5.12 习题课

1. $d(x,\mathbb{R}^n\setminus G)+d(x,F)=0 \Leftrightarrow x\in(\mathbb{R}^n\setminus G)\cap F=\phi$，故 $f(x)$ 分母恒正，即 f 是良定的

而对 $\forall x,y,z$，$d(x,z)-d(y,z)\le d(x,y) \Rightarrow d(x,F)\le d(y,z)+d(x,y)$，右边取 inf 有 $d(x,F)-d(y,F)\le d(x,y)$

同理 $d(y,F)-d(x,F)\le d(x,y) \Rightarrow |d(x,F)-d(y,F)|\le d(x,y)$ 即 f 连续

2 (1) $f\in L^p$，当 $f\geq 0$ 时，则 $\exists \varphi_k$ 简单使 $\varphi_k^p \nearrow f^p$，由 DCT $\int f^p dm=\lim\int \varphi_k^p dm$

对 f 不恒正时，考虑 $f=f^+-f^-$ 即可

(2) 只用证明阶梯函数在简单函数中稠密，而对任意 E 可测，存在 $m(E\Delta(\bigcup_{i=1}^m R_i))<\varepsilon$ $\psi=\sum_{i=1}^m \chi_{R_i}$ $\|\chi_E-\psi\|_p<\varepsilon$

(3) 只用证明 $\forall R$ 矩体 $\forall\varepsilon>0$ $\exists g\in C_c(R)$ s.t. $\|\chi_R-g\|_p<\varepsilon$ 取 $\hat{R}$ 使 $m(\hat{R}\setminus R)<\varepsilon^p$

由 Urysohn 引理 $\exists g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ s.t. $0\le g\le 1$ $g=1$ on R $g=0$ on $\mathbb{R}^n\setminus\hat{R}$

故 $\|\chi_R-g\|_R<\left(\int_{\hat{R}\setminus R}(1)^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$

2.14, 17, 20, 21, 19

14. (a) 令 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0\le y\le\sqrt{r^2-x^2}\}$

则 $m(A)=\frac{1}{2}m(B)=\int_{\mathbb{R}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx \Rightarrow m(B)=2\int_{\mathbb{R}}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=2r^2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

(b) 令类似在 $\mathbb{R}^d$ 中 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R} \mid 0<x_d\le\sqrt{r^2-(x_1)^2-\cdots-(x_{d-1})^2}\}$

故 $m(B)=2m(A)=2\int_{|x|<r}\cdots\sqrt{r^2-|x|^2}\,dx=2r^d\cdot\int_{|x|<1}\sqrt{1-|x|^2}\,dx_1\cdots dx_{d-1}$

$$=2r^d\int_{-1}^{1}dx_1\cdot\int_{|x|<\sqrt{1-x_1^2}}\sqrt{(1-x_1^2)-|x|^2}\,dx_2\cdots dx_{d-2}$$

$$=2r^d\int_{-1}^{1}V_{d-1}\cdot(1-x_1^2)^{\frac{d-1}{2}}\,dx_1$$

(c) 用(2)归纳，只用证 $\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}$ 即可

而 $RHS=\int_0^1(1-t)^{\frac{d-1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt=B(\frac{1}{2},\frac{d+1}{2})\cdot\frac{1}{2}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d}{2}+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{d}{2}+1)}=\sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$

17. 当 $n\le y\le n+1$ 时 $f^y(x)=\begin{cases}a_n & n\le x<n+1\\ -a_{n-1} & n-1<x<n\end{cases}$ $f_x=\begin{cases}a_n & \cancel{y<n}\ n\le y<n+1\\ -a_n & n+1\le y<n+2\end{cases}$

($n\geq 1$ 时)

当 $n=0$ 时 $f^y(x)=\begin{cases}a_0 & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$ 且 $\iint f(x,y)\,dx\,dy=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}(a_n-a_{n-1})=S$

则 (a)(b) 之得

(c) $\int_{\mathbb{R}^2}|f|>2\sum_{n=1}^{\infty}a_n>\infty$

20. 令$C=\{E\subset R^2 \mid E^y$是$R$上的Borel集$\}$

① 对$\forall\ O\subset R^2$开集，$(x,y)\in O$，$\exists B_\varepsilon(x,y)\subset O \Rightarrow B_\varepsilon(x)\subset O^y \Rightarrow O\subset C$

② 只用验证C是σ-代数

(1) 显然$\phi, R^2\in C$

(2) 若$E\subset C$，$(E^y)\cup(E^c)^y=R \Rightarrow E^c\subset C$

(3) 若$E_n\subset C$，则$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)^y=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)^y \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset C$

21. (a) 由P36，3.9　$f(x-y)$可测，由定义　$g(y)$可测　$\Rightarrow f(x-y)g(y)$可测

(b) $\int_{R^{2d}}|f(x-y)g(y)|=\int_{R^d}\int_{R^d}|f(x-y)||g(y)|\le\|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1}<\infty$

(c) 由Fubini定理

(d) 即(b)

(e) 有界 $|\hat{f}(\xi)|\le\int_{R^d}|f(x)|\,dx\le M$

连续　由于$e^{-2\pi i x\xi_1}$连续

$\downarrow$

当$\xi_1\to\xi$时　$f(x)e^{-2\pi i x\xi_1}\to f(x)e^{-2\pi i x\xi_0}$　由控制收敛定理$\hat{f}$连续

故$|\hat{f}(\xi_1)-\hat{f}(\xi_2)|\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

验证：$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{R^d}\left(\int_{R^d}f(x-y)g(y)\,dy\right)e^{-2\pi i x\xi}\,dx\overset{\text{Fubini}}{=\!=}\int_{R^d}g(y)e^{-2\pi i y\xi}\,dy\int_{R^d}f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\xi}\,dx$

$=\hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$

19. $f\in L^p(R^d)$　则$\int_{R^d}|f(x)|^p\,dx=\int_{R^d}\int_0^{\infty}\chi_{\{|f(x)|^p>\alpha\}}\,d\alpha=\int_{R^d}\int_0^{\infty}\chi_{E_{\alpha^{1/p}}}\,d\alpha=\int_0^{\infty}\int_{R^d}\chi_{E_{\alpha^{1/p}}}\,d\alpha$

$=\int_0^{\infty}m(E_{\alpha^{1/p}})\,d\alpha=\int_0^{\infty}m(E_\alpha)\alpha^{p-1}\cdot p\,d\alpha$