第二十一讲 (2023.5.19)

如果可测函数族 $\{K_t\}_{t>0}$ s.t.

(A1) $\int K_t \, dm = 1$

(A2) $\exists\, C_1 > 0$ s.t.

$$|K_t(x)| \le \frac{C_1}{t^n}, \quad \forall t \in (0,1)$$

(A3) $\exists\, C_2 > 0$ s.t.

$$|K_t(x)| \le \frac{C_2 t}{|x|^{n+1}}, \quad \forall t > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

则称 $\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I.

Thm: 设 $\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I.

(i) $\forall f \in L^1$. $f * K_t \to f$ a.e. as $t \to 0^+$

(ii) $\forall f \in L^p$, $\|f * K_t - f\|_p \to 0$ as $t \to 0^+$

$(1 \le p < \infty)$

Def $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{\text{def}}{=} \{$紧支光滑函数$\}$

Thm $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$, $(1 \le p < \infty)$

Pf: 令 $\psi(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-|x|^2}}, & \text{if } |x| < 1 \\ 0, & \text{if } |x| \ge 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\text{supp}(\psi) \subset B_1(0)$

$0 \le \psi(x) \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

令 $K(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\psi(x)}{\|\psi\|_1}$

$K_t(x) \overset{\text{def}}{=} t^{-n} K(t^{-1}x)$

<u>Claim</u> $\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I.

$\int K_t \, dm = 1$ 　手 1-2

$|K_t(x)| \le \dfrac{C_1}{t^n}$ with $C_1 = \dfrac{1}{\|\psi\|_1}$

$\text{supp}(K_t) \subset B_t(0)$

当 $|x| \le t$ 时

$|K_t(x)| \le \dfrac{C_1}{t^n} = \dfrac{C_1 t}{t^{n+1}} \le \dfrac{C_1 t}{|x|^{n+1}}$

$\forall f \in L^p$, $\forall \varepsilon > 0$. $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \left(C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense}}{\subset} L^p \right)$$

$$\operatorname{supp}(g * K_t) \subset \operatorname{supp}(g) + \operatorname{supp}(K_t)$$

$$\Rightarrow g * K_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

A.I. $\Rightarrow$ 当 t 充分小时

$$\|g * K_t - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \|f - g * K_t\|_p$$

$$\leq \|f - g\|_p + \|g - g * K_t\|_p < \varepsilon.$$

Q: N-L $\Longleftrightarrow$?

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a) \Rightarrow \begin{cases} F \text{ a.e. 可导} \\ F' \in L^1[a,b] \\ F \text{ 连续} \end{cases}$$

$$|F(x+h)-F(x)| \leq \int_{[x,x+h]} |F'(t)|\,dt \to 0 \text{ as } h\to 0$$

(by 积分的绝对连续性)

<u>BV 函数</u> $\longleftrightarrow$ 可求长曲线

Def 设 $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 连续

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = \gamma(t)$$

如果 $\exists M>0$ s.t. 对任何划分

$$P: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

$$\sum_{k=1}^{N} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

则称 γ 可求长. 并定义

$$L(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \sup_{P} \sum_{k=1}^{N} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

称为 γ 的弧长.

例：γ 是 C^1 曲线 $\Longrightarrow$

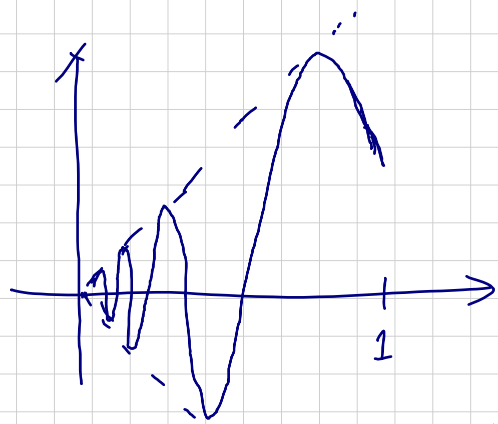
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

反例 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (t, f(t))$$

$$f(t) = \begin{cases} t \sin \dfrac{1}{t}, & t \in (0, 1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ γ 不可求长.



Def 对 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 和 $[a,b]$ 之划分 P

$$V(f, P) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

如果 $\sup\limits_{P} V(f, P) < \infty$，则称 f 是有界变差的

$$V_a^b(f) \overset{def}{=\!=} \sup_{P} V(f, P)$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差.

$$BV[a,b] \overset{def}{=\!=} \{\ [a,b] \text{上有界变差函数} \}$$

例:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界, 单调 $\Longrightarrow f\in BV[a,b]$

且 $V_a^b(f) = |f(b)-f(a)|$

Pf: 不妨设 $f\nearrow$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (f(t_k) - f(t_{k-1}))$$

$$= f(b) - f(a)$$

例: $\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to\mathbb{C} \text{ 可微} \\ f' \text{ 有界} \end{array}\right\} \Longrightarrow f\in BV[a,b]$

Pf: 令 $M \overset{def}{=\!=} \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$

拉格朗日中值 $\Longrightarrow |f(t)-f(s)| \leq M|t-s|,\ \forall t,s\in[a,b]$

$$\Rightarrow \quad V(f,P) \leq M \sum_{k=1}^{N} (t_k - t_{k-1}) = M(b-a)$$

例2:

$$f(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & t \in (0,1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f \notin BV[0,1]$$

Pf $\forall N$, 取 $t_0 = 0$, $t_N = 1$,

$$t_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(N-k+\frac{1}{2})\pi}, \quad k = 1, 2, \cdots, N-1.$$

$$\Rightarrow \quad f(t_k) = \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k+\frac{1}{2})\pi}, \quad k = 1, 2, \cdots, N-1$$

$$\Rightarrow \quad |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \frac{1}{(N-k+\frac{1}{2})\pi} + \frac{1}{(N-k-\frac{1}{2})\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{2(N-k)}{(N-k)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{N-k}$$

$$\Rightarrow \quad V(f,P) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N-k} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}$$

Prop $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ 可求长 $\Longleftrightarrow$ $x, y \in BV[a,b]$.

Cor 设 $f \in C[a,b]$

$f \in BV[a,b] \Longleftrightarrow f$ 之图像可求长.

Prop $BV[a,b]$ 是向量空间

Prop 设 $f \in BV[a,b]$

1° $\forall x \in [a,b]$, $V_a^b(f) = V_a^x(f) + V_x^b(f)$

2° $x \longmapsto V_a^x(f)$ 单调增

Pf (i) Step 1. LHS $\leq$ RHS

注 $V_a^a(f) = 0$

不妨设 $x \in (a,b)$. 设 P 是 $[a,b]$ 的一个划分

Case 1 $\quad x \in \{t_1, \dots, t_{N-1}\}$

j s.t. $x = t_j$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{j} + \sum_{k=j+1}^{N}$$

$$\leq V_a^x(f) + V_x^b(f)$$

Case 2 $\quad x \notin \{t_1, \dots, t_{N-1}\}$.

$\exists j \in \{1, \dots, N-1\}$ s.t. $t_{j-1} < x < t_j$

$$\Rightarrow |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

$$\leq |f(t_j) - f(x)| + |f(x) - f(t_{j-1})|$$

$$\Rightarrow V(f, P) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} + |f(x) - f(t_{j-1})|}_{\leq V_a^x(f)}$$

$$+ \underbrace{|f(t_j) - f(x)| + \sum_{k=j+1}^{N}}_{\leq V_x^b(f)}$$

Step 2 LHS $\geq$ RHS

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_1 : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N_1} = x$ s.t.

$$\sum_{k=1}^{N_1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| > V_a^x(f) - \frac{\varepsilon}{2},$$

$\exists P_2 : x = s_0 < s_1 < \cdots < s_{N_2} = b$, s.t.

$$\sum_{j=1}^{N_2} |f(s_j) - f(s_{j-1})| > V_x^b(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $P \stackrel{\text{def}}{=} P_1 \cup P_2$

$\Rightarrow$ P 是 $[a, b]$ 上一个划分, s.t.

$$V(f, P) > V_a^x(f) + V_x^b(f) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow V_a^b(f) > V_a^x(f) + V_x^b(f) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow V_a^b(f) \geq V_a^x(f) + V_x^b(f)$$

(ii) 设 $x_1 < x_2$

$$V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f) \geq 0.$$

Thm（Jordan分解定理）

任一实值有界变差函数可表为两个有界单调增函数之差

Pf 设 $f \in BV[a,b]$

令 $g(x) \overset{def}{=} V_a^x(f)$

$h(x) \overset{def}{=} V_a^x(f) - f(x)$

$\Rightarrow \quad f = g - h$

只需证 $h \nearrow$

设 $x_1 < x_2$，则

$$h(x_1) - h(x_2) = \underbrace{V_{x_1}^{x_2}(f)}_{\geq |f(x_2) - f(x_1)|} - [f(x_2) - f(x_1)] \geq 0$$