第二十三讲 (2023.5.26)

Thm (单调函数微分定理)

$$f \nearrow \Rightarrow \begin{cases} f \text{ a.e. 可微} \\ f' \in L^1[a,b] \\ \int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a) \end{cases}$$

Lem (Vitali 覆盖引理)

设 $E \subset \mathbb{R}$, $m_*(E) < \infty$, $\Gamma = \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 E 之 Vitali 覆盖, 则:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists I_1, \cdots, I_N \in \Gamma$ 互不相交. s.t.

$$m_*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) < \varepsilon.$$

Pf of Thm

令 $E_1 \overset{def}{=} \{x \in (a,b) : D^+ f(x) > D_- f(x)\}$

$E_2 \overset{def}{=} \{x \in (a,b) : D^- f(x) > D_+ f(x)\}$

只需证明

$$m(E_1) = m(E_2) = 0$$

($\Longrightarrow$ 四个 Dini 导数 a.e. 相等)

只证明 $m(E_1) = 0$.

$$E_1 = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} A_{r,s}$$

$$A_{r,s} \overset{def}{=\!=} \{x \in (a,b) : D^+f(x) > r > s > D_-f(x)\}$$

又仅需证明: $m_*(A_{r,s}) = 0$. $\forall r,s \in \mathbb{Q}$.

记 $A = A_{r,s}$

假设 $m_*(A) > 0$.

$\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G$ 开, s.t. $A \subset G$ 且

$$m(G) < (1+\varepsilon)\, m_*(A)$$

$\forall x \in A \Longrightarrow D_-f(x) < s$

$\Longrightarrow \exists h_x^{(n)} \to 0^+$ s.t.

$$\frac{f(x-h_x^{(n)}) - f(x)}{h_x^{(n)}} < s, \quad n=1,2,\cdots$$

$\Longrightarrow \quad f(x) - f(x - h_x^{(n)}) < s h_x^{(n)}, \quad n = 1, 2 \cdots$

不妨设每个 $[x - h_x^{(n)}, x] \subset G$

$\Longrightarrow \quad \Gamma \overset{def}{=\!=} \{ [x - h_x^{(n)}, x] \}_{x \in A, n \in \mathbb{N}}$

是 A 的一个 Vitali 覆盖.

$\overset{\text{Vitali}}{\Longrightarrow} \quad \exists \ [x_1 - h_1, x_1], \cdots, [x_N - h_N, x_N] \in \Gamma$

互不相交, s.t.

$$m_*(A \setminus \bigcup_{k=1}^{N} [x_k - h_k, x_k]) < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$

$$(\star) \quad m_*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{N} [x_k - h_k, x_k])) > m_*(A) - \varepsilon$$

而

$$\sum_{k=1}^{N} h_k \leq m(G) < (1 + \varepsilon) m_*(A)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} [f(x_k) - f(x_k - h_k)]$$

$$< s \sum_{k=1}^{N} h_k$$

$$< s(1 + \varepsilon) m_*(A)$$

令

$$B \overset{\text{def}}{=} A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{N} \underbrace{(x_k - h_k, x_k)}_{\text{注意这里是开区间.}} \Big)$$

$\forall y \in B$, $D^+ f(y) > r$

因此, $\exists\, l_y^{(m)} \to 0^+$, s.t.

$$f(y + l_y^{(m)}) - f(y) > r\, l_y^{(m)}, \quad m = 1, 2 \cdots$$

并且取 $l_y^{(m)}$ 充分小 s.t.

$$[y, y + l_y^{(m)}] \subset (x_k - h_k, x_k) \text{ for some } k$$

(由 B 的定义, 这是可能的)

$$\Rightarrow \Gamma' \overset{\text{def}}{=} \{ [y, y + l_y^{(m)}] \}_{y \in B,\, m \in \mathbb{N}}$$

是 B 的一个 Vitali 覆盖.

Vitali

$$\Rightarrow \exists\, [y_1, y_1 + l_1], \cdots, [y_J, y_J + l_J] \in \Gamma'$$

互不相交, s.t.

$$m_*\Big(B \setminus \bigcup_{j=1}^{J} [y_j, y_j + l_j]\Big) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{J} \left[f(y_j + \ell_j) - f(y_j) \right]$$

$$> r \sum_{j=1}^{J} \ell_j$$

$$> r \left(m_*(B) - \varepsilon \right) \qquad \text{(用(☆)式之證明)}$$

$$> r \left(m_*(A) - 2\varepsilon \right) \qquad (\text{by } (☆))$$

而 $f \nearrow$, $[y_j, y_j + \ell_j] \subset (x_k - h_k, x_k)$ for some k

且互不相交:

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{J} \left[f(y_j + \ell_j) - f(y_j) \right]$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} \left[f(x_k) - f(x_k - h_k) \right]$$

$$< s(1+\varepsilon)\, m_*(A).$$

$$\Longrightarrow r\left(m_*(A) - 2\varepsilon\right) < s(1+\varepsilon)\, m_*(A)$$

令 $\varepsilon \to 0^+$

$$\Longrightarrow r\, m_*(A) \le s\, m_*(A)$$

$$\overset{r>s}{\Longrightarrow} m_*(A) = 0.$$

(此时尚未证明 f a.e. 可微，$f'(x)$ 可能为 $+\infty$)

下证 $\int_a^b f'(x)\,dx \le f(b) - f(a)$

作 $g_n(x) \xlongequal{def} \dfrac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$, $x \in [a,b]$

为使 $f(x+\frac{1}{n})$ 有定义，延拓 f 至 $\mathbb{R}$.

$$f(x) \xlongequal{def} \begin{cases} f(a), & x \in (-\infty, a) \\ f(x), & x \in [a,b] \\ f(b), & x \in (b, +\infty) \end{cases}$$

$f \nearrow \Longrightarrow g_n \ge 0$.

前面已证 $g_n \to f'$ a.e.

$$\xRightarrow{\text{Fatou}} \int_a^b f'(x)\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx$$

$$= \liminf_{n\to\infty} n \int_a^b [f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)]\,dx$$

$$= \liminf_{n\to\infty} n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right]$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \Big[\underbrace{n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx}_{f(b)} - \underbrace{n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx}_{\geq f(a)} \Big]$$

$$\leq f(b) - f(a)$$

$$\Longrightarrow \quad f' \in L^1[a,b]$$

$\Longrightarrow$ f' a.e. 有限，即 f a.e. 可微.

<u>Cor</u> $f \in BV[a,b] \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ a.e. 可微} \\ f' \in L^1[a,b] \end{cases}$

Q: $\left.\begin{array}{l} f \nearrow \\ f \text{ 连续} \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

A: <u>NO.</u>

Cantor-Lebesgue 函数.

回忆 Cantor 集之构造.

$$I_{k,1} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\right), \quad \cdots \quad I_{k,2^{k-1}} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{3^k-2}{3^k}, \frac{3^k-1}{3^k}\right)$$

$k = 1, 2, \cdots$

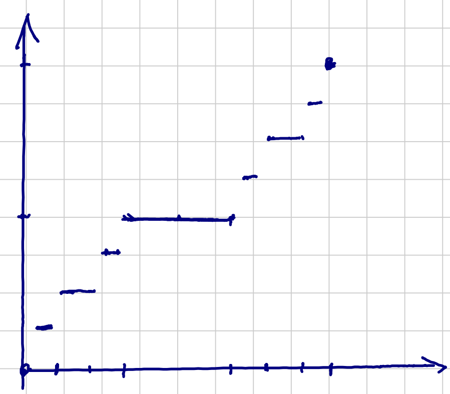
$G \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_{k,j}$ 称为 Cantor 开集

$C \overset{\text{def}}{=} [0,1] \setminus G$ 称为 Cantor 集

令

$$g \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{2j-1}{2^k} \chi_{I_{k,j}}$$

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sup\{g(t) : t \in [0,x) \cap G\} & x \in (0,1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



g 的图像.

1° $f \nearrow$

2° $f(G) \overset{\text{dense}}{\subset} [0,1]$

$$f(G) = \left\{ \frac{2j-1}{2^k} : 1 \leq j \leq 2^{k-1}, \ k = 1, 2 \cdots \right\} \cup \{0, 1\}$$

3° $f \in C[0,1]$

否则由于单调函数只有跳跃间断点，

与 $f(G) \overset{\text{dense}}{\subset} [0,1]$ 矛盾

4° $f' = 0$ a.e.

$\forall x \in G$，$\exists I_{k,j} \ni x$.

而 $f \equiv \frac{2j-1}{2^k}$ on $I_{k,j}$ $\Longrightarrow$ $f'(x) = 0$

5° $0 = \int_0^1 f'(x)\,dx < f(1) - f(0) = 1$.

Def 设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ s.t. 对 $[a,b]$ 中任意

有限个互不相交的开区间 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N$，

只要 $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$，就有

$$\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon,$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

HW：C-L 函数不是绝对连续的

(Ex. 13)