1. 若 $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$，则 $\|f\|_p = \sup |\int fg|$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$1 \le p \le \infty$. $\|g\|_q = 1$, g 简单

Stein 的定义

即 $g = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{F_j}$

$m(F_j) < \infty$

证明：令 $E_n = \{|x| < n\} \cap \{|f| < n\}$

则 $E_n \nearrow \mathbb{R}^d \setminus \{|f| = \infty\}$

由 $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$\Rightarrow m(\{|f| = \infty\}) = 0$

$$\Rightarrow \int |f|^p = \lim_{n\to\infty} \int |f\chi_{E_n}|^p$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int |f|^p \chi_{E_n} \quad \forall 1 \le p < \infty$$

不妨设 f 不恒为 0

$1 \le p < \infty$：令 $g_0 = f^{p-1}\chi_{E_n} \|f\chi_{E_n}\|_p^{-\frac{p}{q}} \cdot \frac{|f|^p}{f^p}\chi_{\{f \neq 0\}}$

则 $\|g_0\|_q = 1$

$$\int f\chi_{E_n} g_0 = \|f\chi_{E_n}\|_p$$

由简单函数在 L^q 上稠密（$q = \infty$ 时，由 $m(E_n) < \infty$ 得）

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists h \text{ simple},\ \|(g_0-h)\chi_{E_n}\|_q < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left|\int f\chi_{E_n} h\right| \geq \left|\int f\chi_{E_n} g_0\right| - \left|\int f\chi_{E_n}(g_0-h)\right|$$

$$\|f\chi_{E_n}\|_p\,(1-\varepsilon)$$

又 $\left|\int f\chi_{E_n} g\right| \leq \|f\chi_{E_n}\|_p \|g\|_q$

$$\Rightarrow \quad \|f\chi_{E_n}\|_p = \sup_{\|g\|_q=1,\ g\text{简单}} \left|\int f\chi_{E_n} g\right|$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_p = \sup_{\|g\|_q=1,\ g\text{简单}} \left|\int f g\right|$$

$p=\infty$ 情形留作练习

2. 积分型Minkowski不等式

设 f 在 $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 上可测，且 $f\geq 0$

则 $$\left\|\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx\right\|_{L^p(\mathbb{R}^{d_2})} \leq \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \|f(x,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d_2})}\,dx$$

$1\leq p\leq\infty$

证明： $\left\|\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx\right\|_{L^p(\mathbb{R}^{d_2})}$

$$= \sup_{\|g\|_q=1} \left|\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\, g(y)\,dx\,dy\right|$$

$$= \sup_{\|g\|_q=1} \left|\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\, g(y)\,dy\,dx\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \|f(x,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d_2})}\,dx$$

3. 设 f 可测，且 $\forall g \in L^q$，$\int|fg| < \infty$

则 $f \in L^p$

证明： 若 $\|f\|_p = \infty$

则 $\forall n>0$，$\exists g_n$ 简单，$\|g_n\|_q = 1$，

$\left|\int f g_n\right| \ge n^2$.

令 $g = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{|f g_n|}{f} \chi_{\{f\neq 0\}}$

则 $g \in L^q$

但 $\int fg = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int |f g_n|$

$= \infty$

4. Schur 试验：设 $p>1$，$H(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 非负可测

若存在 $\mathbb{R}^d$ 上正可测函数 h，且

$$\int H(x,y) h^p(x)\, dx \le C_1 h^p(y) \quad a.e.\ y$$

$$\int H(x,y) h^q(y)\, dy \le C_2 h^q(x) \quad a.e.\ x$$

则 $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，成立

$$\left\| \int H(x,y) f(y)\, dy \right\|_p \le C_1^{\frac{1}{p}} C_2^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$$

证明：$\left| \int H(x,y) f(y)\, dy \right|$

$$\le \int H(x,y) |f(y)| \frac{h(y)}{h(y)}\, dy$$

$$\leq \left(\int H(x,y)h^q(y)\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int H(x,y)h^{-p}(y)|f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_2^{\frac{1}{q}}h(x)\left(\int H(x,y)h^{-p}(y)|f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

a.e. x

$$\Rightarrow \left\|\int H(x,y)f(y)\,dy\right\|_p$$

$$\leq C_2^{\frac{1}{q}}\left(\int h^p(x)\int H(x,y)h^{-p}(y)|f(y)|^p\,dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= C_2^{\frac{1}{q}}\left(\iint H(x,y)h^p(x)\,h^{-p}(y)|f(y)|^p\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_1^{\frac{1}{p}}C_2^{\frac{1}{q}}\|f\|_p$$

5. Young 不等式：设 $1\leq p,q,r\leq\infty$, $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

则 $\|f*g\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q$

证明：不妨设 $f,g\geq 0$

$$f(y)g(x-y)=f(y)^{\frac{p}{r}}g(x-y)^{\frac{q}{r}}f(y)^{1-\frac{p}{r}}g(x-y)^{1-\frac{q}{r}}$$

由 Holder 不等式,

$$\int f(y)\, g(x-y)\, dy \le \left(\int f(y)^p\, g^q(x-y)\, dy\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{r}}$$

$$\Rightarrow \quad \|f*g\|_r \le \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{r}} \left(\iint f(y)^p\, g(x-y)^q\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \|f\|_p \|g\|_q$$