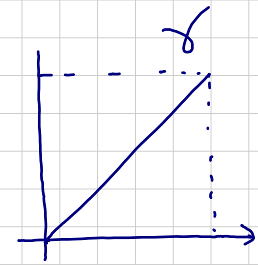
第二十五讲 (2023.6.2)

Q: 弧长公式

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

对 a.e. 可微曲线是否成立?



反例: $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (F(t), F(t))$

其中 F 是 C-L 函数

F 连续、单调增且是 $[0,1] \mapsto [0,1]$ 的满射

$$L(\gamma) = \sqrt{2}$$

而 $$\int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))}\, dt = 0$$

Def 设 $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (x(t), y(t))$

如果 $x, y \in AC[a,b]$, 称 γ 是 AC 曲线.

Thm γ 是 AC 曲线 $\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$

Pf 令

$$f(t) \overset{def}{=} x(t) + i\,y(t), \quad t \in [a,b].$$

$$\gamma \text{ 可求长} \iff f \in BV[a,b]$$

则

$$L(\gamma) = V_a^b(f)$$

$$\left(\begin{aligned} V_a^b(f) &= \sup_P \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ &= \sup_P \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \end{aligned} \right)$$

$$= L(\gamma)$$

归化为

Claim $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt$

Step 1 LHS $\leq$ RHS

对 $[a,b]$ 的任一划分 P

$$\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \overset{N-L}{=\!=} \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t)\,dt \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f'(t)|\,dt = \int_a^b |f'(t)|\,dt$$

$$\Rightarrow \quad V_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(t)|\,dt$$

<u>Step 2</u> LHS $\geq$ RHS

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \psi$ 阶梯函数 s.t.

$$\|f' - \psi\|_1 < \varepsilon.$$

令

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x \psi(t)\,dt$$

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x [f'(t) - \psi(t)]\,dt$$

N-L

$$\Rightarrow \quad f = g + h + f(a)$$

$$\Rightarrow \quad V_a^b(f) \geq V_a^b(g) - V_a^b(h)$$

$$\left(\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq & \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ & + \sum_{k=1}^{n} |h(t_k) - h(t_{k-1})| \\ \Rightarrow \quad V_a^b(g) \leq & \ V_a^b(f) + V_a^b(h) \end{aligned} \right)$$

$$h' = f' - \psi \quad \text{a.e.} \quad (\text{by LDT})$$

$$\overset{\text{Step 1}}{\Longrightarrow} \quad V_a^b(h) \leq \int_a^b |h'(t)|\,dt$$

$$= \|f' - \psi\|_1 < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad V_a^b(f) \geq V_a^b(g) - \varepsilon$$

$$\text{ist } \psi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{[t_{k-1}, t_k)}$$

$$\Longrightarrow \quad V_a^b(g) \geq \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi(t)\,dt \right|$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi(t) = c_k \\ \forall t \in [t_{k-1}, t_k) \end{array}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\psi(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b |\psi(t)|\,dt$$

$$= \|\psi\|_1$$

$$\geq \|f'\|_1 - \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad V_a^b(f) \geq \|f'\|_1 - 2\varepsilon \quad \overset{\varepsilon \to 0^+}{\Longrightarrow} \quad V_a^b(f) \geq \|f'\|_1$$

抽象测度论

X —— 非空集合

$2^X \overset{\text{def}}{=\!=} X$ 的子集全体

Def 如果 $\mathscr{A} \subset 2^X$ 满足

(i) $\phi, X \in \mathscr{A}$

(ii) $E_1, E_2 \in \mathscr{A} \Longrightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathscr{A}$

(iii) $E \in \mathscr{A} \Longrightarrow E^c \in \mathscr{A}$.

则称 $\mathscr{A}$ 是 X 上一个代数.

Def 如果 $\mathcal{M} \subset 2^X$ 满足

(i) $\phi, X \in \mathcal{M}$

(ii) $E_k \in \mathcal{M}, k=1,2,\cdots \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$

(iii) $E \in \mathcal{M} \Longrightarrow E^c \in \mathcal{M}$.

则称 $\mathcal{M}$ 是 X 上一个 σ-代数

$(X, \mathcal{M})$ 称为一个可测空间

$\mathcal{M}$ 中元素称为可测集.

例. $\{\phi, X\}$ 是 X 上 σ 代数

2^X - — — .

$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \overset{def}{=} \{\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集$\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上 σ-代数.

<u>Def</u> 设 $\mathcal{F} \subset 2^X$

$$\sigma(\mathcal{F}) \overset{def}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{是}\sigma\text{-代数} \\ \mathcal{M} \supset \mathcal{F}}} \mathcal{M}$$ (包含 $\mathcal{F}$ 的最小 σ-代数)

称为 $\mathcal{F}$ 生成的 σ-代数.

例：设 (X, τ) 是一个拓扑空间

$\mathcal{B}_X \overset{def}{=} \sigma(\tau)$ 称为 X 上的 Borel σ-代数

$\mathcal{B}_X$ 中元素称为 Borel 集，包括开集，闭集

F_σ 集，G_δ 集，……

<u>Def</u> $(X, \mathcal{M})$ —— 可测空间

如果集函数 $\mu: \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ 满足

(i) $\mu(\phi) = 0$

(ii) (可数可加性)

$\mathcal{M} \ni E_k,\ k=1,2\cdots$ 互不相交,

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

则称 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上一个测度.

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ 称为一个测度空间.

如果 $\mu(X) < \infty$, 称 μ 是有限测度.

特别地, 如果 $\mu(X) = 1$, 则称 μ 是一个概率测度. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 称为一个概率空间

例. 1° $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度 m,

2° Dirac 测度

$$\delta_a(E) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{if } E \ni a \\ 0, & \text{if } E \not\ni a \end{cases}$$

3° 计数测度

$$\mu(E) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \#E, & \text{if } \#E < \infty \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$