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$



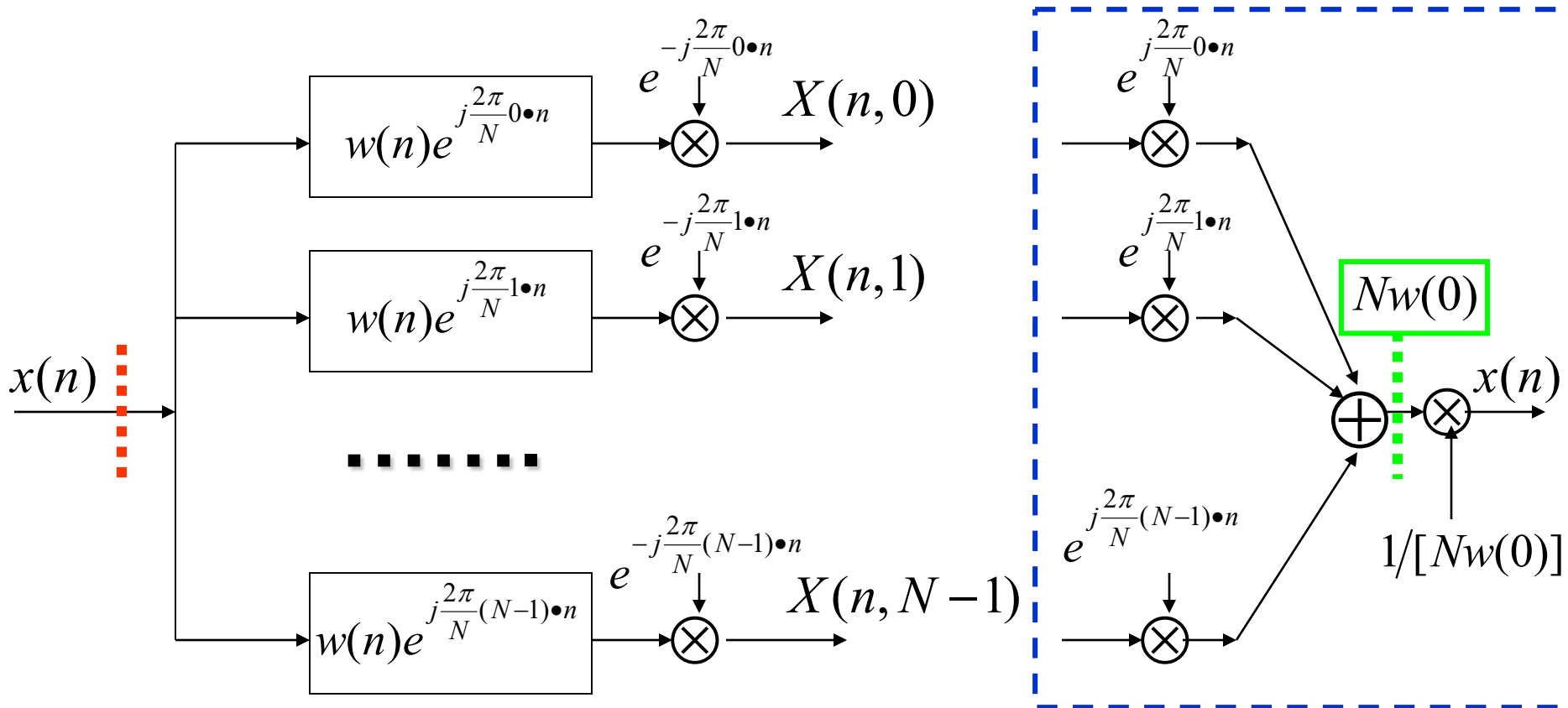
(2) 频域条件

$$\sum_{k=0}^{N-1} W(\omega - \frac{2\pi}{N}k) = Nw(0)$$



$$\sum_{k=0}^{N-1} w(n) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} W(\omega - \frac{2\pi}{N} k) = Nw(0)$$

频域条件物理意义:



$$y(n) = \left[\frac{1}{Nw(0)} \right] \sum_{k=0}^{N-1} X(n, k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

二 OLA法(Overlap-Add Method)

同样的思路:

由离散时间**STFT**的反变换



离散**STFT**的反变换

$$W(0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} w(n)$$
$$X(r, \omega) = X_r(e^{j\omega})$$

$$x(n) = \left[\frac{1}{2\pi W(0)} \right] \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{r=-\infty}^{r=\infty} X(r, \omega) \right] e^{j\omega n} d\omega$$



$$y(n) = \left[\frac{L}{W(0)} \right] \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(pL, k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right]$$

什么条件下?

$$y(n) = x(n)$$

证明

$$x(n) = \left[\frac{1}{2\pi W(0)} \right] \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{r=-\infty}^{r=\infty} X(r, \omega) \right] e^{j\omega n} d\omega$$

证明: $X(n, \omega) = [x(n)e^{-j\omega n}] * w(n)$

上式两边对 **n** (对应的频率变量为 Φ) 取**FT**:

$$\hat{X}(\Phi, \omega) \Big|_{\Phi=0} = X(\Phi + \omega) W(\Phi) \Big|_{\Phi=0}$$

$$\hat{X}(\Phi, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} X(n, \omega) e^{-j\Phi n} \quad \hat{X}(\Phi, \omega) \Big|_{\Phi=0} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} X(n, \omega)$$

$$\hat{X}(\Phi, \omega) \Big|_{\Phi=0} = X(\omega) W(0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} X(n, \omega) \rightarrow X(\omega) = \frac{1}{W(0)} \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} X(r, \omega)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{W(0)} \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} X(r, \omega) \right] e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi W(0)} \right] \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{r=-\infty}^{r=\infty} X(r, \omega) \right] e^{j\omega n} d\omega$$

$$y(n) = \left[\frac{L}{W(0)} \right] \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(pL, k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \right]$$

什么条件下?

$$y(n) = x(n)$$

$$y(n) = \left[\frac{L}{W(0)} \right] \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(pL, k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \right]$$

IDFT

$$y_p(n) = x(n)w(pL - n), N > N_w$$

$$y(n) = \left[\frac{L}{W(0)} \right] \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(n)w(pL - n)$$

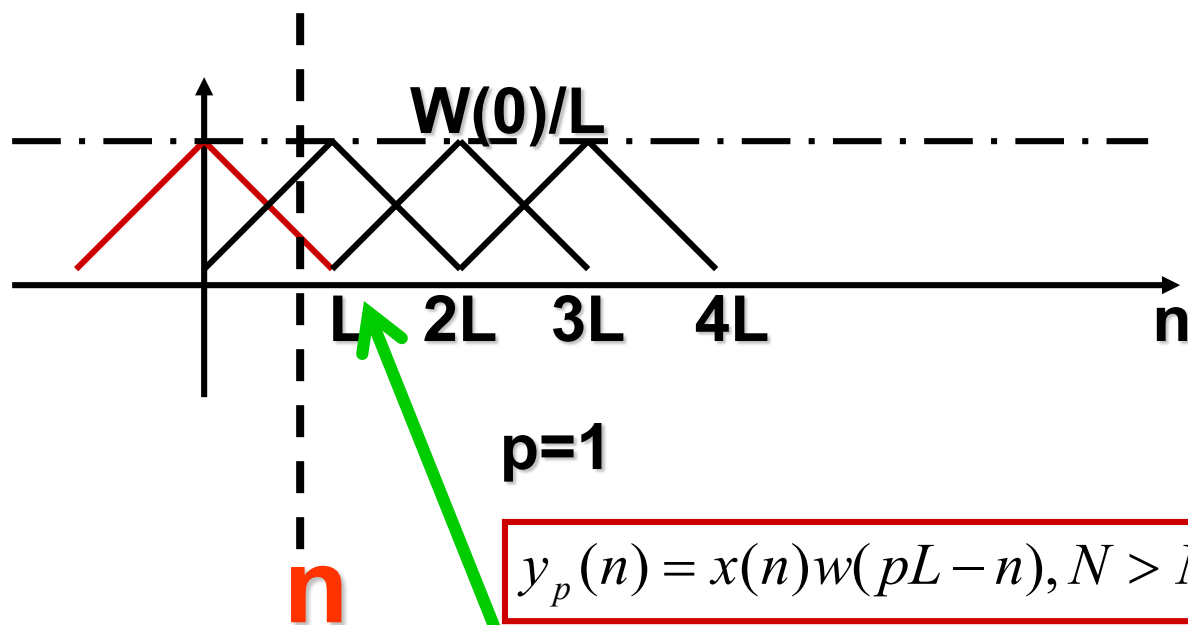
$$= x(n) \sum_{p=-\infty}^{\infty} w(pL - n) / [W(0) / L] = 1$$

条件: $\sum_{p=-\infty}^{\infty} w(pL - n) = \frac{W(0)}{L}, \forall n$

$$x(n) = \left[\frac{L}{W(0)} \right] \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(pL, k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \right]$$

条件分析: $\sum_{p=-\infty}^{\infty} w(pL - n) = \frac{W(0)}{L}, \forall n$

1) 从时域看

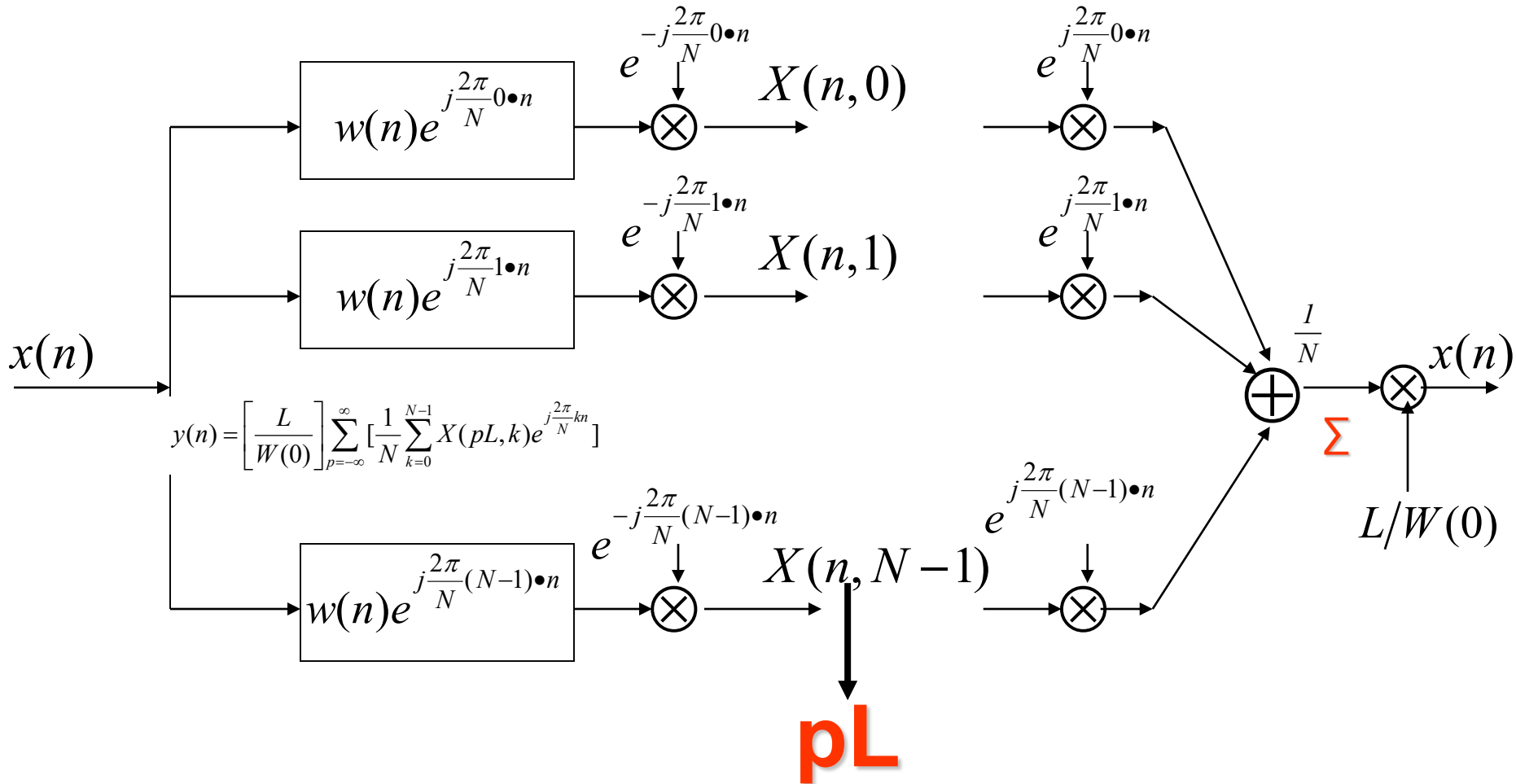


$$y_p(n) = x(n)w(pL - n), N > N_w$$

$$y(n) = \left[\frac{L}{W(0)} \right] \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(pL, k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \right]$$

$$y(n) = \left[\frac{L}{W(0)} \right] \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(pL, k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \right]$$

$$y(n) = \left[\frac{L}{W(0)} \right] \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(n) w(pL - n)$$



条件分析: $\sum_{p=-\infty}^{\infty} w(pL - n) = \frac{W(0)}{L}, \forall n$

2)从频域看

