第二十二讲（2023.5.24）

Thm（单调函数微分定理）

若 f 在 $[a,b]$ 上单调增，则

(i) f 在 $[a,b]$ 上 a.e. 可微

(ii) $f' \in L^1[a,b]$

(iii) $\int_a^b f'(t)\,dt \leq f(b)-f(a)$

Def 设 $E \subset \mathbb{R}$，称一族闭区间 $\Gamma = \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 E 的一个 Vitali 覆盖，是指

$$\forall x \in E, \quad \underbrace{\inf\{|I| : I \in \Gamma,\ I \ni x\} = 0}_{\text{i.e. } \forall \varepsilon>0,\ \exists I \in \Gamma \text{ with } |I|<\varepsilon \text{ s.t. } x \in I.}$$

Thm（Vitali 覆盖引理）

设 $E \subset \mathbb{R}$，$m_*(E) < \infty$，Γ 是 E 的一个 Vitali 覆盖，则：$\forall \varepsilon>0$，$\exists I_1,\cdots,I_N \in \Gamma$

互不相交 s.t.

$$m_*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) < \varepsilon.$$

Pf. $m_*(E) < \infty \Longrightarrow \exists\, G$ 开, $m(G) < \infty$
s.t. $E \subset G$

不妨设 $\forall I \in \Gamma$, $I \subset G$ ($\because$ Vitali)

令

$$\delta_0 \overset{\text{def}}{=} \sup\{|I| : I \in \Gamma\} < \infty$$

取 $I_1 \in \Gamma$ s.t. $I_1 \cap E \neq \phi$, $|I_1| > \frac{\delta_0}{2}$.

(#$\Gamma = \infty \Rightarrow$ 可能取不到最大值，但由 δ_0 之定义
这总是可以做到的)

如果 $E \subset I_1$, 停下

否则，令

$$\delta_1 \overset{\text{def}}{=} \sup\{|I| : I \in \Gamma,\ I \cap I_1 = \phi\}$$

$\Longrightarrow \delta_1 > 0$ (HW)

取 $I_2 \in \Gamma$ s.t. $I_2 \cap E \neq \phi$, $I_2 \cap I_1 = \phi$.

则 $|I_2| > \frac{\delta_1}{2}$.

如果 $E \subset I_1 \cup I_2$，停下

否则继续

⋮

如果 $E \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$，停下

否则，令

$$\delta_k \overset{def}{=} \sup\{|I| : I \in \Gamma, I \cap (\bigcup_{j=1}^{k} I_j) = \phi\}$$

取 $I_{k+1} \in \Gamma$，s.t.

$$I_{k+1} \cap (\bigcup_{j=1}^{k} I_j) = \phi$$

$$|I_{k+1}| > \frac{\delta_k}{2}$$

⋮

如果有限步后停下（停止条件：$E \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k$）

则满足条件（$\because E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k = \phi$）

否则得到一列互不相交的 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Gamma$

s.t. $$|I_k| > \frac{\delta_{k-1}}{2}, \quad k=1,2,\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le m(G) < +\infty$$

$\Longrightarrow \exists N$, s.t.

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |I_k| < \frac{\varepsilon}{5}$$

记

$$A \overset{\text{def}}{=} E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k \right)$$

<u>Claim</u> $m^*(A) < \varepsilon$

设 $x \in A \Longrightarrow r_x \overset{\text{def}}{=} \operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) > 0.$

$\overset{\Gamma \text{ 是 Vitali}}{\Longrightarrow} \exists I \in \Gamma$, $|I| < r_x$ s.t.

$x \in I.$

$$\Longrightarrow I \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k \right) = \phi$$

$$\Longrightarrow \underbrace{|I| < \delta_N}_{\text{由 } \delta_N \text{ 的定义}} \underbrace{< 2|I_{N+1}|}_{\text{由 } I_{N+1} \text{ 的取法.}}$$

$|I_k| \to 0 \Longrightarrow \exists k$ s.t. $I_k \cap I \neq \phi$

(否则 由 δ_k 的定义, $|I| < \delta_k$, $\forall k$.

而 $\delta_k < 2|I_{k+1}| \to 0$，矛盾）

令 $n_0 \overset{def}{=} \min\{k: I_k \cap I \neq \phi\}$

$\Rightarrow n_0 > N$ 且

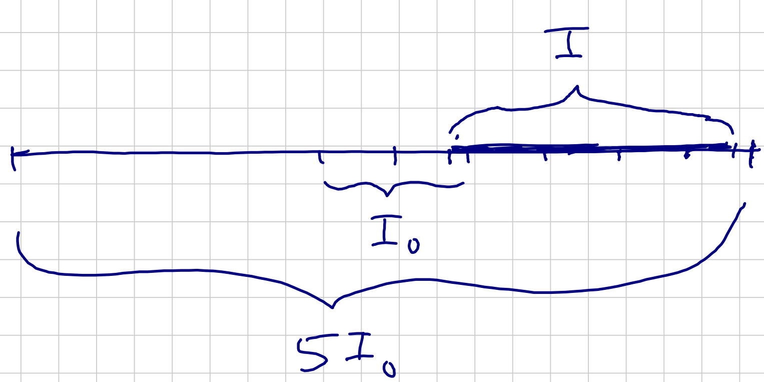
$$\underbrace{|I| < \delta_{n_0-1}}_{\uparrow} \underbrace{< 2|I_{n_0}|}_{\text{由 } I_{n_0} \text{ 之取法}}$$

（注意 $\delta_{n_0-1} = \sup\{|J|: J\in\Gamma,\ J\cap(\bigcup_{j=1}^{n_0-1} I_j)=\phi\}$

和 $I \cap I_{n_0-1} = \phi$ ）

$I_{n_0}\cap I \neq \phi$
$\Longrightarrow \quad I \subset 5I_{n_0}$

这里 $5I_{n_0}$ 指与 I_{n_0} 同心但长度为其 5 倍的闭区间.



特别地

$\Longrightarrow x \in 5I_{n_0}$

x 取子列 $\Longrightarrow$ $A \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} 5I_k \quad (\because \ n_0 > N)$

$$\Longrightarrow m_*(A) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |5I_k| < \varepsilon$$

<u>Def</u> 设 f 在 x 附近有定义，令

$$D^+ f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (右上Dini导数

$$D_+ f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (右下 ...

$$D^- f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \limsup_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (左上 ...)

$$D_- f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (左下 .../

<u>Rmk</u>: $D^+ f(x) \geq D_+ f(x)$

$D^- f(x) \geq D_- f(x)$

Pf of Thm

为证明 f a.e. 可微，只需证：除一个零集外，

$$D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x) \text{ 且有限.}$$

令

$$E_1 \overset{\text{def}}{=} \{x\in(a,b) : D^+f(x) > D_-f(x)\}$$

$$E_2 \overset{\text{def}}{=} \{x\in(a,b) : D^-f(x) > D_+f(x)\}$$

Claim 1 $\quad m(E_1) = m(E_2) = 0$

（由此，$\forall x \in (a,b)\setminus(E_1\cup E_2)$，

$$D^+f(x) \leq D_-f(x) \leq D^-f(x) \leq D_+f(x)$$

$\Longrightarrow$ $f'(x)$ 存在.（可能为 ∞））

只证明 $m(E_1) = 0$

$f \nearrow \Longrightarrow$ 四个 Dini 导数均 ≥ 0

$$E_1 = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} \underbrace{\{x\in(a,b) : D^+f(x) > r > s > D_-f(x)\}}_{\text{记为 } A_{r,s}}$$

claim 2 $\quad m_*(A_{r,s}) = 0, \quad \forall r, s \in \mathbb{Q}.$

$A \overset{\text{def}}{=} A_{r,s}$

假设不然, i.e. $m_*(A) > 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists G$ 开 s.t. $A \subset G$ 且

$$m(G) < (1+\varepsilon)\, m_*(A)$$

设 $x \in A \Rightarrow D_- f(x) < s$

$\Rightarrow \exists h_x^{(n)} \to 0^+$, s.t.

$$\frac{f(x - h_x^{(n)}) - f(x)}{h_x^{(n)}} < s, \quad n = 1, 2 \cdots$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x - h_x^{(n)}) < s\, h_x^{(n)}, \quad n = 1, 2 \cdots$$

不妨设所有 $[x - h_x^{(n)}, x] \subset G$

$$\Rightarrow \Gamma \overset{\text{def}}{=} \left\{ [x - h_x^{(n)}, x] \right\}_{x \in A,\ n \in \mathbb{N}}$$

是 A 的一个 Vitali 覆盖