Borel set 作业题. 依测度收敛/近乎一致收敛. 一致可积

1、关于 Borel set 作业题: f 可测 $\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}_R$. $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}$.

$\mathcal{B}_R$ 为 σ(open sets) = 包含所有 open sets 的最小 σ-代数.
= 所有包含 $\mathcal{O}$ = {open sets} 的 σ-代数之交.

定义集类 $\mathcal{E} = \{B : f^{-1}(B) \in \mathcal{L}\}$ $\Rightarrow \mathcal{E}$ is a σ-algebra.

开集全体 $\mathcal{O} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \sigma(\mathcal{O}) \subset \mathcal{E}$ □.

注: $\mathcal{B}_R$ 集难以显式表达. 不要写"$\forall B \in \mathcal{B}_R$ 则 $B = \bigcup O_n \bigcup F_n \cdots$" 写出来好像对, 但自己说不清为何可这样.

2、收敛性的集合表述

(1)、$f_n \to f$ a.un $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$. $\lim\limits_{k\to\infty} m(\bigcup\limits_{n\geq k}^{\infty} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$ ($\geq$)

(2)、$f_n \to f$ a.e. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$. $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\geq k}^{\infty}\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$ (check).

(3)、$f_n \to f$ in m. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $m(\{x \in E . |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$.

由以上三式可以直观看出 $f_n \xrightarrow{a.un} f$ 可推出 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$, $f_n \xrightarrow{m} f$

称 f_n 近乎一致收敛于 f: $f_n \to f$ a.un. , 若 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists A_\varepsilon$. $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$
s.t. $f_n \rightrightarrows f$ on $E \setminus A_\varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\lim\limits_{k\to\infty} m(\bigcup\limits_{n\geq k}^{\infty} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$.

proof "$\Rightarrow$" $f_n \to f$ a.un.

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists A_\varepsilon$. $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$ s.t. $f_n \rightrightarrows f$ on $E \setminus A_\varepsilon$.

$\forall \delta > 0$ (与 ε 无关) $\exists N$. 当 $n > N$ 时. $\sup\limits_{x \in E\setminus A_\varepsilon} |f_n - f| \leq \delta$.

$\Rightarrow \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \subseteq A_\varepsilon$

对 $k > N$. $m(\bigcup\limits_{n\geq k}^{\infty} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) \leq m(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} m(\bigcup\limits_{n\geq k}^{\infty} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) \leq \varepsilon$. 再令 $\varepsilon \to 0$.

令

$\forall j,\ \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\frac{1}{2^j}\})=0$

$\forall\varepsilon>0$ (fixed) $\exists k(j)$ s.t. $m(\bigcup_{n=k(j)}^{\infty}\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\frac{1}{2^j}\})<\frac{\varepsilon}{2^j}$

令 $E_\varepsilon=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=k(j)}^{\infty}\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\frac{1}{2^j}\}$. $\Rightarrow m(E_\varepsilon)\le\varepsilon$.

$\forall x\notin E_\varepsilon$, 即 $\forall j>0$ 对 $k(j)$, $\forall n\ge k(j)$, $|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{2^j}$ (与x无关)

$\Rightarrow f_n\to f$ on $E\setminus E_\varepsilon$.

□

再看:

(1). $f_n\to f$ a.un $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$.

(2). $f_n\to f$ a.e $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $m(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$

当 $m(E)<\infty$ 时. (1) 中单调减集合测度连续.

即 $\lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=m(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})$

故在 $m(E)<\infty$ 的条件下 (1) $\Leftrightarrow$ (2)

而 (2) $\Rightarrow$ (1) 正是 Egorov 定理.

依测度收敛

1° 极限唯一. 设 $f_n\overset{m}{\to}f$. $f_n\overset{m}{\to}g$. 则 $f=g$ a.e

proof:

$\{f\ne g\}=\bigcup_n\{|f-g|>\frac{1}{n}\}$ 且 $\{|f-g|>\varepsilon\}\subset\{|f_n-f|>\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|f_n-g|>\frac{\varepsilon}{2}\}$

2°. $m(E)<\infty$. $f_n\to f$ a.e $\Rightarrow f_n\overset{a.un}{\longrightarrow}f\Rightarrow f_n\overset{m}{\to}f$ (Egorov 推论).

3°. $f_n\overset{m}{\to}f\Rightarrow\exists$ 子列 $f_{n_k}\to f$ a.e.

4°. $m(E)<\infty$, 若 f_n 任意子列都有子子列收敛于 f. 则 $f_n\overset{m}{\to}f$

proof: 反证. 设 $f_n\overset{m}{\not\to}f$.

$\exists\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}m(\{|f_n-f|>\varepsilon\})\to 0$ 不对.

$\Rightarrow\exists\delta>0$ 子列 $n_k\to\infty$ 使 $m(\{|f_{n_k}-f|>\varepsilon\})\ge\delta$

由条件. 有子子列 $n_{k_i}\to\infty$ $f_{n_{k_i}}\to f\Rightarrow f_{n_{k_i}}\overset{m}{\to}f$. 与上式矛盾.

总结. $m(E)<\infty$ 时. $f_n\overset{m}{\to}f\Leftrightarrow f_n$ 任意子列有子子列收敛于 f.

5° 依测度 Cauchy 列

Definition $\forall \varepsilon>0$ $\lim_{m,n\to\infty} m(|f_n-f_m|>\varepsilon)\to 0$，则称 $\{f_n\}$ 是依测度 Cauchy 列

Theorem $f_n \xrightarrow{m} f \iff f_n$ 是依测度的 Cauchy 列

proof

"$\Rightarrow$" $\{|f_n-f_m|>\varepsilon\} \subset \{|f_n-f|>\frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_m-f|>\frac{\varepsilon}{2}\}$

测度　　$\downarrow 0\ (n\to\infty)$　　$\downarrow 0\ (m\to\infty)$

注：类似问题中证明上面这条都是一样的使用某种"三角不等式"

其实证明 Cauchy 列收敛（完备性）的套路也比较单一。

只是对于特定情形要用到特定的构造。同学们可以与 L^p、L^∞ 完备性的证明对比，总结其一般方法与特殊操作。

完备性三步：①找 f　②选子列 $\to f$　③子列收敛 $\xRightarrow{\text{Cauchy 列}}$ 全收敛

proof:

① $\forall k$ 固定，$\exists N_k$，使 $\forall m,n\geq N_k$ 有 $m(\{|f_n-f_m|>2^{-k}\})<2^{-k}$

不妨 $N_{k+1}>N_k$.

Claim: f_{N_k} a.e 收敛于某个 f

before $S_k=\{|f_{N_{k+1}}-f_{N_k}|>2^{-k}\}$　　$m(S_k)<2^{-k}$

令 $S=\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{k\geq N} S_k=\limsup_{k\to\infty} S_k \Rightarrow m(S)=0$

$\forall x\notin S$，$\exists N$ $\forall k\geq N$ $|f_{N_{k+1}}-f_{N_k}|\leq 2^{-k}$

$f_{N_k}=\sum_{k=1}^{\infty}(f_{N_{k+1}}-f_{N_k})+f_{N_1}$　（绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛）

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f_{N_k}$ 存在，记为 $f: E\setminus S\to\mathbb{R}$.

令 $f|_S=0$，则 $f: E\to\mathbb{R}$.

② Claim: $f_{N_k}\xrightarrow{m} f$　（这里无 $m(E)<\infty$ 不能直接 Egorov，但可以得到 Egorov 结论）

因为 $\forall\varepsilon>0$ 取 N 充分大，$A_\varepsilon=\bigcup_{k\geq N} S_k$，$m(A_\varepsilon)<\varepsilon$

$\forall x\in (E\setminus S)\setminus A_\varepsilon$，$\forall k\geq N$　$|f_{N_{k+1}}(x)-f_{N_k}(x)|\leq 2^{-k}$ 与 x 无关

$$\left(|f_{N_m}-f_{N_n}|\leq \sum_{i=n+1}^{m}|f_{N_i}-f_{N_{i-1}}|\leq \sum_{i=n+1}^{m} 2^{-i}\cdot 2\to 0 \quad \text{as } m,n\to\infty\right.$$

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$ 使 $m,n>N_1\Rightarrow |f_{N_m}-f_{N_n}|<\varepsilon$，再令 $n\to\infty$ $|f_{N_m}-f|<\varepsilon$)

$\Rightarrow f_{N_k}\rightrightarrows f$ on $(E\setminus S)\setminus A_\varepsilon$（近乎一致收敛）.

$\forall\delta>0\ \exists N$，当 $n>N$ 时 $|f_n-f|<\delta$ on $(E\setminus S)\setminus A_\varepsilon \Rightarrow m(\{|f_n-f|>\delta\})\leq\varepsilon$.

（n 充分大）

③ $\{|f_n-f|>\varepsilon\}\subset\{|f_n-f_{N_k}|>\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|f_{N_k}-f|>\frac{\varepsilon}{2}\}$　□