第十五讲 (2023. 4. 28)

Thm. {简单函数} $\overset{\text{dense}}{\subset}$ L^1

{阶梯函数} $\overset{\text{dense}}{\subset}$ L^1

Pf: 1° 设 $f \in L^1$

Step 1 先假设 $f \geq 0$

$\exists\ \varphi_k \geq 0$ simple s.t. $\varphi_k \nearrow f$

$$\overset{\text{MCT}}{\Longrightarrow} \int \varphi_k \, dm \to \int f \, dm$$

$$\Longrightarrow \|f - \varphi_k\|_1 = \int (f - \varphi_k) \, dm \to 0$$

as $k \to \infty$

Step 2 一般情形

$$f = f^+ - f^-$$

由 Step 1, $\exists\ \varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)} \geq 0$ simple, s.t.

$$\|f^+ - \varphi_k^{(1)}\|_1 \to 0$$

$$\|f^- - \varphi_k^{(2)}\|_1 \to 0$$

令 $\varphi_k \overset{\text{def}}{=} \varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}$

$$\Rightarrow \quad \|f-\varphi_k\|_1 \leq \|f^+ - \varphi_k^{(1)}\|_1 + \|f^- - \varphi_k^{(2)}\|_1$$

$$\to 0 \text{ as } k \to \infty$$

2° 只需证明：

$$\{\text{阶梯函数}\} \overset{\text{dense}}{\subset} \{\text{可积简单函数}\}$$

（矩阵三角不等式）

注意 $\varphi \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k} \in L^1 \iff \text{若 } a_k \neq 0 \text{ 则 } m(E_k) < \infty$

简化为：$\forall E,\ m(E) < \infty,\ \forall \varepsilon > 0,$

$\exists\ \psi$ 阶梯函数 s.t.

$$\|\chi_E - \psi\|_1 < \varepsilon$$

由 Pf of Thm 4.3, Chpt 1, $\exists\ R_1, \cdots, R_M$

互不相交 s.t.

$$m\left(E \,\Delta \left(\bigcup_{i=1}^{M} R_i\right)\right) < \varepsilon$$

令 $\psi \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{M} \chi_{R_i}$

$$\Rightarrow \quad \|\chi_E - \psi\|_1 < \varepsilon$$

$C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n$ 上紧支连续函数全体

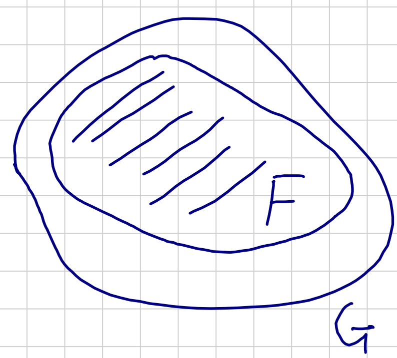
Thm $\quad C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense}}{\subset} L^1$

Lem (Urysohn) 设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 闭, $G \subset \mathbb{R}^n$ 开, $F \subset G$, 则 $\exists f \in C(\mathbb{R}^n)$ s.t.

(i) $0 \le f \le 1$

(ii) $f = 1$ on F

(iii) $f = 0$ on $\mathbb{R}^n \setminus G$



Pf. 不妨设 $F \ne \emptyset$, $G \ne \mathbb{R}^n$

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) + \operatorname{dist}(x, F)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

即为所求 (HW).

Pf of Thm

只需证明: $\forall R$ 矩体, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in C_c(\mathbb{R})$ s.t.

$$\|\chi_R - g\|_1 < \varepsilon.$$

稍微放大 R 为开矩体 $\tilde{R}$, s.t.

$$m(\tilde{R} \setminus R) < \varepsilon$$

$\xRightarrow{\text{Urysohn}}$ $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ s.t.

(i) $0 \le g \le 1$

(ii) $g = 1$ on R

(iii) $g = 0$ on $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{R}$

$\Longrightarrow$ $g = \chi_R$ on $R \cup (\mathbb{R}^n \setminus \tilde{R})$

$\Longrightarrow$ $\|\chi_R - g\|_1 < \int_{\tilde{R} \setminus R} 1 \, dm = m(\tilde{R} \setminus R) < \varepsilon.$

Thm: 设 $1 \le p < \infty$, 则

1° $\{$简单函数$\} \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$

2° $\{$阶梯函数$\} \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$. 3° $C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$

Pf. (HW)

Prop 设 $f \in L^1$

(i) (平移不变性)
$$\int f(x-h)\,dx = \int f(x)\,dx, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

(ii) $\int f(\lambda x)\,dx = \lambda^{-n} \int f(x)\,dx$

(iii) $\int f(-x)\,dx = \int f(x)\,dx$

Pf: 1° 先设 $f = \chi_E$

$f \in L^1 \Longrightarrow m(E) < \infty$

令 $(\tau_h f)(x) \overset{\text{def}}{=\!=} f(x-h), \quad x \in \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow \tau_h \chi_E = \chi_{E+h}$

$\Longrightarrow \int \tau_h \chi_E \,dm = m(E+h) = m(E) = \int \chi_E \,dm$

2° f simple 时成立

3° $f \geq 0$

$\exists\ \varphi_k \geq 0$ simple. s.t. $\varphi_k \nearrow f$

$\Longrightarrow \tau_h \varphi_k \nearrow \tau_h f$

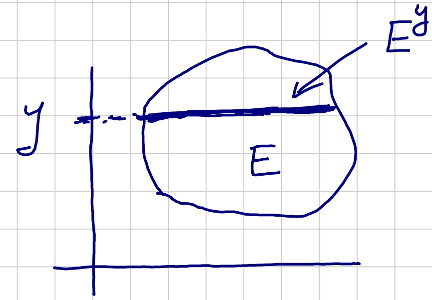
$$\overset{MCT}{\Longrightarrow} \quad \int f \, dm = \lim_{k \to \infty} \int \varphi_k \, dm = \lim_{k \to \infty} \int \tau_h \varphi_k \, dm$$

$$= \int \tau_h f \, dm$$

4° [illegible]

$$f = f^+ - f^-$$

累次积分换序
化重积分为累次积分 $\Big\}\longrightarrow$ Fubini Thm



。Riemann 积分中的对应定理

<u>Def</u> 对 $E\subset\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 和 $y\in\mathbb{R}^{n_2}$

$$E^y \overset{\text{def}}{=} \{x\in\mathbb{R}^{n_1} : (x,y)\in E\}$$

称为 E 关于 y 的切片 (slice)

对 $x\in\mathbb{R}^{n_1}$,

$$E_x \overset{\text{def}}{=} \{y\in\mathbb{R}^{n_2} : (x,y)\in E\}.$$

对 $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 上函数 f 和 $y\in\mathbb{R}^{n_2}$

$$f^y(x) \overset{\text{def}}{=} f(x,y), \qquad x\in\mathbb{R}^{n_1}$$

称为 f 关于 y 的切片

$$f_x(y) \overset{\text{def}}{=} f(x,y), \qquad y\in\mathbb{R}^{n_2}$$

Q: 1° $E\subset\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 可测 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $E^y\subset\mathbb{R}^{n_1}$ 可测?
$E_x\subset\mathbb{R}^{n_2}$ 可测?

2° f 在 $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 上可测 $\overset{?}{\Rightarrow}$ f^y 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可测？
f_x 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ — — ？

反例：1° 设 A 是 $\mathbb{R}^1$ 中不可测集

令 $E \overset{def}{=} A \times \{0\}$

$\Rightarrow m_2(E) = 0$

$\Rightarrow E$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中可测集

但 $E^0 = A$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中不可测集

2° $f \overset{def}{=} \chi_E$ 可测 但 $f^0 = \chi_A$ 不可测

在 a.e. 意义下答案是 Yes.

Thm (Fubini)

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$.

(F1) 对 a.e. $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $f^y \in L^1(\mathbb{R}^{n_1})$

对 a.e. $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $f_x \in L^1(\mathbb{R}^{n_2})$

(F2) $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,\cdot)\,dx \in L^1(\mathbb{R}^{n_2})$

$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(\cdot,y)\,dy \in L^1(\mathbb{R}^{n_1})$

(F3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f \, dm = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)\, dx \right] dy$

$\displaystyle = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x,y)\, dy \right] dx$

<u>Thm</u> (Tonelli)

jis $f \in L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

(T1) پی a.e. $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $f^y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$

پی a.e. $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $f_x \in L^+(\mathbb{R}^{n_2})$

(T2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,\cdot)\, dx \in L^+(\mathbb{R}^{n_2})$

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(\cdot,y)\, dy \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$

(T3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f \, dm = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)\, dx \right] dy$

$\displaystyle = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x,y)\, dy \right] dx$

Tonelli $\Longrightarrow$ Fubini

jis $f \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

$f = f^+ - f^-$

$\Longrightarrow f^+, f^- \in L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

$\overset{\text{Tonelli}}{\Longrightarrow} f^+, f^-$ 满足 (T1) — (T3)

$f^+, f^- \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2}) \Longrightarrow$ (T2), (T3) 中出现的积分均有限或 a.e. 有限。故可相减

$\Longrightarrow$ (F3)

Idea of pf of Tonelli:

~~令~~ $L^+ \overset{\text{def}}{=} L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{ f \in L^+ : f$ 满足 (T1) — (T3) $\}$

Tonelli $\Longleftrightarrow \mathcal{F} = L^+$

1° $\mathcal{F}$ 对加法和非负数乘封闭

2° $\mathcal{F}$ 对单调增序列的极限封闭

i.e. $\mathcal{F} \ni f_k \nearrow f \Longrightarrow f \in \mathcal{F}$