第二十八讲（2023.6.14）

Def $(X, \mathcal{M}, \mu)$

如果 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ with $\mu(E_k) < \infty$, $\forall k$,

则称 μ 是 σ-有限测度

Thm $\mathcal{A}$ — X 上一个代数

μ_0 — $\mathcal{A}$ 上一个预测度

对 $E \subset X$，定义

$$\mu^*(E) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) : A_k \in \mathcal{A},\ k=1,2\cdots, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$

则

(i) μ^* 是 X 上外测度

(ii) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$

(iii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu^*\text{-可测集}\}$

(iv) 设 $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu^*|_{\mathcal{M}}$

如果 ν 是 $\mathcal{M}$ 上另一测度 s.t. $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$

则 $\nu(E) \le \mu(E)$, $\forall E \in \mathcal{M}$

当 $\mu(E)<\infty$ 时等号成立.

特别地, 若 μ_0 是 σ-有限的, 则 $\nu=\mu$.

(i.e. μ 是 μ_0 从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的唯一延拓)

Pf (iii) 设 $A\in\mathcal{A}$.

要证明 $A\in\mathcal{M}$, i.e.

$\forall E\subset X$, $\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists A_k\in\mathcal{A}$, $k=1,2,\cdots$ s.t. $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$

且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(A_k)<\mu^*(E)+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow\ \mu^*(E)\le\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$$

$$\le\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap A)\Big)+\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap A^c)\Big)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\mu^*(\underbrace{A_k\cap A}_{\in\mathcal{A}})+\mu^*(\underbrace{A_k\cap A^c}_{\in\mathcal{A}})\Big]$$

$$\overset{\mu^*|_{\mathcal{A}}=\mu_0}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\big[\mu_0(A_k\cap A)+\mu_0(A_k\cap A)\big]$$

$$\overset{\mu_0\text{有限可加}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(A_k)<\mu^*(E)+\varepsilon$$

$$\xRightarrow{\varepsilon \to 0^+} \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

(iv) 设 $E \in \mathfrak{M}$.

$\forall A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2 \cdots$ with $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$$\nu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k)$$

$$(\because \ \nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0)$$

$$\Longrightarrow \nu(E) \leq \mu^*(E) = \mu(E).$$

设 $\mu(E) < \infty$，要证明反向不等式

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2 \cdots$ s.t. $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) < \mu(E) + \varepsilon$$

记

$$A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad \mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$$

$$\Longrightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k)$$

$$< \mu(E) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \nu(A) = \lim_{N \to \infty} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) \qquad (\because \text{测度的连续性})$$

$$= \lim_{N \to \infty} \mu_0\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right)$$

$$= \mu(A)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(E) \leq \mu(A)$$

$$= \nu(A)$$

$$= \nu(E) + \nu(A \setminus E)$$

$$\leq \nu(E) + \mu(A \setminus E) \qquad (\because \nu \leq \mu)$$

$$\leq \nu(E) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \mu(E) \leq \nu(E).$$

若 μ_0 是 σ-有限的 $\Rightarrow X = \biguplus_{k=1}^{\infty} A_k$

with $\mu_0(A_k) < \infty, \ \forall k$

$\forall E \in \mathcal{M}$,

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap A_k) = \mu(E).$$

Def 如果 $\mathcal{F} \subset 2^X$ 满足

(i) $\phi \in \mathcal{F}$

(ii) $E_1, E_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathcal{F}$

(~~对~~有限交封闭)

(iii) $E \in \mathcal{F} \Longrightarrow E^c$ 可表为 $\mathcal{F}$ 中成员之有限不交并

则称 $\mathcal{F}$ 是 X 上一个半代数.

例: {区间} 是 $\mathbb{R}$ 上半代数.

Prop. $\mathcal{F}$ —— X 上半代数

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=}$ {$\mathcal{F}$ 中成员之有限不交并} 是 X 上代数.

Pf 设 $A, B \in \mathcal{F}$

$$\Longrightarrow \quad B^c = \biguplus_{k=1}^{N} C_k \quad \text{with } C_k \in \mathcal{F}$$

$$\Longrightarrow \quad A \setminus B = \biguplus_{k=1}^{N} \underbrace{(A \cap C_k)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{A}$$

$$\Longrightarrow \quad A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

$$= \biguplus_{k=1}^{N} (A \cap C_k) \cup B \in \mathcal{A}$$

由此，结合 $\mathcal{A}$ 之定义可见 $\mathcal{A}$ 对有限并封闭.

$$\forall E \in \mathcal{A} \Longrightarrow E = \biguplus_{k=1}^{N} A_k \quad \text{with } A_k \in \mathcal{F}$$

$$A_k^c = \biguplus_{j=1}^{N_k} C_j^{(k)} \quad \text{with } C_j^{(k)} \in \mathcal{F}$$

$$\Longrightarrow \quad E^c = \bigcap_{k=1}^{N} A_k^c$$

$$= \bigcap_{k=1}^{N} \left(\bigcup_{j=1}^{N_k} C_j^{(k)} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{1 \le j_k \le N_k \\ 1 \le k \le N}} \underbrace{C_{j_1}^{(1)} \cap \cdots \cap C_{j_N}^{(N)}}_{\in \mathcal{F} \subset \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

乘积测度与 Fubini Thm

$(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$

$(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ $\xrightarrow{?}$ $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_2)$

乘积测度空间.

Rmk: 一般来说

$$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \overset{def}{=} \{ \underbrace{A \times B}_{\text{称为可测矩形}} : A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2 \}$$

不是 σ-代数.

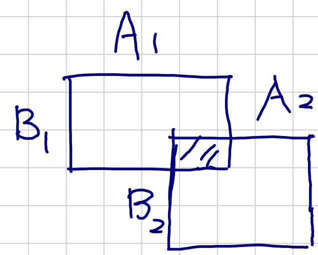
Def $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \overset{def}{=} \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$

Q: 如何定义 $\mu_1 \times \mu_2$ s.t. Fubini Thm 成立?

一个必要条件:

$$\mu_1 \times \mu_2 (A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

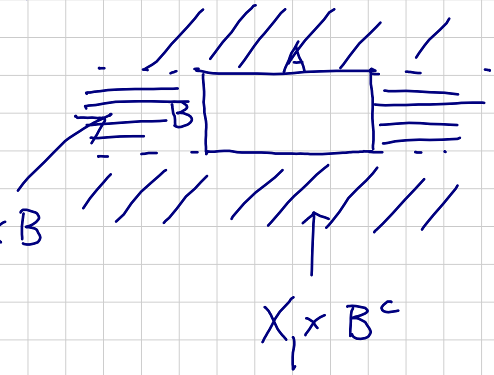
Prop. $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 是半代数.



pf. $(A_1 \times B_2) \cap (A_2 \times B_2)$

$= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

$$(A\times B)^c = (X_1\times B^c)\cup(A^c\times B)$$



Def $\mathcal{A} \stackrel{def}{=}$ {可测矩形之有限不交并}

这是 $X_1\times X_2$ 上一个代数.

令

$$\mu_0\left(\biguplus_{k=1}^{n}(A_k\times B_k)\right) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n}\mu_1(A_k)\,\mu_2(B_k)$$

$\Longrightarrow$ μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上预测度

对 $E\subset X_1\times X_2$

$$\mu^*(E) \stackrel{def}{=} \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(E_k) : E_k\in\mathcal{A},\ k=1,2,\cdots,\ E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right\}$$

$\Longrightarrow$ μ^* 是 $X_1\times X_2$ 上外测度

$\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \stackrel{def}{=} \{\mu^*\text{-可测集}\}$ 是 σ-代数

$\mu \stackrel{def}{=} \mu^*|_{\mathfrak{M}}$ 是一个完备测度

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}$$

$$(\because \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M})$$

<u>Def</u>: $\mu_1 \times \mu_2 \overset{\text{def}}{=} \mu^* \big|_{\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2}$

Rmk: 一般来说，$\mu_1 \times \mu_2$ 不完备

除非 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$.