实分析

测度

- 外测度
  - 首先有矩体体积

    $$m^*(E) = \inf_{\bigcup_j J_j \supset E} \sum_{j=1}^{\infty} |J_j|$$

  - 性质
    - 可数次可加性

      $$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j)$$

    - 外侧开集逼近
    - 正距离可拆
    - 切方块不损失体积
    - 平移不变性

      $$m^*(E+\{x_0\}) = m^*(E)$$

- 测度
  - 等价条件

    $\forall \varepsilon>0.\ \exists O$开 $m^*(O\setminus E)<\varepsilon$
    $\Leftrightarrow$ $\forall T\subset\mathbb{R}^d.\ m^*(T) = m^*(T\setminus E) + m^*(T\cap E)$

  - 可测集结构

    E可测 $\Leftrightarrow$ $E = G_\delta \setminus$ 零测 $\Leftrightarrow$ $E = F_\sigma \cup$ 零测

  - 性质

    $\forall E\subset\mathbb{R}^d.\ \exists G_\delta$集 $G.\ m^*(G) = m^*(E)\ \ E\subset G$

    - 可数可加性
    - 测度单调收敛
    - 刻画
    - 紧集逼近
    - 有限个方块对称差逼近
    - 不变性
    - 不可测集
    - B-C引理

      $E_j\subset\mathbb{R}^d$可测. $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j)<\infty \Rightarrow m^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) = 0$

可测函数

- 等价条件
  - 单调简单函数逼近非负函数
- 逼近定理
  - 简单函数点点逼近可测函数
- 收敛性
  - 阶梯函数ae逼近
- Egorov定理
- Lusin定理

积分

- 构造
  - 简单
  - 非负
  - 可积（等价于绝对可积）
- 交换次序定理
  - MCT

    设$\{f_n\}$非负 $f_n\le f_{n+1}$ a.e. $\Rightarrow \int \lim f_n = \lim \int f_n$

  - Fatou

    设$\{f_n\}$非负. 则 $\int \varliminf f_n \le \varliminf \int f_n$

  - DCT

    设$\{f_n\}\in L^1$. $\exists g\in L^1$. $|f_n|\le g$ 且 $\lim f$ 存在 a.e.
    $\Rightarrow \int \lim f_n = \lim \int f_n$

  - Tonelli

    设 $f:\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 且可测. 则 f_x. f^y可测. 且
    $\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}} f = \int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f\,dx\right)dy$

  - Fubini

    设 $f:\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 可积. 则 f_x. f^y a.e. 可积 且可交换
    $\int |f(x)|\,dy<\infty$ a.e. x $\quad \int |f(y)|\,dx<\infty$ a.e. y

- 可积函数性质
  - 连续性

    $\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta>0.\ m^*(E)<\delta\ \ \int_E |f|<\varepsilon$

  - 远处小

    $\forall\varepsilon>0.\ \exists E$使 $m^*(E)<\infty.\ \int_{E^c}|f|<\varepsilon$

  - 高处小

    $\forall\varepsilon>0.\ \exists M>0.$ 使 $\int_{\{|f|\ge M\}}|f|<\varepsilon$

  - 平移连续性

    $$\lim_{y\to 0}\int |f(x+y)-f(x)|\,dx = 0$$

微分

- L^p 空间
  - 不等式
    - Young
    - Holder
    - E测度有限，高模控低模
    - 插值不等式
    - Minkowski
      - 成立等价于凸集

        $L^p(E)$ $X=\{f\in L^p(E)\mid \|f\|_p\le 1\}$ x是凸集 $\Leftrightarrow$ $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$ $\forall f,g$

  - 完备性
  - 高级性质
    - 完备性
    - 逼近性
    - 平移连续
  - L2内积空间
  - Lp对偶空间
- 覆盖引理
  - 球覆盖
    - 引理

      设 $B_1,\dots,B_m$ 有限个球 则一定存在其中 m 些 $B_{i_1},\dots,B_{i_k}$ 使得 $m(\bigcup_{i=1}^m B_i)\le 3^d\sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) = 3^d m(\bigcup_{j=1}^k B_{i_j})$ 称为 Vitali Covering 覆盖引理

    - 测度用球定义定价
    - 日升引理

      Rising Sun Lemma (R.R.) $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续. $E=\{x\in(a,b)\mid \exists h>0.\ x+h\in(a,b)$ 且 $G(x+h)>G(x)\}$
      则 E开 $E=\bigcup(a_k,b_k)$ 且 $G(b_k)\le G(a_k)$

    - Vitali覆盖

      (Vitali Covering Lemma)
      · Def(Vitali cover) 设 $E\subset\mathbb{R}^d$ 称 $\mathcal{F}$ 为 Vitali Cover 若 $\forall x\in E.\ \forall\varepsilon>0.\ \exists B\in\mathcal{F}$ 使 $x\in B.\ m(B)<\varepsilon$
      同时 $B_1,\dots,B_m$ 满足 其中必有 $\mathcal{F}$ 不交 (不相交指的 $B_i\cap B_j=\emptyset$) 则 $m(\bigcup_{i=1}^m B_i)\le 3^d\sum_{i=1}^m m(B_i)$
      · Lemma 设 E 有限可测 $\mathcal{F}$ 是 Vitali Cover 则 $\forall\varepsilon>0.\ \exists B_1,\dots,B_m$ 互不相交 $\in\mathcal{F}$ 使
      ① $\sum_{i=1}^m m(B_i)\ge m(E)-\varepsilon$ 在 Vitali 覆盖中找点够大 m 不交球总可得.
      ② $m(E\setminus\bigcup_{i=1}^m B_i)<2\varepsilon$

  - Vitali覆盖
- Lebesgue微分定理
  - 极大函数

    (HL-maximal function) $f:\mathbb{R}^d$ 可积.
    $f^*(x)\triangleq\sup_{x\in B球}\frac{1}{m(B)}\int_B|f|$ $\quad f^*$ 可测 且 $\le+\infty$

  - 几乎处处大于绝对值
    - 可积性估计

      设 f 可测. 则 $\alpha>0$ 若 $f\in L^1$ 则 f^* 可测 (一定性质上使指数) $m(\{f^*(x)>\alpha\})\le$ 最小值. $A=3^d$ $\Rightarrow f^*$ a.e 有限

    - 几乎处处有限
  - 密度点

    $$\lim_{\substack{x\in B\\ |B|\to 0}}\frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1$$

    - E和E的密度点对称差零测
  - Lebesgue点

    $$\lim_{\substack{x\in B\\ |B|\to 0}}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)-f(x)|\,dy = 0$$

    - 几乎所有点是Lebesgue点
- Good kernel 和 逼近恒同
  - Good kernel

    (1) $\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta=1$
    (2) $\int_{\mathbb{R}^d}|K_\delta|\le A$
    (3) $\forall\eta>0$ $\int_{\{|x|\ge\eta\}}|K_\delta|\xrightarrow{\delta\to 0}0$ 则称 Good kernel

    - 性质
      - f连续有界，卷积点点逼近
      - f L1，卷积L1逼近
  - Approximations to the identity
    - 是Good kernel
    - f L1，卷积ae逼近
  - 应用
    - L1函数可以被磨光逼近
    - f是L1，Fouier级数Cesaro求和ae收敛到f
    - 三角多项式逼近
- BV
  - 两个单调增的差

    $f(x)-f(a) = Pf(a,x) - Nf(a,x)$

  - 连续BV的变差函数连续
  - 半个NL公式
- AC