
- 第二章 LMS自适应滤波

2.5 LMS算法变形

一 泄放因子 (leakage factor)

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

当输入信号消失时，递推式中系数被锁死在那儿，这时最好让其返回到 $\mathbf{0}$ ，以便下一次重新递归，从而有个稳定的行为。这可以通过加一个泄放因子来实现。

$$\mathbf{H}(n+1) = (1-\gamma)\mathbf{H}(n) + \delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1) \quad \text{式中 } 0 < \gamma < 1$$

从而当 $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{0}$ 时， $\mathbf{H}(n+1) \rightarrow \mathbf{0}$

将 $e(n+1) = y(n+1) - \mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{H}(n)$ ，代入有

$$\mathbf{H}(n+1) = [(1-\gamma)\mathbf{I}_N - \delta \mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)] \mathbf{H}(n) + \delta y(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

收敛后，定义均值为：

$$\mathbf{H}_\infty = E[\mathbf{H}_{(\infty)}] = [(1-\gamma)\mathbf{I}_N - \delta \mathbf{R}] E[\mathbf{H}_{(\infty)}] + \delta \mathbf{r}_{yx}$$

$$\mathbf{H}_\infty = E[\mathbf{H}_{(\infty)}] = [(1-\gamma)\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{R}]^{-1} E[\mathbf{H}_{(\infty)}] + \delta \mathbf{r}_{yx}$$

$$E[\mathbf{H}_{(\infty)}] = [\gamma\mathbf{I}_N + \delta\mathbf{R}]^{-1} \delta \mathbf{r}_{yx}$$

$$\therefore \mathbf{H}_\infty = [\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N]^{-1} \mathbf{r}_{yx}$$

比较 $\mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}_{yx}$ ，可见泄放因子的引入，使滤波器系数即使是均值也不能收敛到 \mathbf{H}_{opt}

$$\mathbf{H}_\infty = [\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N]^{-1} \mathbf{R} \mathbf{H}_{opt}$$

这时相当于一个白噪声被叠加到输入信号 $x(n)$ 上产生同样的效果

$$[\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N] = [\mathbf{R}] + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\gamma}{\delta} \end{bmatrix}$$

因为白噪声加到 $x(n)$ 后求自相关矩阵时，除对角线元素变化， $\gamma(0) + \frac{\gamma}{\delta}$ 其余由于噪声的独立性而为0

为了评定泄放因子的影响，我们重写系数矢量：

$$\begin{aligned}\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{I}_N &= \mathbf{Q} \text{diag}(\lambda_i) \mathbf{Q}^T + \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{Q} \text{diag}(1) \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} \text{diag}(\lambda_i + \frac{\gamma}{\delta}) \mathbf{Q}^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{I}_N]^{-1} &= [\mathbf{Q}^T]^{-1} \text{diag}(\lambda_i + \frac{\gamma}{\delta})^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{Q} \text{diag}(\lambda_i + \frac{\gamma}{\delta})^{-1} \mathbf{Q}^T\end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_\infty = [\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{I}_N]^{-1} \mathbf{R} \mathbf{H}_{opt}$$

$$= \mathbf{Q} \text{diag}(\lambda_i + \frac{\gamma}{\delta})^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \text{diag}(\lambda_i) \mathbf{Q}^T \mathbf{H}_{opt} = \mathbf{Q} \text{diag}(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \frac{\gamma}{\delta}}) \mathbf{Q}^T \mathbf{H}_{opt}$$

$$\mathbf{H}_\infty = \mathbf{Q} \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \frac{\gamma}{\delta}}\right) \mathbf{Q}^T \mathbf{H}_{opt}$$

可见偏离取决于 λ_{\min} 和 $\frac{\gamma}{\delta}$ 的相对大小

如果 $\frac{\gamma}{\delta} \ll \lambda_{\min}$, 则 $\mathbf{H}_\infty = E[\mathbf{H}_{(\infty)}] \rightarrow \mathbf{H}_{opt}$

由于 $\mathbf{H}_\infty - \mathbf{H}_{opt} = [\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}]^{-1} \mathbf{R} \mathbf{H}_{opt} - \mathbf{H}_{opt} = \{[\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}]^{-1} \mathbf{R} - \mathbf{I}_N\} \mathbf{H}_{opt}$

所以残差 $J_{(\infty)} = J_{\min} + [\mathbf{H}_\infty - \mathbf{H}_{opt}]^T \mathbf{R} [\mathbf{H}_\infty - \mathbf{H}_{opt}]$

泄放因子尤其对于处理非平稳信号有用, 适当选择泄放因子可减小输出误差功率。

(语音信号中, 试验表明, $\delta=2^{-6}$, $\gamma=2^{-8}$ 是一种好的选择)

$$0 < \delta < \frac{2}{N\sigma_x^2}$$
$$\tau_e \approx \frac{1}{\delta\sigma_x^2}$$

二、符号算法 (sign Algorithm) :

LMS算法中, 系数自适应遵循

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

导致滤波器中 $(N+1)$ 次乘法 (相对于FIR, 额外). 而当信号是非平稳时 (如 σ_x^2 在变化), 尚需估计 σ_x^2 , 用 $\frac{1}{\tau_e\sigma_x^2}$ 代替 δ (如希望时间常数保持稳定: $\frac{1}{\delta\sigma_x^2} = \tau_e$).

实用中有一种简化算法 —— 符号算法。

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \Delta \operatorname{sign}[e(n+1)] \operatorname{sign}[\mathbf{X}(n+1)]$$

式中符号函数 $\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$

若近似将 $|x|$, 看着信号的有效值 σ_x 。这里 $\sigma_x = \sqrt{E[x^2(n)]}$

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \Delta \operatorname{sign}[e(n+1)] \operatorname{sign}[\mathbf{X}(n+1)]$$

这时上式仍可近似看作是LMS算法:

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \Delta \frac{1}{\sigma_e \sigma_x} e(n+1) \mathbf{X}(n+1)$$

但是 $\delta \approx \frac{\Delta}{\sigma_x \sigma_e}$

这里 σ_x, σ_e 是输入信号和输出误差的有效值。

在学习状态（指开始递推，达稳态之前），由于初始值 $H(0)=0$ ，可假设 $\sigma_e \approx \sigma_y$ ，则符号算法初始时间常数可近似估计为

$$\tau \approx \frac{1}{\delta \sigma_x^2} \quad \delta \approx \frac{\Delta}{\sigma_x \sigma_e} \quad \therefore \tau_s \approx \frac{1}{\Delta} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

收敛后，可合理假设 $\sigma_e^2 = J_{\min}$

则可估计符号算法均方收敛误差：

$$J(\infty) \approx J_{\min} \left(1 + \frac{\delta}{2} N \sigma_x^2\right)$$
$$\approx J_{\min} \left(1 + \frac{\Delta N \sigma_x}{2 \sqrt{J_{\min}}}\right)$$

$\sigma_e^2 = J_{\min}$

$$\delta \approx \frac{\Delta}{\sigma_x \sigma_e} \quad \longrightarrow \quad \delta \approx \frac{\Delta}{\sigma_x \sqrt{J_{\min}}}$$

超量残差：

$$J_{ex}(\infty) = \sqrt{J_{\min}} \frac{\Delta N \sigma_x}{2}$$

根据稳定性条件， $0 < \delta < \frac{2}{N \sigma_x^2}$ ，故 Δ 取值条件：

$$0 < \Delta < \frac{2}{N} \frac{\sqrt{J_{\min}}}{\sigma_x}$$

同样为了适应处理非平稳的情况，亦可以加入泄放因子在符号算法中。

$$\mathbf{H}(n+1) = (1-\gamma)\mathbf{H}(n) + \Delta \operatorname{sign}[e(n+1)] \operatorname{sign}[\mathbf{X}(n+1)]$$

在这些条件下：

$$\begin{aligned} |\gamma\mathbf{H}(n)| &= |\Delta \operatorname{sign}[e(n+1)] \operatorname{sign}[\mathbf{X}(n+1)] + \mathbf{H}(n) - \mathbf{H}(n+1)| \\ &\leq |\Delta| + |\mathbf{H}(n) - \mathbf{H}(n+1)| \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{H}(n)| \leq \left| \frac{\Delta}{\gamma} \right| + |\varepsilon| \end{aligned}$$

即系数被限制在 $|h_i(n)| \leq \frac{\Delta}{\gamma} \quad 0 \leq i \leq N-1$

一般讲符号算法比标准的梯度算法（LMS）收敛慢，超量误差大，但是却十分简单（保留了和固定系数滤波器相同的乘法次数），由于step-size具有归一化性质，robust较好。它又能处理非平稳型号，故它亦是一种较广泛使用的自适应算法。

$$\delta \approx \frac{\Delta}{\sigma_x \sigma_e}$$