

粘性价格下的最佳生产计划和节水决策问题

魏莱 崔扬波 任宣霏

中国科学技术大学 安徽省合肥市 邮编:230026

指导老师: 薄立军

2023 年 5 月 9 日

摘要

本文基于经典的公司生产与水权交易模型, 引入粘性价格, 研究了价格变化对于实际市场中商品供应关系的反应具有迟滞性的情形下, 公司生产决策与水权交易决策的最优化随机控制问题。我们利用动态规划原理建立值函数满足的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 并通过求解 HJB 方程得到了公司的最优生产与水权交易决策反馈函数。本文重点建立了值函数和最优策略的解析表达式, 通过数值模拟进行参数敏感性分析, 研究了值函数和最优策略反馈函数的结构性性质, 并且结合市场实际情况进行了相应的分析和解释。本文结果对于实际市场中公司的经营和管理具有一定指导意义。

关键词: 粘性价格; 随机控制; HJB 方程; 生产决策; 水权交易

Abstract

This paper studies the production planning and water rights trading problem. We first establish the classical model of company production and water rights trading, and introduce sticky prices, which refers to the tendency of prices to adjust slowly, despite changes of the product supply relationship in the market. Applying the dynamic programming principle, we get the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation satisfied by the value function. By solving the HJB equation, we obtain the close form of the value function and the feedback functions of the optimal production planning and water rights trading. Furthermore, parameter sensitivity analysis is conducted through numerical simulation, which helps us investigate and analysis the structural properties of the value function and optimal feedback strategy functions. Our analysis and findings provide some significant insights for the company on the production planning and water rights trading.

Keywords: Sticky prices; Stochastic control; HJB equation; Production decision; Water rights trading

目录

1 前言	2
2 公司生产计划与水权市场交易模型	3
2.1 商品的生产与定价	3
2.2 水权交易市场	4
2.3 粘性价格下的最优生产和水权交易决策问题	4
3 最优生产与水权交易决策	5
4 数值模拟与数据分析	8
4.1 水权保留价格 E 的敏感性分析	8
4.2 政府给公司分配的初始水权量 y 的敏感性分析	10
4.3 节水量对于节水成本的影响系数 w 的敏感性分析	12
4.4 产量对于用水量的影响系数 g 的敏感性分析	13
4.5 自身产量对价格的影响系数 B 的敏感性分析	15
4.6 产品市场上的保留价格 A 的敏感性分析	17
5 结论	18

1 前言

在二十一世纪，为了满足经济快速增长的需求，人类消耗、浪费和污染的水资源比以往任何时期都多，存在于世界各地的水资源稀缺问题也越发严重。世界四分之一以上的人口甚至发展中国家三分之一以上的人口将要生活在严重缺水的地区，其中，在亚洲和中东的半干旱地区，地下水水位正以惊人的速度下降 (参见 [1])。

中国同样也面临着严重的水资源短缺问题。例如灌溉农业的迅速发展对中国的经济有着重要的影响，但同时也带来了用巨大的用水压力。为此，政府也开始大力投资于农业部门节水技术的研究，以实现水资源的合理利用 (参见 [2])。2022 年 3 月 30 日，中国节约用水工作部际协调机制 2022 年度全体会议在京召开。会议强调要深入贯彻落实习近平总书记“节水优先、空间均衡、系统治理、两手发力”治水思路，深化落实国家节水行动，精打细算用好水资源，从严从细管好水资源，以水资源的可持续利用支撑经济社会持续健康发展。

严重的水资源短缺问题对企业的生产计划和发展也带来了严重的影响。许多工厂被迫减少生产，以保护市政供水。减轻这些问题带来的经济、社会和环境方面的负担也成为了世界各国政府的当务之急。为此，中国、美国、澳大利亚等多国政府均建立了“水权交易”市场，即允许企业进行水权初始分配后的交易与再分配。同一立方米的水在不同的用途中产生的经济效益不同。在初始水权分配固定的条件下，存在效益优势的用户希望进一步扩大生产规模或进行新的开发，具有超出初始分配水权的水量需求，则希望从水市场上寻找他们需要的水量。相反，低价值用途的水用户可能会由于产业结构的调整存在销售其多余水权的需求，从而不同用户之间的互补性促进了水权交易的产生 (参见 [3])。水权交易使水权成为一项具有市场价值的流动性资源透过市场机制，

使新增或潜在用水人有机会取得所需水资源，从而达到提升社会用水总效率的目的。[4] 提出水权交易具有如下优势：第一，能够让用水者更加适应季节条件；第二，揭示用水的机会成本，提高水资源的利用价值；第三，可以增加该地区的经济活动。

在水权交易市场的影响下，如何合理利用交易水权并调整生产计划以获得最大的经济收益是企业的关键决策，也是如今新兴的研究热点。一方面，通过科技研发手段，提高用水效率、改善水权交易不仅有助于不断优化用水和生产计划，也在很大程度上缓解了未来严重的缺水问题；另一方面，购买一些允许公司额外消费的水权量虽然会产生一些花费，但在满足企业生产需求方面可能起到不可或缺的作用。此外，通过减少生产直接降低水的消耗，或是利用海水淡化、收集暴雨水等方式扩大现有的供水水源也是一些较为直接的解决办法（参见 [5]）。

本文主要研究了粘性价格下的最佳生产计划和节水决策问题。粘性价格是指尽管生产和销售商品或服务的成本发生变化，但是价格仍保持不变或缓慢调整的趋势，也即短期内价格的调整慢于商品市场供求关系的变化。这种价格调整缓慢的现象具有多种原因，例如更新定价带来的成本，以及企业在面对不同冲击时对价格的反应速度不同 [6]。基于上述原因，为了使得模型更加贴合实际市场情况，本文对水权和商品价格建模均采用粘性价格模型。

本文结构如下：第 1 节中我们介绍了粘性价格下的最佳生产计划和节水决策问题的主要背景和研究动机。第 2 节中我们建立了粘性价格下产品市场与水权市场的交易模型。第 3 节中我们根据建立的模型求解 HJB 方程并给出了值函数和最优策略的解析表达式。第 4 节中我们利用数值模拟将得到的解析表达式进行参数敏感性分析，并对公司决策提出相应的建议。第 5 节中对于上述研究进行总结。

2 公司生产计划与水权市场交易模型

假设市场中存在 N 家生产同种商品的公司，分别记为 $1, \dots, N$ 。设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 为完备概率空间，其中滤流 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 满足一般性条件。 $(W, B) = \{W_1(t), W_2(t), \dots, W_N(t), B(t)\}_{t \geq 0}$ 为该概率空间下 $N + 1$ 维标准布朗运动。

2.1 商品的生产与定价

对于 $1, \dots, N$ 公司，它们的生产成本是关于商品产量的二次函数，具有如下形式：

$$C(q) = cq + \frac{1}{2}q^2, \quad (1)$$

其中， q 为该公司的产量， c 是成本系数，且满足 $0 < c < A$ ， A 是产品市场上不变的保留价格。

设公司 i 的商品生产量过程为 $q_i = \{q_i(t)\}_{t \geq 0}$ ， $i = 1, \dots, N$ 。那么 t 时刻公司 i 的产品均衡价格为：

$$\hat{p}_i(t) = A - Bq_i(t) - D \sum_{j \neq i} q_j(t), \quad (2)$$

其中 D 表示替代品产量对价格的影响系数， B 是自身产量对价格的影响系数，二者之间满足 $0 < D < B$ ，产品市场的均衡价格与该公司及其竞争对手的总产出成负相关。

实际情况下，产品的价格往往具有粘性，即价格从实际市场水平逐渐变化到均衡水平需要一段时间。因此，产品的粘性价格 $p_i(t)$ 表示的价格不会立即回到平衡水平，满足如下随机微分方

程:

$$dp_i(t) = s[\hat{p}_i(t) - p_i(t)]dt + \sigma_1 dW_i(t), \quad (3)$$

其中 $s \in (0, 1)$ 是粘性系数, $\sigma_1 > 0$ 为波动率, 表示粘性价格受市场随机因素的影响。

2.2 水权交易市场

在水权交易市场中, 水权交易量是描述公司可用水和需用水之间关系的量, 以两者的差值表示, 若为正值则表示有剩余水权可以用于交易, 若为负值则表示公司需要额外购入水权, 若为 0 则表示公司水权恰好无剩余。对于 $i = 1, \dots, N$, 第 i 家公司 t 时刻水权交易量为:

$$R_i(t) = [u_i(t) + y_i - g_i q_i(t)], \quad (4)$$

其中 y_i 为政府给公司分配的初始水权量, $u_i(t)$ 为 t 时刻公司的节水量, g_i 为产量对于用水量的影响系数。

除在水权市场中交易来缓解用水压力外, 公司还可以通过自身生产技术提高、设备升级等方法提高水资源利用效率, 以节约水资源。而公司的水资源利用效率越高, 所需要承担相关成本也越高。 t 时刻公司节约水资源所产生的成本为:

$$S(t) = \frac{1}{2}w[u(t)]^2, \quad (5)$$

其中 $w > 0$ 是节水量对于节水成本的影响系数。

水权市场的均衡价格与一定时间内的水权交易总量成负相关。水权均衡价格可以用水权交易量表示为:

$$\hat{k}(t) = E - \alpha \sum_{i=1}^N R_i(t) = E - \alpha \sum_{i=1}^N [u_i(t) + y_i - g_i q_i(t)], \quad (6)$$

这里 $E > 0$ 是固定的水权保留价格, $\alpha > 0$ 为水权交易量对水权价格的影响系数, $R_i(t)$ 是第 i 家公司的水权交易量。

在实际水权市场中, 水权价格同样也往往具有粘性, 即从市场的实际水平逐渐改变到均衡水平需要时间。记 $k(t)$ 为 t 时刻的实际市场水权价格, 实际市场水权价格与均衡水权价格存在偏差, 即实际价格不会立即回到平衡水平, 而会满足如下随机微分方程:

$$\begin{aligned} dk(t) &= r[\hat{k}(t) - k(t)]dt + \sigma_2 dB(t) \\ &= r\left[E - \alpha \sum_{i=1}^N [u_i(t) + y_i - g_i q_i(t)] - k(t)\right] + \sigma_2 dB(t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $r \in (0, 1)$ 为水权价格粘性系数, $\sigma_2 > 0$ 为波动率, 刻画了水权市场中的随机因素对水权粘性价格的影响。与于之前的产品价格粘性系数类似, r 越大, 价格变化到均衡水平的速度越快, 价格粘性越小。

2.3 粘性价格下的最优生产和水权交易决策问题

由 (1),(2) 和 (5) 式可知, 公司 i 在 t 时刻的收益为:

$$\begin{aligned} \pi_i(t) &= q_i(t)p_i(t) - C_i(t) + k(t)R_i(t) - S_i(t) \\ &= q_i(t)\left[p_i(t) - c - \frac{1}{2}q_i(t)\right] + k(t)[u_i(t) + y_i - g_i q_i(t)] - \frac{1}{2}w_i[u_i(t)]^2. \end{aligned} \quad (8)$$

那么公司 i 在生产计划 $q_i = \{q_i(t)\}_{t \geq 0}$ 和节水策略 $u_i = \{u_i(t)\}_{t \geq 0}$ 下的预期收益, 即目标函数为:

$$J_i(p_1, \dots, p_N, k, q_1, \dots, q_N, u_1, \dots, u_N) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ q_i(t) \left[p_i(t) - c - \frac{1}{2} q_i(t) \right] + k(t) [u_i(t) + y_i - g_i q_i(t)] - \frac{1}{2} w_i [u_i(t)]^2 \right\} dt \right]. \quad (9)$$

市场中每一家公司都希望制定最优生产计划和节水策略, 以获得最大预期收益, 即对于 $i = 1, \dots, N$, 有:

$$V_i(p_1, \dots, p_N, k) = \max_{q_i, u_i} J_i(p_1, \dots, p_N, k, q_1, \dots, q_N, u_1, \dots, u_N), \quad (10)$$

这里单独研究第 i 家公司的最优生产计划和节水策略, 即研究在其他公司产生的 $q_j, u_j, s.t. j \neq i$ 视作固定常数时, 针对第 i 家公司的生产计划和节水策略, 其中

$$\begin{cases} dp_i(t) = s \left[A - Bq_i(t) - D \sum_{j \neq i} q_j(t) - p_i(t) \right] dt + \sigma_1 dW_i(t), & p_i(0) = p_{i,0} > 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ dk(t) = r \left[E - \alpha \sum_{i=1}^N [u_i(t) + y_i - g_i q_i(t)] - k(t) \right] dt + \sigma_2 dB(t), & k(0) = k_0 > 0. \end{cases} \quad (11)$$

注意到这是一个由 $N + 1$ 个随机微分方程驱动随机最优化控制问题。

3 最优生产与水权交易决策

在本节中, 我们将利用动态规划原理建立值函数满足的 HJB 方程, 通过求解 HJB 方程建立公司的最优生产与水权交易决策。如下定理给出了值函数和最优策略的解析表达式, 是本文的核心结论:

定理 1. 在对称性假设下, 即每个公司采取相同的生产计划和节水策略且 $y_i = y, g_i = g, w_i = w, q_i = q, i = 1, \dots, n$, 那么公司的最大预期收益 $V(p, k)$ 具有如下解析形式:

$$V(p, k) = b_1 p^2 + b_2 k^2 + b_3 p k + b_4 p + b_5 k + b_6. \quad (12)$$

并且, 公司的最优生产计划和节水策略反馈函数为:

$$\begin{cases} q(p, k) = p - c - gk - Ns [B + D(N - 1)] (2b_1 p + b_3 k + b_4) + r\alpha N g (2b_2 k + b_3 p + b_5), \\ u(p, k) = \frac{1}{w} [k - r\alpha N (2b_2 k + b_3 p + b_5)]. \end{cases} \quad (13)$$

其中, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 和 b_6 满足以下方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho b_1 = \frac{1}{2w} r^2 \alpha^2 N^2 b_3^2 - 2Nsb_1 + \frac{1}{2} \{1 - 2NS[B + D(N-1)]b_1 + r\alpha Ngb_3\}^2, \\ \rho b_2 = \frac{1}{2w} (1 - 2r\alpha Nb_2)^2 - 2rb_2 + \frac{1}{2} \{2r\alpha Ngb_2 - Ns[B + D(N-1)]b_3 - g\}^2, \\ \rho b_3 = \left[\frac{1}{w} r\alpha N(2r\alpha Nb_2 - 1) - Ns - r \right] b_3 \\ \quad + \{1 - 2NS[B + D(N-1)]b_1 + r\alpha Ngb_3\} \{2r\alpha Ngb_2 - Ns[B + D(N-1)]b_3 - g\}, \\ \rho b_4 = \frac{1}{w} r^2 \alpha^2 N^2 b_3 b_5 + 2NsAb_1 - Nsb_4 + r(E - \alpha Ny) b_3 \\ \quad + \{1 - 2NS[B + D(N-1)]b_1 + r\alpha Ngb_3\} \{r\alpha Ngb_5 - Ns[B + D(N-1)]b_4 - c\}, \\ \rho b_5 = \frac{1}{w} r\alpha Nb_5(2r\alpha Nb_2 - 1) + 2r(E - \alpha Ny) b_2 + NsAb_3 + y - rb_5 \\ \quad + \{2r\alpha Ngb_2 - Ns[B + D(N-1)]b_3 - g\} \{r\alpha Ngb_5 - Ns[B + D(N-1)]b_4 - c\}, \\ \rho b_6 = \frac{1}{2w} r^2 \alpha^2 N^2 b_5^2 + \sigma_1^2 Nb_1 + \sigma_2^2 b_2 + NsAb_4 + r(E - \alpha Ny) b_5 \\ \quad + \frac{1}{2} \{r\alpha Ngb_5 - Ns[B + D(N-1)]b_4 - c\}^2. \end{array} \right. \quad (14)$$

证明. 由 (9), (10) 和 (11) 式, 利用动态规划原理可以得到值函数满足如下 Hamilton-Jacobi-Bellmann 方程:

$$\begin{aligned} \rho V_i(p_1, \dots, p_N, k_i) = \sup_{q_i, u_i} & \left\{ \frac{1}{2} \sigma_1^2 \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 V_i}{\partial p_j^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial k^2} \right. \\ & + q_i \left(p_i - c - \frac{1}{2} q_i \right) + k(u_i + y_i - g_i q_i) - \frac{1}{2} w_i u_i^2 \\ & + \sum_{j=1}^N s \left[A - Bq_j - D \sum_{k \neq j} q_k - p_j \right] \frac{\partial V_i}{\partial p_j} \\ & \left. + r \left[E - \alpha \sum_{i=1}^N (u_i + y_i - g_i q_i) - k \right] \frac{\partial V_i}{\partial k} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

进一步, 根据对称性假设 $y_i = y, g_i = g, w_i = w, q_i = q, p_i = p, u_i = u, V_i = V$, 我们可以得到:

$$\rho V(p, k) = \sup_{q, u} R(p, k, q, u), \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned} R(p, k, q, u) = & \frac{1}{2} \sigma_1^2 N \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} \\ & + q \left(p - c - \frac{1}{2} q \right) + k(u + y - gq) - \frac{1}{2} wu^2 \\ & + Ns \left[A - Bq - D(N-1)q - p \right] \frac{\partial V}{\partial p} \\ & + r \left[E - \alpha N(u + y - gq) - k \right] \frac{\partial V}{\partial k}. \end{aligned} \quad (17)$$

分别计算 R 关于 q 和 u 的一阶偏导, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial q} = p - c - q - gk + Ns[-B - D(N-1)] \frac{\partial V}{\partial p} + r\alpha Ng \frac{\partial V}{\partial k} \\ \frac{\partial R}{\partial u} = -r\alpha N \frac{\partial V}{\partial k} + k - wu. \end{cases} \quad (18)$$

利用一阶导条件, 在 (18) 中令 $\frac{\partial R}{\partial q} = 0, \frac{\partial R}{\partial u} = 0$, 得到:

$$\begin{cases} q = p - c - gk - Ns[B + D(N-1)] \frac{\partial V}{\partial p} + r\alpha Ng \frac{\partial V}{\partial k}, \\ u = \frac{1}{w} \left(k - r\alpha N \frac{\partial V}{\partial k} \right). \end{cases} \quad (19)$$

将 (19) 代入方程

$$\begin{aligned} \rho V &= \frac{1}{2}\sigma_1^2 N \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} \\ &\quad + q \left(p - c - \frac{1}{2}q \right) + k(u + y - gq) - \frac{1}{2}wu^2 \\ &\quad + Ns \left[A - Bq - D(N-1)q - p \right] \frac{\partial V}{\partial p} \\ &\quad + r \left[E - \alpha N(u + y - gq) - k \right] \frac{\partial V}{\partial k}. \end{aligned} \quad (20)$$

得到

$$\begin{aligned} \rho V &= \frac{1}{2}\sigma_1^2 N \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} \\ &\quad + ky + \frac{k^2}{2w} + \frac{1}{2}(c + gk - p)^2 \\ &\quad + r \left[E - \alpha N(cg - gp + y) - \frac{k}{w}[w + \alpha N(1 + wg^2)] \right] \frac{\partial V}{\partial k} \\ &\quad + Ns \left[A - p - (c + gk - p)z \right] \frac{\partial V}{\partial p} \\ &\quad + rsg\alpha N^2 z \frac{\partial V}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial k} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(Nsz \frac{\partial V}{\partial p} \right)^2 + \frac{1 + wg^2}{2w} \left(r\alpha N \frac{\partial V}{\partial k} \right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$z = (1 - N)D - B. \quad (22)$$

特别地, 我们考虑具有如下形式的值函数:

$$V(p, k) = b_1 p^2 + b_2 k^2 + b_3 pk + b_4 p + b_5 k + b_6. \quad (23)$$

分别对 p 和 k 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = 2b_1, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} = 2b_2, \\ \frac{\partial V}{\partial k} = 2b_2 k + b_3 p + b_5, \\ \frac{\partial V}{\partial p} = 2b_1 p + b_3 k + b_4. \end{cases} \quad (24)$$

将(23), (24) 代入方程 (21) 再利用待定系数法, 即分别令以上代入后的等式两边 p^2, k^2, pk, p, k 的系数以及常数项分别相等, 得到以下六个等式, 即为系数 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 满足的关系。

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho b_1 = \frac{1}{2w} r^2 \alpha^2 N^2 b_3^2 - 2Ns b_1 + \frac{1}{2} \{1 - 2Ns [B + D(N-1)] b_1 + r\alpha N g b_3\}^2, \\ \rho b_2 = \frac{1}{2w} (1 - 2r\alpha N b_2)^2 - 2r b_2 + \frac{1}{2} \{2r\alpha N g b_2 - Ns [B + D(N-1)] b_3 - g\}^2, \\ \rho b_3 = \left[\frac{1}{w} r\alpha N (2r\alpha N b_2 - 1) - Ns - r \right] b_3 \\ \quad + \{1 - 2Ns [B + D(N-1)] b_1 + r\alpha N g b_3\} \{2r\alpha N g b_2 - Ns [B + D(N-1)] b_3 - g\}, \\ \rho b_4 = \frac{1}{w} r^2 \alpha^2 N^2 b_3 b_5 + 2Ns A b_1 - Ns b_4 + r (E - \alpha N y) b_3 \\ \quad + \{1 - 2Ns [B + D(N-1)] b_1 + r\alpha N g b_3\} \{r\alpha N g b_5 - Ns [B + D(N-1)] b_4 - c\}, \\ \rho b_5 = \frac{1}{w} r\alpha N b_5 (2r\alpha N b_2 - 1) + 2r (E - \alpha N y) b_2 + Ns A b_3 + y - r b_5 \\ \quad + \{2r\alpha N g b_2 - Ns [B + D(N-1)] b_3 - g\} \{r\alpha N g b_5 - Ns [B + D(N-1)] b_4 - c\}, \\ \rho b_6 = \frac{1}{2w} r^2 \alpha^2 N^2 b_5^2 + \sigma_1^2 N b_1 + \sigma_2^2 b_2 + Ns A b_4 + r (E - \alpha N y) b_5 \\ \quad + \frac{1}{2} \{r\alpha N g b_5 - Ns [B + D(N-1)] b_4 - c\}^2. \end{array} \right. \quad (25)$$

□

4 数值模拟与数据分析

在上一节中, 通过求解 HJB 方程, 我们得到了最优生产与水权交易问题值函数和最优策略的解析表达式。在本节中, 我们将利用定理 1 中的解析表达式, 采用数值模拟的方法, 进行参数敏感性分析, 研究和分析值函数、最优生产和节水决策决策的结构性质, 从而为公司的产品生产过程和水权交易行为提供一定的建议。

4.1 水权保留价格 E 的敏感性分析

在本小节中, 我们选取参数 $A = 2, B = 1, D = 0.1, g = 0.2, N = 100, \alpha = 0.01, w = 0.01, \rho = 0.04, r = 0.05, s = 0.002, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$, 数值模拟了不同水权保留价格 E 下值函数 $V(p, k)$ 、最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 和最优节水决策反馈函数 $u(p, k)$ 分别关于初始产品粘性价格 p 和水权粘性价格 k 的图像 (参见图 1-图 3)。通过数值模型和对做数值图像的分析, 我们有如下结论:

- (i) 通过图 1, 我们可以发现最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 关于水权保留价格 E 是单调递减的。也就是说, 如果水权交易市场中水权保留价格 E 越高, 往往说明市场中水资源越稀缺, 购买水权的成本也就越高; 而相反, 卖出水权的收益也越高较高。那么在这种情况下, 公司会更倾向于降低产品的产量 q 以减少水资源的使用量, 避免出现需要要较高价格从水权交易市场购入水权的情况。

(ii) 通过图 2, 我们可以发现最优节水计划反馈函数 $u(p, k)$ 关于水权保留价格 E 是单调递增的。也就是说, 如果水权交易市场中水权保留价格 E 越高, 往往说明市场中水资源越稀缺, 购买水权的成本也就越高; 相反, 卖出水权的收益也越高。那么在这种情况下, 公司会更倾向于增加节水量 u 以减少水资源的使用量, 转而卖出更多的水资源。

(iii) 通过图 3, 我们可以发现值函数 $V(p, k)$ 关于水权保留价格 E 是单调递增的。也就是说, 如果水权交易市场中水权保留价格 E 越高, 往往说明市场中水资源越稀缺, 购买水权的成本也就越高; 相反, 卖出水权的收益也越高。那么在这种情况下, 公司会卖出更多的水资源, 水权市场的收益增加, 故公司的最大预期收益 V 增加。

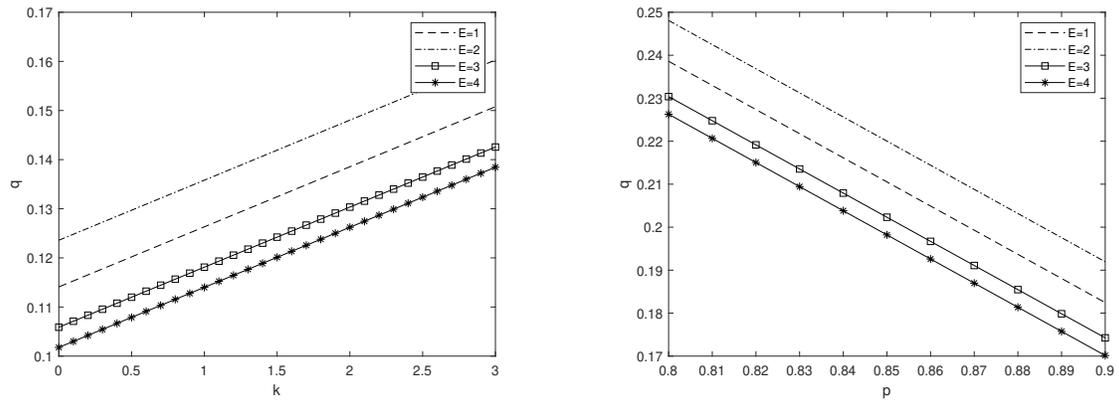


图 1: 左图: 最优生产计划反馈函数 $k \rightarrow q(p, k)$; 右图: 最优生产计划反馈函数 $p \rightarrow q(p, k)$.

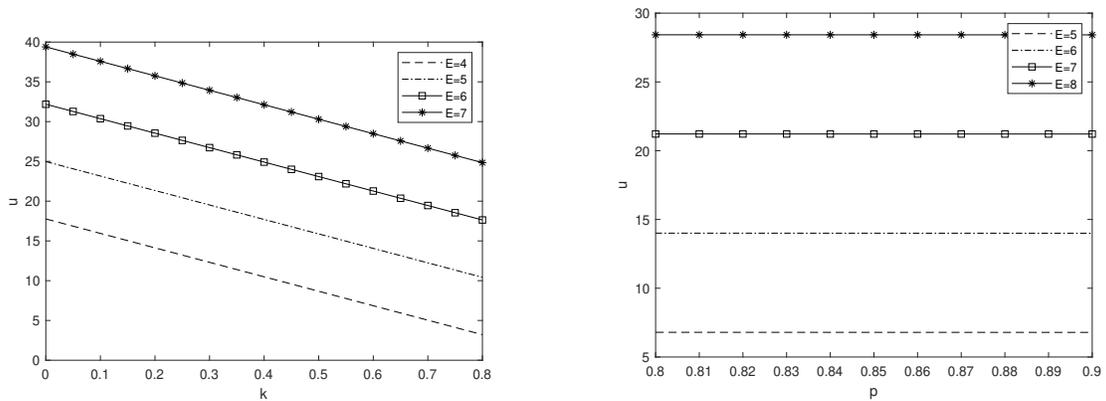


图 2: 左图: 最优节水计划反馈函数 $k \rightarrow u(p, k)$; 右图: 最优节水计划反馈函数 $p \rightarrow u(p, k)$.

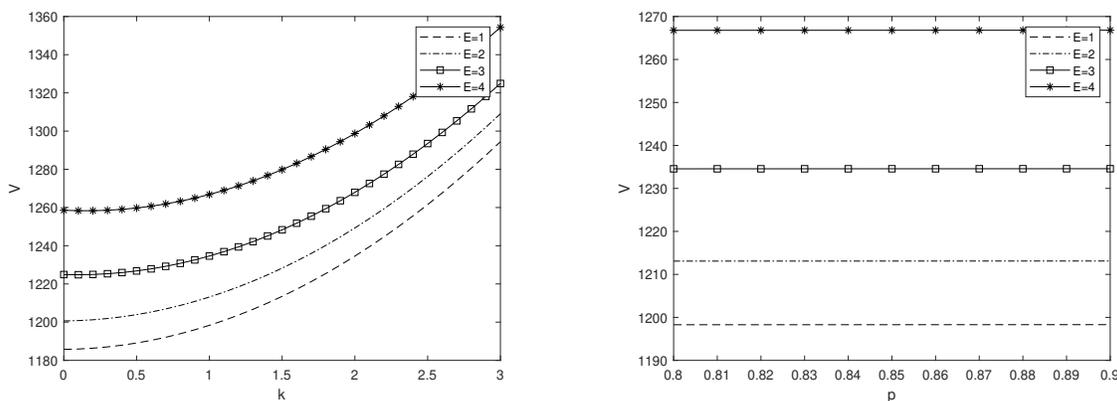


图 3: 左图: 值函数 $k \rightarrow V(p, k)$; 右图: 值函数 $p \rightarrow V(p, k)$.

4.2 政府给公司分配的的初始水权量 y 的敏感性分析

在本小节中, 我们选取参数 $A = 2$, $B = 1$, $D = 0.1$, $g = 0.2$, $N = 100$, $\alpha = 0.01$, $w = 0.01$, $\rho = 0.04$, $r = 0.05$, $s = 0.002$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, 数值模拟了不同政府给公司分配的的初始水权量 y 下值函数 $V(p, k)$ 、最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 和最优节水决策反馈函数 $u(p, k)$ 分别关于初始产品粘性价格 p 和水权粘性价格 k 的图像 (参见图 4-图 6). 通过数值模型和对做数值图像的分析, 我们有如下结论:

- (i) 通过图 4, 我们可以发现最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 关于政府给公司分配的的初始水权量 y 是单调递增的。也就是说, 如果在水权交易市场中政府给公司分配的的初始水权量越多, 往往说明该公司水资源越丰富, 有更多的水资源可以用于生产。那么在这种情况下, 公司会更倾向于增加产品的产量 q 以在产品市场上获得更多的收益。
- (ii) 通过图 5, 我们可以发现最优节水计划反馈函数 $u(p, k)$ 关于政府给公司分配的的初始水权量 y 是单调递减的。也就是说, 如果在水权交易市场中政府给公司分配的的初始水权量越多, 往往说明该公司水资源越丰富, 有更多的水资源可以用于生产; 相反, 在水权市场上流通较丰富的水资源, 导致其交易价格下降。那么在这种情况下, 公司会倾向于投入生产而不是水权交易, 公司的节水量 u 减少。
- (iii) 通过图 6, 我们可以发现值函数 $V(p, k)$ 关于政府给公司分配的的初始水权量 y 是单调递减的。也就是说, 如果在水权交易市场中政府给公司分配的的初始水权量越多, 往往说明该公司水资源越丰富, 有更多的水可以用于生产; 相反, 在水权市场上流通较丰富的水资源, 导致其交易价格下降。那么在这种情况下, 公司最大预期收益 V 降低的可能原因有: 在水权市场上的收益降低导致总收益降低; 市场上流通的水资源较多导致产品的均衡价格下降, 从而公司在产品市场上的收益也越少; 过度依赖政府分配的初始水权量, 导致公司在用水上技术研发更加懈怠。这对政府部门的启发是: 为支持公司生产只能适当增加初始水权量的分配, 最应该做的是鼓励节约用水技术研发, 从本质上解决问题。

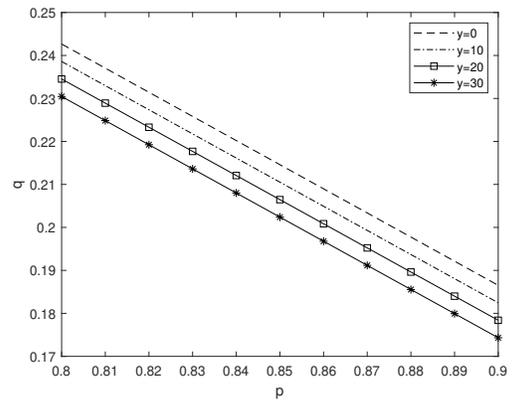
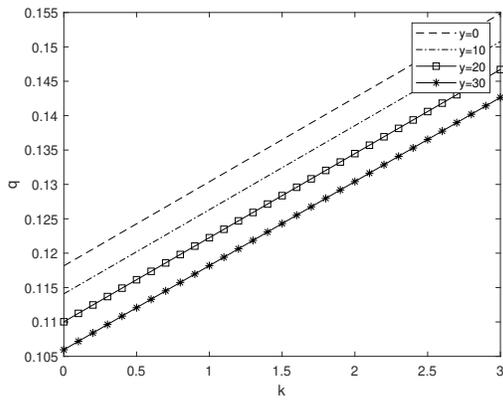


图 4: 左图: 最优生产计划反馈函数 $k \rightarrow q(p, k)$; 右图: 最优生产计划反馈函数 $p \rightarrow q(p, k)$.

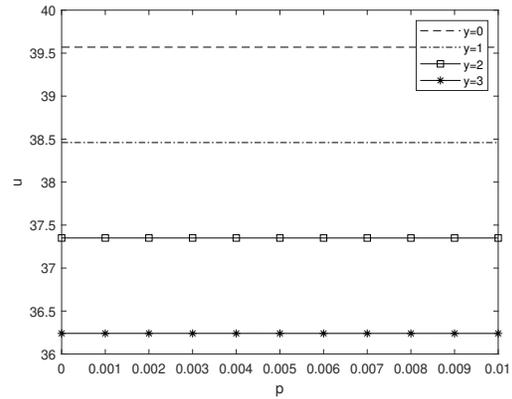
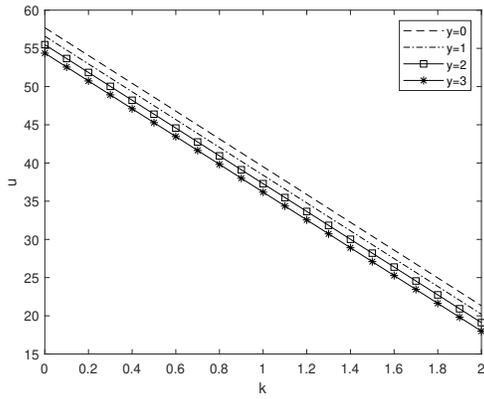


图 5: 左图: 最优节水计划反馈函数 $k \rightarrow u(p, k)$; 右图: 最优节水计划反馈函数 $p \rightarrow u(p, k)$.

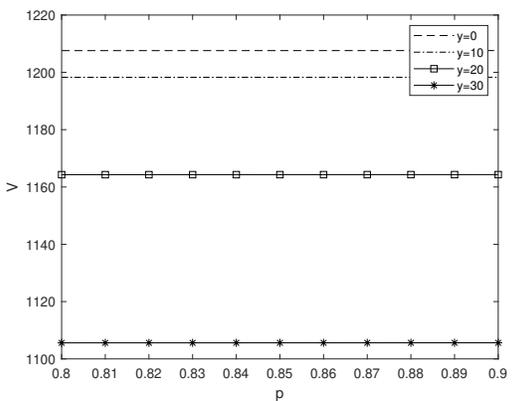
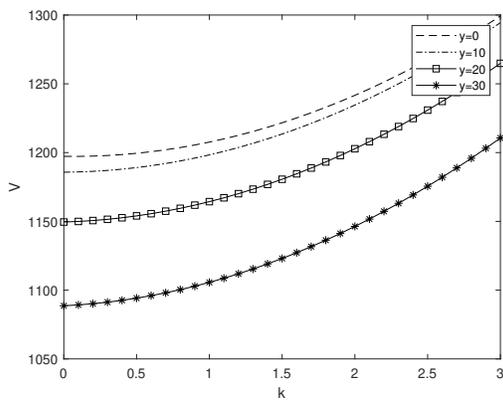


图 6: 左图: 值函数 $k \rightarrow V(p, k)$; 右图: 值函数 $p \rightarrow V(p, k)$.

4.3 节水量对于节水成本的影响系数 w 的敏感性分析

在本小节中，我们选取参数 $A = 2, B = 1, D = 0.1, g = 0.2, N = 100, \alpha = 0.01, w = 0.01, \rho = 0.04, r = 0.05, s = 0.002, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ，数值模拟了不同节水量对于节水成本的影响系数 w 下值函数 $V(p, k)$ 、最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 和最优节水决策反馈函数 $u(p, k)$ 分别关于初始产品粘性价格 p 和水权粘性价格 k 的图像 (参见图 7-图 9)。通过数值模型和对做数值图像的分析，我们有如下结论：

- (i) 通过图 7，我们可以发现最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 关于节水成本的影响系数 w 是单调递减的。也就是说，每单位水的节水成本变高，公司需要更加谨慎地控制用水量，从而减少节水量。那么在这种情况下，公司会更倾向于减少用水量，故产品的产量 q 下降。
- (ii) 通过图 8，我们可以发现最优节水计划反馈函数 $u(p, k)$ 关于节水成本的影响系数 w 是单调递减的。也就是说，每单位水的节水成本变高，公司需要更加谨慎地控制用水量，从而达到减少节水量 u 的目的，减少节水开销。
- (iii) 通过图 9，我们可以发现值函数 $V(p, k)$ 关于节水成本的影响系数 w 是单调递增的。也就是说，每单位水的节水成本变高，公司需要更加谨慎地控制用水量，从而减少节水量。那么在这种情况下，公司拥有丰富的水资源，会更加积极地参与水权交易，在水权市场的收益增加，故公司的最大预期收益 V 增加。

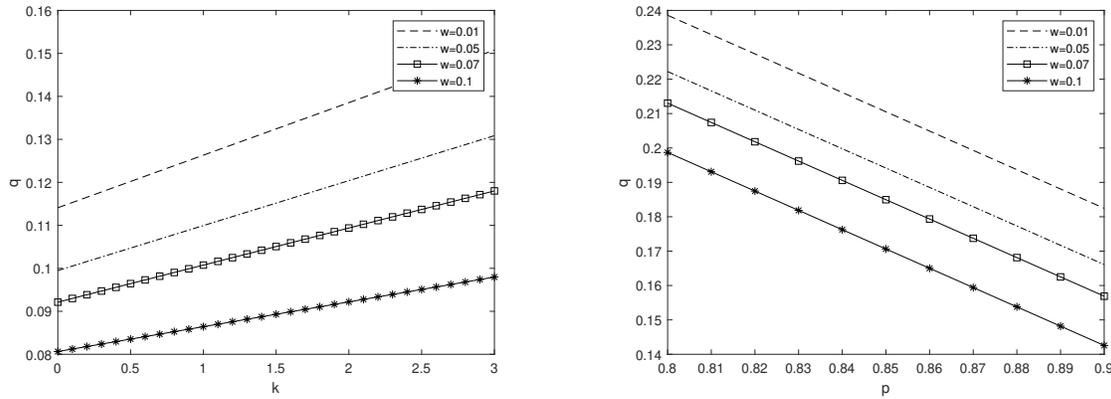


图 7: 左图：最优生产计划反馈函数 $k \rightarrow q(p, k)$ ；右图：最优生产计划反馈函数 $p \rightarrow q(p, k)$ 。

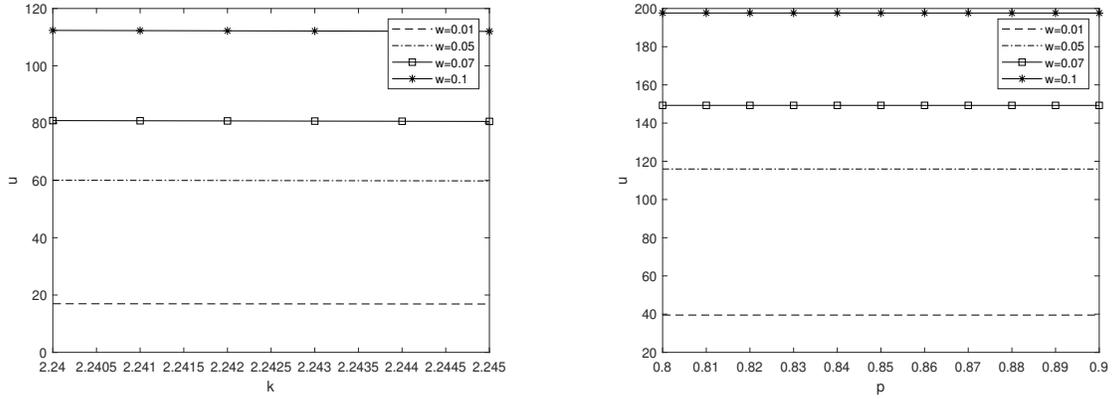


图 8: 左图: 最优节水计划反馈函数 $k \rightarrow u(p, k)$; 右图: 最优节水计划反馈函数 $p \rightarrow u(p, k)$.

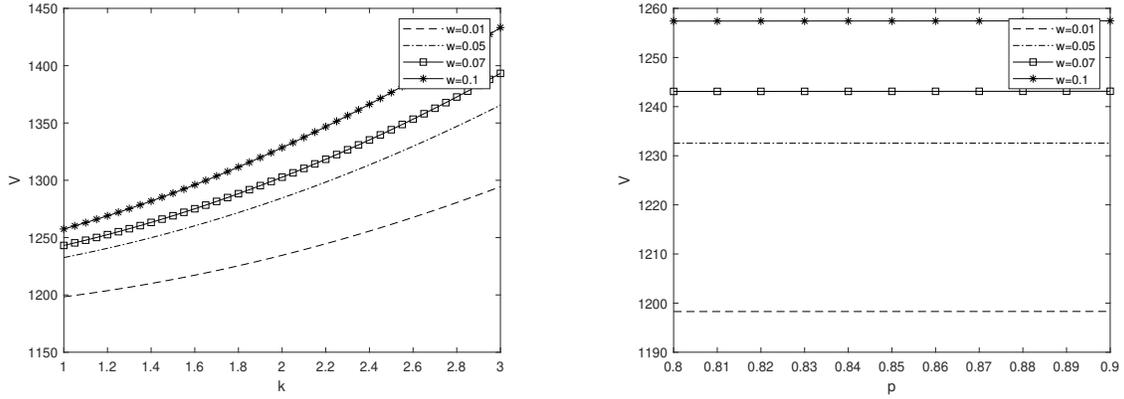


图 9: 左图: 值函数 $k \rightarrow V(p, k)$; 右图: 值函数 $p \rightarrow V(p, k)$.

4.4 产量对于用水量的影响系数 g 的敏感性分析

在本小节中, 我们选取参数 $A = 2, B = 1, D = 0.1, g = 0.2, N = 100, \alpha = 0.01, w = 0.01, \rho = 0.04, r = 0.05, s = 0.002, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$, 数值模拟了不同产量对于用水量的影响系数 g 下值函数 $V(p, k)$ 、最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 和最优节水决策反馈函数 $u(p, k)$ 分别关于初始产品粘性价格 p 和水权粘性价格 k 的图像 (参见图 10-图 12). 通过数值模型和对做数值图像的分析, 我们有如下结论:

- (i) 通过图 10, 我们可以发现最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 关于产量对于用水量的影响系数 g 是单调递减的。也就是说, 产量对于用水量的影响系数越大, 若公司产量不变, 则用水量增多、水权交易量下降。那么在这种情况下, 公司会更倾向于降低产品的产量 q 使得水权交易量尽量不会发生过大波动, 从而公司在水权交易市场上的收益能保持稳定。
- (ii) 通过图 11, 我们可以发现最优节水计划反馈函数 $u(p, k)$ 关于用水量的影响系数 g 是单调递增的。也就是说, 产量对于用水量的影响系数越大, 若公司产量不变, 则用水量增多、水权

交易量下降。那么在这种情况下，公司会更倾向于增加节水量 u ，使得公司用于交易的水资源尽量不会发生过大波动，从而公司在水权交易市场上的收益能保持稳定。

(iii) 通过图 12, 我们可以发现值函数 $V(p, k)$ 关于用水量的影响系数 g 是单调递增的。也就是说, 产量对于用水量的影响系数越大, 相同产量对应的用水需求增加、水权交易量下降。那么在这种情况下, 公司最大预期收益 V 增加的可能原因有: 公司采取适当策略 (例如加速节约用水技术研发), 公司的水资源得以维持, 通过水权交易的方式在用水需求增加的市场中获得更多的利润, 反而会使得预期收益增大。

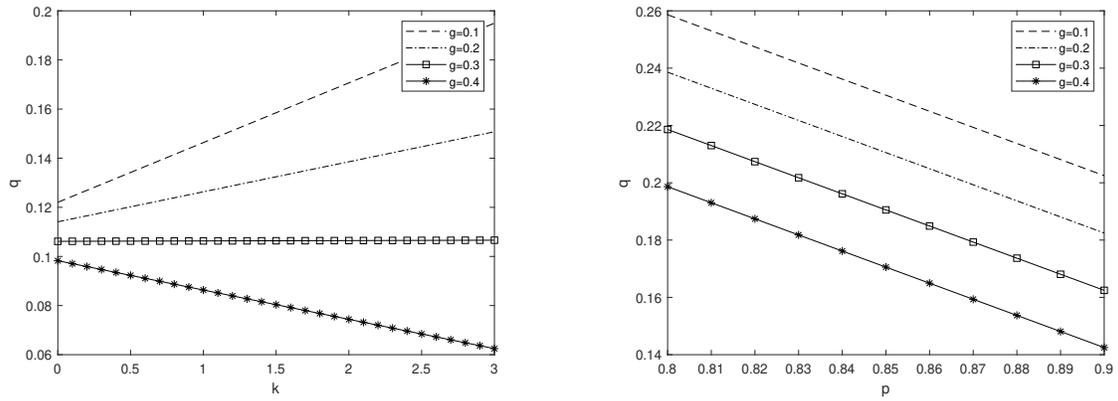


图 10: 左图: 最优生产计划反馈函数 $k \rightarrow q(p, k)$; 右图: 最优生产计划反馈函数 $p \rightarrow q(p, k)$.

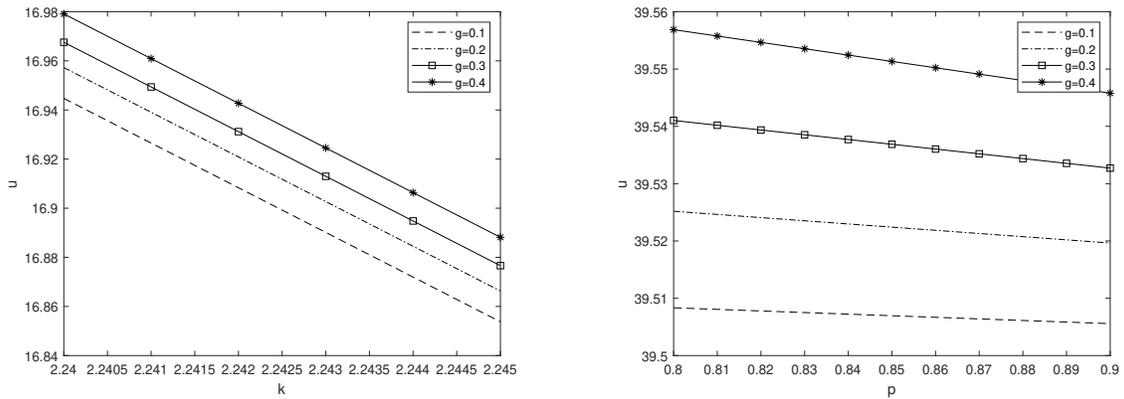


图 11: 左图: 值函数 $k \rightarrow u(p, k)$; 右图: 值函数 $p \rightarrow u(p, k)$.

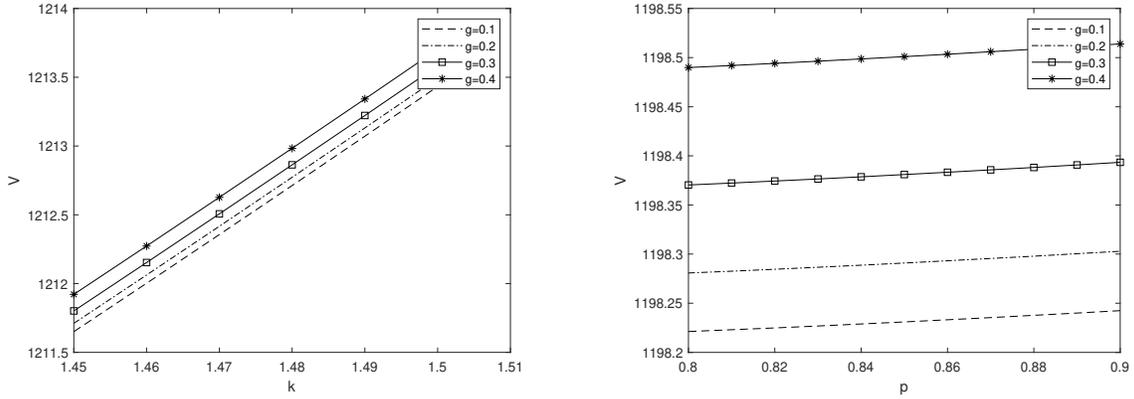


图 12: 左图: 值函数 $k \rightarrow V(p, k)$; 右图: 值函数 $p \rightarrow V(p, k)$.

4.5 自身产量对价格的影响系数 B 的敏感性分析

在本小节中, 我们选取参数 $A = 2$, $B = 1$, $D = 0.1$, $g = 0.2$, $N = 100$, $\alpha = 0.01$, $w = 0.01$, $\rho = 0.04$, $r = 0.05$, $s = 0.002$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, 数值模拟了不同自身产量对价格的影响系数 B 下值函数 $V(p, k)$ 、最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 和最优节水决策反馈函数 $u(p, k)$ 分别关于初始产品粘性价格 p 和水权粘性价格 k 的图像 (参见图 13-图 15). 通过数值模型和对做数值图像的分析, 我们有如下结论:

- (i) 通过图 13, 我们可以发现最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 关于自身产量对价格的影响系数 B 是单调递增的。也就是说, 如果产品市场中自身产量对价格的影响系数越高, 产品价格对产量的响应更敏感, 产量增加更快地导致价格下降。那么在这种情况下, 公司会更倾向于增加产品的产量 q , 采取“薄利多销”策略以达到最大的收益。
- (ii) 通过图 14, 我们可以发现最优节水计划反馈函数 $u(p, k)$ 关于自身产量对价格的影响系数 B 是单调递减的。也就是说, 如果产品市场中自身产量对价格的影响系数越高, 产品价格对产量的响应更敏感, 产量增加更快地导致价格下降。那么在这种情况下, 公司适当减小节水量 u 、减少节水成本可以达到最大的收益。
- (iii) 通过图 15, 我们可以发现值函数 $V(p, k)$ 关于自身产量对价格的影响系数 B 是单调递减的。也就是说, 如果产品市场中自身产量对价格的影响系数越高, 产品价格对产量的响应更敏感, 产量增加更快地导致价格下降。那么在这种情况下, 公司采取“薄利多销”策略, 用水量增加, 用于交易的水权减少, 公司在水权市场的收益减少, 故最大预期收益 V 变小。

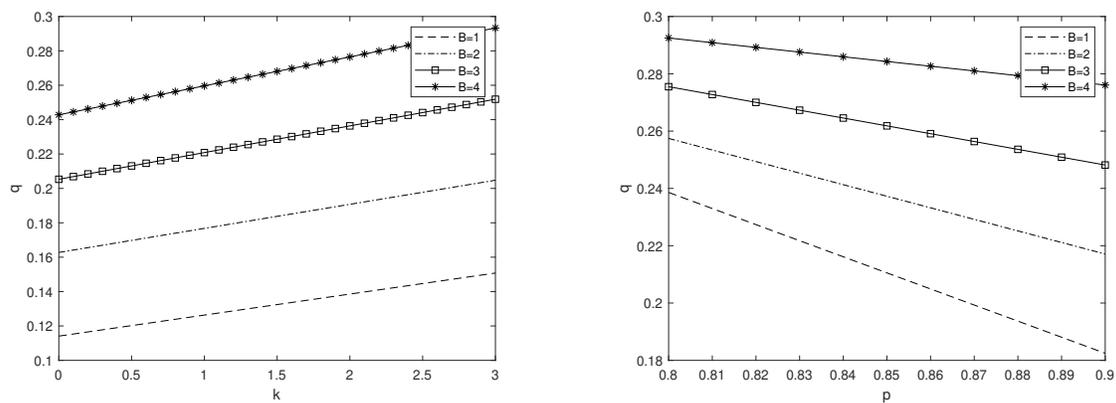


图 13: 左图: 最优生产计划反馈函数 $k \rightarrow q(p, k)$; 右图: 最优生产计划反馈函数 $p \rightarrow q(p, k)$.

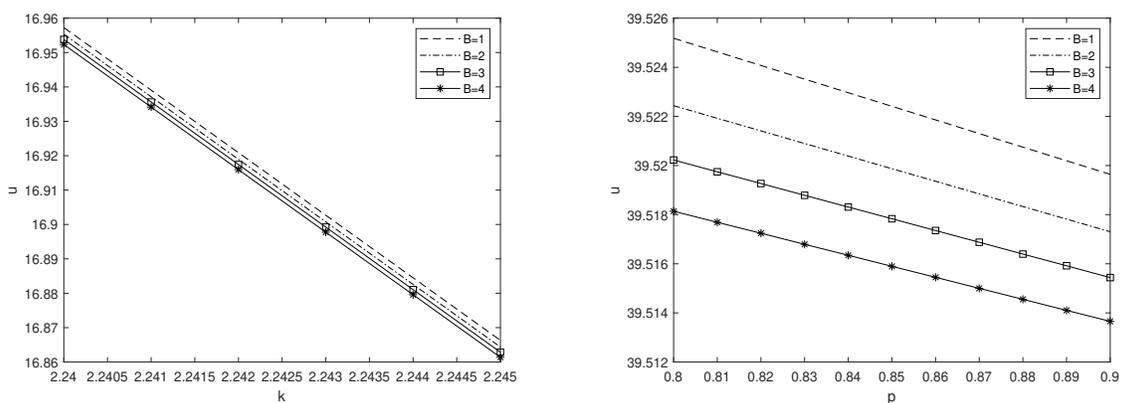


图 14: 左图: 最优节水计划反馈函数 $k \rightarrow u(p, k)$; 右图: 最优节水计划反馈函数 $p \rightarrow u(p, k)$.

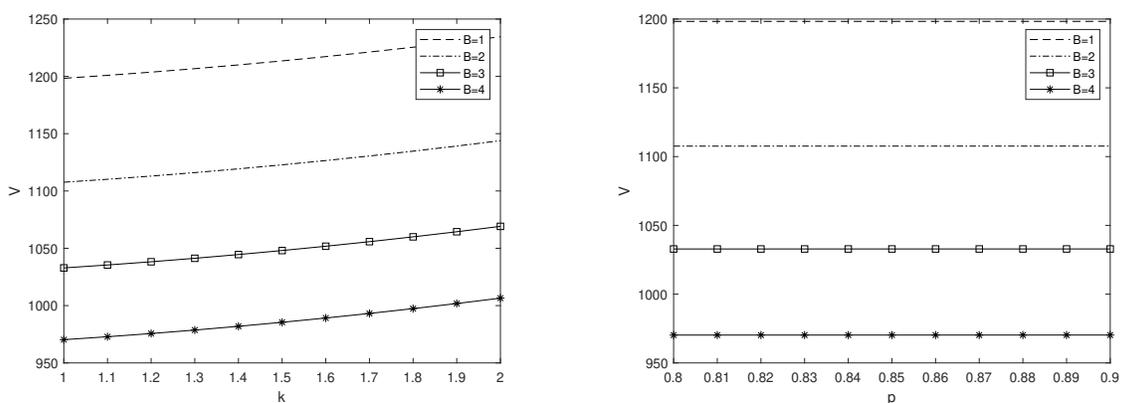


图 15: 左图: 值函数 $k \rightarrow V(p, k)$; 右图: 值函数 $p \rightarrow V(p, k)$.

4.6 产品市场上的保留价格 A 的敏感性分析

在本小节中，我们选取参数 $A = 2$, $B = 1$, $D = 0.1$, $g = 0.2$, $N = 100$, $\alpha = 0.01$, $w = 0.01$, $\rho = 0.04$, $r = 0.05$, $s = 0.002$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, 数值模拟了不同产品市场上的保留价格 A 下值函数 $V(p, k)$ 、最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 和最优节水决策反馈函数 $u(p, k)$ 分别关于初始产品粘性价格 p 和水权粘性价格 k 的图像 (参见图 16-图 18). 通过数值模型和对做数值图像的分析, 我们有如下结论:

- (i) 通过图 16, 我们可以发现最优生产计划反馈函数 $q(p, k)$ 关于产品市场上的保留价格 A 是单调递增的。也就是说, 如果产品市场上的保留价格 A 越高, 公司在每单位商品上获利增加。那么在这种情况下, 公司会更倾向于增加产品的产量 q , 从而在产品市场上获利增加, 以达到最大的预期收益。
- (ii) 通过图 17, 我们可以发现最优节水计划反馈函数 $u(p, k)$ 关于产品市场上的保留价格 A 是单调递增的。也就是说, 如果产品市场上的保留价格 A 越高, 公司在每单位商品上获利增加。那么在这种情况下, 公司为达到更大收益倾向于增加产量, 同时由于总用水量有限, 要求增加节水量 u 来满足产量增加的需要。
- (iii) 通过图 18, 我们可以发现值函数 $V(p, k)$ 关于产品市场上的保留价格 A 是单调递增的。也就是说, 如果产品市场上的保留价格 A 越高, 公司在每单位商品上获利增加。那么在这种情况下, 公司会更倾向于增加产品的产量, 从而在产品市场上获利增加, 最大预期收益 V 也增加。

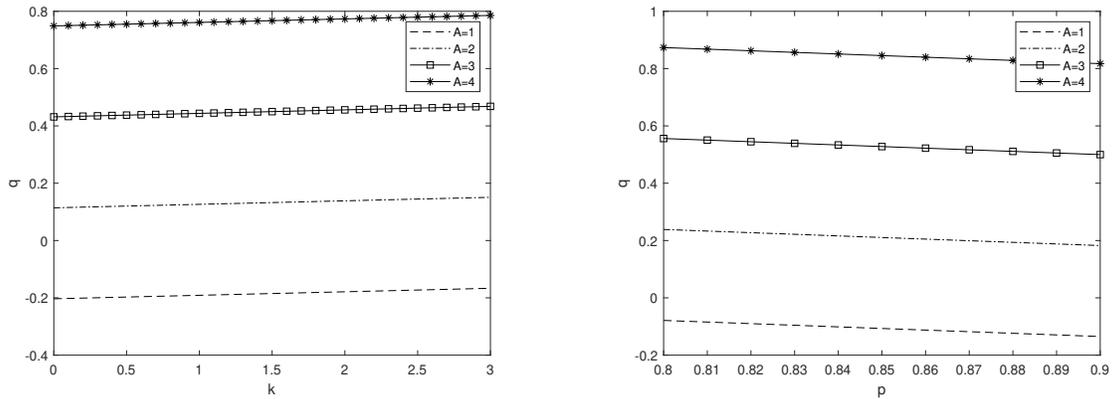


图 16: 左图: 最优生产计划反馈函数 $k \rightarrow q(p, k)$; 右图: 最优生产计划反馈函数 $p \rightarrow q(p, k)$.

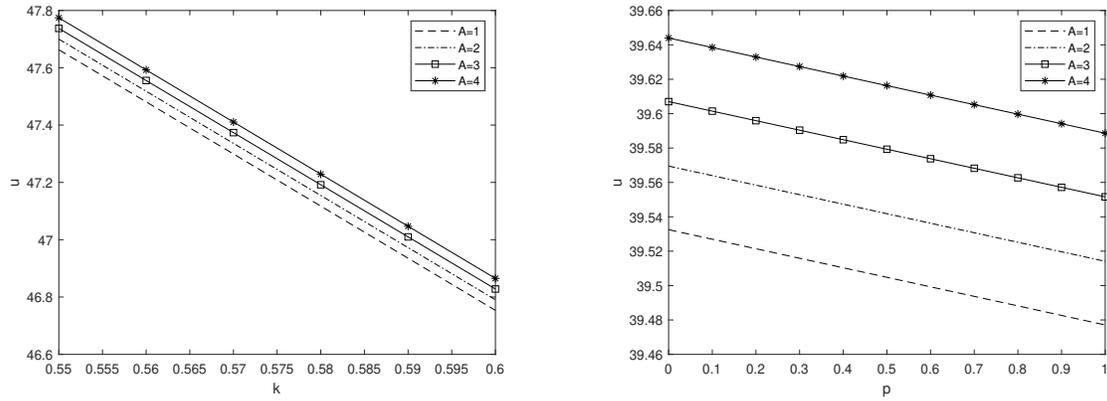


图 17: 左图: 最优节水计划反馈函数 $k \rightarrow u(p, k)$; 右图: 最优节水计划反馈函数 $p \rightarrow u(p, k)$.

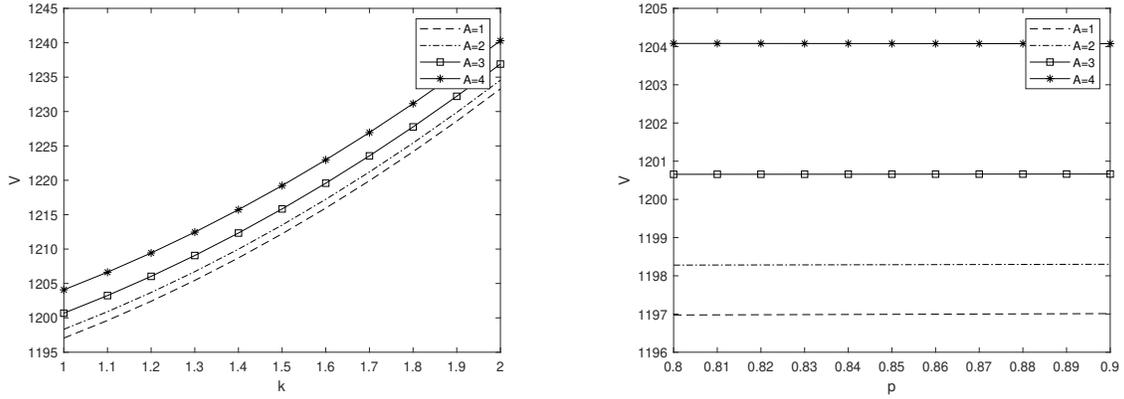


图 18: 左图: 值函数 $k \rightarrow V(p, k)$; 右图: 值函数 $p \rightarrow V(p, k)$.

5 结论

本文从如今日益严重的水资源短缺问题这一背景出发, 通过引入粘性价格, 研究了价格对实际市场供应关系变化的反应具有迟滞性的情形下, 公司生产计划与水权交易决策的随机最优化控制问题。我们利用动态规划原理推导了值函数满足的 HJB 方程, 并通过解析求解 HJB 方程, 得到了值函数以及公司的最优生产与水权交易决策的反馈函数的解析表达式。此为, 利用解析表达式, 我们通过数值模拟进行了参数敏感性分析, 研究了值函数以及公司的最优生产与水权交易决策的反馈函数的结构性质, 同时结合实际市场情况进行了分析和解释。本文结果对于实际市场中公司的经营和管理具有一定指导意义。

References

- [1] David Seckler, Randolph Barker, and Upali Amarasinghe. Water scarcity in the twenty-first century. *International Journal of Water Resources Development*, 15(1-2):29–42, 1999.
- [2] Amelia Blanke, Scott Rozelle, Bryan Lohmar, Jinxia Wang, and Jikun Huang. Water saving technology and saving water in china. *Agricultural water management*, 87(2):139–150, 2007.
- [3] 张仁田 and 童利忠. 水权, 水权分配与水权交易体制的初步研究. *水利发展研究*, 2(5):13–17, 2002.
- [4] AM Zaman, Hector M Malano, and Bart Davidson. An integrated water trading–allocation model, applied to a water market in australia. *Agricultural Water Management*, 96(1):149–159, 2009.
- [5] Baogui Xin and Minghe Sun. A differential oligopoly game for optimal production planning and water savings. *European Journal of Operational Research*, 269(1):206–217, 2018.
- [6] Carlos Carvalho, Jae Won Lee, and Woong Yong Park. Sectoral price facts in a sticky-price model. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 13(1):216–56, 2021.