7. Using Corollary 1.5, prove that if a measurable subset E of $[0,1]$ satisfies $m(E\cap I)\geq \alpha\, m(I)$ for some $\alpha>0$ and all intervals I in $[0,1]$, then E has measure 1. See also Exercise 28 in Chapter 1.

证明. 因为 E^c 可测，于是对几乎处处 $x\in E^c$，成立

$$\lim_{\substack{x\in I\\ m(I)\to 0}}\frac{m(I\cap E^c)}{m(I)}=1.$$

特别地 I 在 $[0,1]$ 的子区间中取. 但是，根据题给条件可知

$$m(E^c\cap I)=m(I)-m(E\cap I)\leq (1-\alpha)m(I).$$

所以对所有（事实上，以下不等式和 x 无关）$x\in E^c$，都成立

$$\frac{m(I\cap E^c)}{m(I)}\leq 1-\alpha<1.$$

根据极限的保序性可知 $\lim_{\substack{x\in I\\ m(I)\to 0}}\frac{m(I\cap E^c)}{m(I)}=1$ 对所有 $x\in E^c$ 不成立，但是同时该命题对几乎处处 $x\in E^c$ 成立，所以 $m(E^c)=0$，$m(E)=1$. □

8. Suppose A is a Lebesgue measurable set in $\mathbb{R}$ with $m(A)>0$. Does there exist a sequence $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that the complement of $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A+s_n)$ in $\mathbb{R}$ has measure zero?

[Hint: For every $\epsilon>0$, find an interval I_ϵ of length ℓ_ϵ such that $m(A\cap I_\epsilon)\geq(1-\epsilon)m(I_\epsilon)$. Consider $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}(A+t_k)$, with $t_k=k\ell_\epsilon$. Then vary ϵ.]

证明. 因为 A 是可测集，所以对几乎处处 $x\in A$，x 是 A 的 Lebesgue 密度点，即成立：

$$\lim_{\substack{x\ni I\\ m(I)\to 0}}\frac{m(I\cap A)}{m(I)}=1.$$

选取一个满足条件的 $x\in A$，$\forall\varepsilon>0$，存在一个长度足够小的（不妨是闭）区间 I_ε，使得 $x\in I_\varepsilon$ 而且 $m(I_\varepsilon\cap A)\geq(1-\varepsilon)m(I_\varepsilon)$. 设 I_ε 的区间长度是 ℓ_ε，不妨设 $\ell_\varepsilon<1$.

我们计划用足够多的 I_ε 的平移来覆盖 $B_N=[-N,N]$，即存在足够大的整数 $K(N)$ 使得 $[-N,N]\subset\bigcup_{k=-K(N)}^{K(N)}I_\varepsilon+t_k$，其中 $t_k=k\ell_\varepsilon$，则每个区间至多在端点处相交. 根据 Lebesgue 测度的平移不变性可知，对每个 k：

$$m((A+t_k)\cap(I_\varepsilon+t_k))=m((A\cap I_\varepsilon)+t_k)=m(A\cap I_\varepsilon)\geq(1-\varepsilon)\ell_\varepsilon.$$

所以对每个 k 都有：

$$m((B_N-(A+t_k))\cap(I_\varepsilon+t_k))\leq\varepsilon\ell_\varepsilon.$$

因为

$$\begin{aligned}
m\left(B_N-\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(A+t_k)\right)\right)&=m\left(\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}(B_N-(A+t_k))\right)\\
&=m\left(\bigcup_{j=-K(N)}^{K(N)}\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}(B_N-(A+t_k))\cap(I_\varepsilon+t_j)\right)\\
&\leq m\left(\bigcup_{j=-K(N)}^{K(N)}(A+t_j)^c\cap(I_\varepsilon+t_j)\right)\\
&\leq 2K(N)\varepsilon\ell_\varepsilon\\
&<2K(N)\varepsilon\to 0(\varepsilon\to 0).
\end{aligned}$$

所以 $m\left(B_N-\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(A+t_k)\right)\right)=0$，对 N 取并可得 $m\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(A+t_k)\right)^c\right)=0$. □

评注 1. 这里的核心是，把 $[-N,N]$ 用区间覆盖后，我们保证 A 的平移的并能够覆盖其中的大部分，从而通过改变 ε 说明 A 的平移并在 $[-N,N]$ 中的补集是零测度的，从而 A 在 $\mathbb{R}$ 中的补集是零测度的.

11. If $a, b > 0$, let

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & \text{for } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Prove that f is of bounded variation in $[0,1]$ if and only if $a > b$. Then, by taking $a = b$, construct (for each $0 < \alpha < 1$) a function that satisfies the Lipschitz condition of exponent α

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^{\alpha}$$

but which is not of bounded variation.

[Hint: Note that if $h > 0$, the difference $|f(x+h) - f(x)|$ can be estimated by $C(x+h)^a$, or $C'h/x$ by the mean value theorem. Then, consider two cases, whether $x^{a+1} \geq h$ or $x^{a+1} < h$. What is the relationship between α and a?]

证明. 注意若 Δ' 是 Δ 的加细，则有：

$$(\Delta)\sum_{j=1}^{N}|f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq (\Delta')\sum_{j=1}^{N}|f(x_j) - f(x_{j-1})|.$$

注意：

$$f'(x) = ax^{a-1}\sin(x^{-b}) - bx^{a-b-1}\cos(x^{-b}).$$

如果假设 $a > b$，则根据 Riemann 积分的定义：

$$\begin{aligned} T_f([0,1]) &= \sup_{\Delta}\sum_{j=1}^{N}|f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 |ax^{a-1}\sin(x^{-b})|\mathrm{d}x + \int_0^1 |bx^{a-b-1}\cos(x^{-b})|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 ax^{a-1}\mathrm{d}x + \int_0^1 bx^{a-b-1}\mathrm{d}x \\ &= 1 + \frac{b}{a-b}. \end{aligned}$$

所以 $T_f([0,1])$ 有界，因此 $f \in BV([0,1])$.

反过来，若 $f \in BV([0,1])$，假设 $a \leq b$，我们取点列:

$$x_k = (\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}})^{1/b}.$$

则该点列落在 $[0,1]$ 内，考虑该点列诱导的 $[0,1]$ 的“分划”，在该分划下求以下和式：

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty}|f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{a}{b}}\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k\pi}\right)^{\frac{a}{b}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{a/b}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{a/b}} \\ &\geq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{a/b}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

最后的级数发散，因此适当做截断可看出 $T_f([0,1])$ 可以大于任何一个正实数，因此若 $a \leq b$，则 $f \notin BV([0,1])$，第一部分证明完毕.

对于第二部分，我们取 $a = b$，去证明此时 $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha([0,1])$. 若 $h > 0$，根据 Lagrange 中值定理：

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left|a(x+\theta h)^{a-1}\sin((x+\theta h)^{-a}) - \frac{a\cos((x+\theta h)^{-a})}{x+\theta h}\right|h \\ &\leq |a(x+\theta h)^{a-1}\sin((x+\theta h)^{-a})|h + \left|\frac{a\cos((x+\theta h)^{-a})}{x+\theta h}\right|h \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0,1)$.

对所有的 $x \in [0,1]$ 和 $h > 0$：

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq a(x+\theta h)^{a-1}\cdot\frac{1}{(x+\theta h)^a}h + h\left|\frac{a}{x}\right| \\ &= \frac{ah}{x+\theta h} + \frac{ah}{x} \\ &\leq \frac{2ah}{x}. \end{aligned}$$

另外，当 $x^{a+1} \geq h$ 时，若 $a \geq 1$，即 $a - 1 \geq 0$，有：

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left|(x+h)^a\sin\frac{1}{(x+h)^a} - x^a\sin\frac{1}{x^a}\right| \\ &\leq |x+h|^a + |x|^a \\ &\leq 2(x+h)^a \end{aligned}$$

对 $x^{a+1} < h$ 的情形，$|f(x+h) - f(x)| \leq 2a(x+h)^a \leq 2a(h^{\frac{1}{a+1}} + h)^a \leq 2^{a+1}ah^{\frac{a}{a+1}}$.（注意 $x + h \in [0,1] \Rightarrow h \leq 1$）

对 $x^{a+1} \geq h$ 情形，$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{2ah}{x} < \frac{2ah}{h^{1/a+1}} = 2ah^{\frac{a}{a+1}}$.

我们取 $\alpha = \frac{a}{a+1}$，则 $f \in \mathrm{Lip}\alpha([0,1])$. 因为 $a > 0$，所以对所有 $\alpha \in (0,1)$ 都可构造这样的 f. 但是由第一部分可知这些 $f \notin BV([0,1])$. □

13. Show directly from the definition that the Cantor-Lebesgue function is not absolutely continuous.

证明. 回忆 Cantor 三分集 $C=\bigcap_{n\geq 1}C_n$，其中每个 C_n 都是有限个闭区间的并集，我们取 C_n 的内部 $A_n=C_n^\circ$，则每个 A_n 都是有限个开区间的并集而且 $m(A_n)=\frac{2^n}{3^n}$. 对每个 $A_n=\bigsqcup_{k=1}^{2^n}(a_k,b_k)$，设 F 是 Cantor-Lebesgue 函数，则：

$$\sum_{k=1}^{2^n}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^{2^n}(F_n(b_k)-F_n(a_k))=F(1)-F(0)=1.$$

于是，对任何 $\delta>0$，只要取 n 足够大使得 $(2/3)^n<\delta$，就存在有限个开区间 $\{(a_k,b_k)\}$，它们的测度之和为 $\sum_k(b_k-a_k)=m(A_n)=(\frac{2}{3})^n<\delta$，使得 $\sum_{k=1}^{2^n}|F(b_k)-F(a_k)|=1$.

这说明 Cantor-Lebesgue 函数不是绝对连续的.

补充题

Thm (Vitali 覆盖引理)

设 $E\subset\mathbb{R}$，$m_*(E)<\infty$，Γ 是 E 的一个 Vitali 覆盖，则：$\forall\varepsilon>0$，$\exists I_1,\cdots,I_N\in\Gamma$ 互不相交 s.t.

$$m_*(E\setminus\bigcup_{k=1}^N I_k)<\varepsilon.$$

Pf. $m_*(E)<\infty \Rightarrow \exists G$ 开，$m(G)<\infty$ s.t. $E\subset G$

不妨设 $\forall I\in\Gamma$，$I\subset G$ （$\because$ Vitali）

令 $\delta_0\overset{\text{def}}{=}\sup\{|I|: I\in\Gamma\}<\infty$

取 $I_1\in\Gamma$ s.t. $I_1\cap E\neq\varnothing$，$|I_1|>\frac{\delta_0}{2}$.

（$\#\Gamma=\infty\Rightarrow$ 可能取不到最大值，但由 δ_0 的定义这总是可以做到的）

如果 $E\subset I_1$，停下

否则，令

$$\delta_1\overset{\text{def}}{=}\sup\{|I|: I\in\Gamma,\ I\cap I_1=\varnothing\}$$

$\Rightarrow \delta_1>0$ (HW)

大部分同学使用反证，但里面涉及到“区间”和“点”的概念，不易直观理解，所以最好还是直接利用定义证出来。证明思路：直接取E\I_1中的一个点x，那么x到闭区间I1的距离大于0，选取包含x的一个很小的闭区间即可。