习题课讲义

2023.06.06

注:以下的收敛都是在几乎处处的情况下收敛

1.(2022.2)通过分别具体的定义在R上的实值函数列来说明以下的命题

(a).L^1收敛不保证几乎处处收敛

(b).L^3收敛不保证L^2收敛

(c).依测度收敛不保证L^1收敛

(d).依测度收敛不保证几乎处处收敛

Proof. *(a).同(d)*

(b)取$f_n(x)$=$f(x) = x^{\frac{-1.1}{3}}\chi_{(1,\infty)}$即可

(c)取$f_n(x)$=$\frac{1}{n}\chi_{(n,\infty)}$,$f(x)$=0

(d)将[0,1]区间上的函数列f_n定义如下:

将区间二等分为[0,$\frac{1}{2}$]与[$\frac{1}{2}$,1],分别标号1,2,再将这两个区间分别二等分,标号3,4,5,6;以此类推得到一串闭区间以及对应的标号.

f_n定义为标号n区间上的示性函数,容易验证f_n依测度收敛于0,但不几乎处处收敛,更一般的,其无处收敛

2.(2022.3)设f:[0,1]→R有连续的导数,问f是不是有界变差函数?为什么

Proof. 是的

由于$f(x)$的导数在闭区间[0,1]上连续,所以其绝对值有界M,对任意x_i, x_{i-1},有|$f(x_i)$-$f(x_{i-1})$|≤|$(x_i - x_{i-1})$|M,故对于[0,1]的任何一个划分x_i(i=1,2...n)有$\sum_1^n$(|$f(x_i) - f(x_{i-1})$ |) $\leq M$, 对式子左边取sup,我们有$f(x)$在[0,1]上的变差小于M,即$f(x)$是有界变差函数

3.(2022.4)设B是R^d中的单位球,f_n:→R是一列可测函数,而且满足(a)f_n几乎处处收敛于函数f;(b)$||f_n||_{L^2(B)} \leq 1$对于任意的n;求证:

$$\lim_{n\to\infty}\int_B f_n = \int_B f.$$

Proof. 由题设知,对于任意$\varepsilon > 0$,存在一个可测集合E⊆B,并且$m(B/E)$<ε,并且在E上f_n一致收敛到f,由于$m(E)$< ∞,那么存在一个N,我们有当n>N的时候$\int_E |f_n - f| < \varepsilon$,注意到$||f_n||_{L^2(B)} \leq 1$,故$(\int_{B-E}|f_n|)^2 \leq \int_B {f_n}^2 \int_{B-E} 1 \leq$

$m(B-E)$,即$\int_{B-E}|f_n| \leq \sqrt{\varepsilon}$,我们再对左边取下极限,由法图引理可知,$\int_{B-E}|f| \leq \sqrt{\varepsilon}$,则此时$\int_{B-E}|f_n-f| \leq \int_{B-E}|f_n| + \int_{B-E}|f| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$则此时

$$\int_B |f_n - f| = \int_E |f_n - f| + \int_{B-E} |f_n - f| \leq \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon$$

,令$\varepsilon \to 0$,,我们既有$\int_B |f_n - f| \to 0$,故$\int_B f_n - f \to 0$

4.(2022.5)设f_n是定义在$[a,b]$上的单调增的绝对连续函数,如果函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$在$[a,b]$上点点收敛到f,求证:f也是绝对连续的

Proof. 设$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$,则*f(x)*是单调递增函数,我们先证明*f'(x)*=$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$,首先我们直到*f(x)*是几乎处处可微的,我们令$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$,故*f(x)*=$\sum_{n=1}^{N} f_n(x) + R_N(x)$,这时候右边变成了一个有限和,我们同时对左右两边微分,在令$N \to \infty$,我们发现只需证明$\lim_{n\to\infty} R_N'(x) = 0$即可,首先由于$f_n' \geq 0$所以令$R_N'(x) \geq R_{N+1}'(x)$,这说明存在一个*g(x)*,使得$\lim_{n\to\infty} R_{,N}(x) = g(x) \geq 0$,那么根据单调函数的微分定理,我们有$\int_a^b \lim_{N\to\infty} R_N'(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b R_N'(x) \leq \lim_{N\to\infty}(R_N(b) - R_N(a)) = 0$,由此即得$g(x) = 0$,接下来我们再对$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$两边积分,有$\int_a^b f'(x) = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(b) - f_n(a)) = f(b) - f(a)$,这即说明了$f$也是绝对连续的

5.(2022.7)设E是R上指定的零测集,证明存在一个单调的函数f,使得f在集合E上不可导

Proof. 对于每一个正整数n,取一个开集$G_n \subseteq E$并且*m(*G_n*)* $\leq \frac{1}{2^n}$,并且作函数列$f_n(x) = m([-\infty, x] \cap G_n)$,则每个$f_n$都是单调的,并且$f_n(x) < \frac{1}{2^n}$,并且对$h$充分小的时候,$f_n(x+h) - f_n(x) < |h|$故$f_n$是连续函数,再做函数*f(x)*=$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$,这是一个良定的非负连续且单调增加的函数,对于$x \in E$,对于任意的$k$,取$|h|$充分小,使得$[x, x+h] \subset G_n$ *n=1,2..k*,此时有$\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} = 1$ *n=1,2...k*,故

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = k$$

令$k \to \infty$即f在集合E上不可导

6.(2022.3)设$E \subset R, 0 < m(E) < \infty$,$f$(x)在R上非负可测,证明$f \in L^1(R)$当且仅当g(x)=$\int_E f(x-t)dt$在R上可积

Proof. 必要性:因为$\chi_E \in L(R)$,并且*g(x)*=$\int_R \chi_E(t) f(x-t)dt$,由*fubini*定理在非负可测函数上的形式知$g$可积

充分性:$+\infty > \int_R \int_R \chi_E(t) f(x-t) dt dx = \int_R \chi_E(t) (\int_R f(x-t) dx) dt = m(E) \int_R f(x) dx$,由此可知$f$可积

7.(2022.4)假设f R→ R是绝对连续函数,证明

(1)f将零测集映到零测集

(2)f将可测集映到可测集

Proof. *(1)*对于任意$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$使当$\sum_1^n (y_i - x_i) < \delta$时,$\sum_1^n (f(y_i) - f(x_i)) < \varepsilon$,对于任意一个零测集$E$,我们取开集$Q$,$E \subset Q$并且$m(Q) < \delta$,则根据开区间结构定理,以及绝对连续函数的定义,我们有$m(f(Q)) < \varepsilon$,且$f(E) \subset f(Q)$,即$m(E) < \varepsilon$,令$\varepsilon \to 0$,我们得到$m(E)=0$

*(2)*对于任意一个可测集E,我们将其写成可数个有界可测集的并$(E_n = E \cap [n, n+1])$,我们只需要证明f把每一个E_n都映到可测集即可,由于有界可测集中的闭集均是紧集,并且我们知道连续函数把紧集映到紧集,故f把E_n中的F_σ集映到F_σ集,由于任意一个可测集可以表示为零测集和F_σ集合的并,根据第一问的结论,f把E_n映到可测集

8.(2022.5)如果$f \in L^1(R^d)$且f不恒等于0,试证明Hardy-Littlewood极大函数$f^* \notin L^1(R^d)$

Proof. 我们取r使得$\int_B (0, r) |f(y)| dy = c > 0$,由于$f$不恒等于$0$,这个$r$是可以取到的,故

$$f^*(x) \geq \frac{\int_{B(x,|x|+r)} |f(y)| dy}{m(B(x, |x|+r))} \geq c(|x|+r)^{-n}$$

,当$x\to \infty$的时候$(|x|+r)^{-n}$和$|x|^{-n}$是等价无穷小,但显然对于任意$a>0$,我们有$\int_{B(0,a)^c} |x|^{-n} = \infty$,故我们可以得到$(|x|+r)^{-n}$在$R^d$上不可积,故$f^* \notin L^1(R^d)$