第十三讲 (2023.4.21)

L^p 空间 (F. Riesz, 1910)

Def 设 $0<p<\infty$, $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测, f 在 E 上可测

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\int_E |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L^p(E) \overset{\text{def}}{=} \{f : \|f\|_p < \infty\}$$

如果 $\exists M>0$ s.t. $|f|\le M$ a.e. on E, 则称 f 在 E 上本性有界, M 称为 $|f|$ 的一个本性上界

本性上确界

$$\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} |f(x)|$$

$$\overset{\text{def}}{=} \inf\{M>0 : |f|\le M \text{ a.e. on } E\}$$

$$L^\infty(E) \overset{\text{def}}{=} \{f : \|f\|_\infty < \infty\}$$

$= E$ 上本性有界函数全体

Prop $L^p(E)$ 是向量空间

Pf $p=\infty$ 时平凡

设 $f,g\in L^p(E)$, $0<p<\infty$

$$|f+g|^p \le \left(2\max\{|f|,|g|\}\right)^p \le 2^p\left(|f|^p+|g|^p\right)$$

$$\Rightarrow \int_E |f+g|^p\,dm \le 2^p\left[\int_E |f|^p dm + \int_E |g|^p dm\right]$$

<u>Def</u> X — $\mathbb{R}^n$ 上向量空间

如果 X 上函数 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ 满足：

(i) (正定性) $\|x\| \ge 0$, $\forall x \in X$,

$\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(ii) (齐次性) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$, $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(iii) (三角不等式) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上一个范数.

$(X, \|\cdot\|)$ 称为赋范空间

$\Rightarrow d(x,y) \overset{def}{=} \|x-y\|$ 为 X 上一个度量

称 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ 收敛，若指 $\exists x \in X$ s.t.

$d(x_k, x) \to 0$ as $k \to \infty$

称 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 X 中 Cauchy 列，若指

$$d(x_k, x_j) \to 0 \quad \text{as } k, j \to \infty$$

如果 X 中每个 Cauchy 列都收敛，则称 X 完备。

Banach空间 $\overset{\text{def}}{=}$ 完备赋范空间

Prop 当 $0<p<1$ 时 $\|\cdot\|_p$ 不是 $L^p(E)$ 上范数.

Pf 取 $E_1, E_2 \subset E$ 可测，$E_1 \cap E_2 = \phi$ 且 $0 < m(E_1), m(E_2) < \infty$,

$$\Rightarrow \|\chi_{E_1} + \chi_{E_2}\|_p = \left(m(E_1) + m(E_2)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$q>1$

$(a+b)^q > a^q + b^q$

$\forall a, b > 0$

$$> m(E_1)^{\frac{1}{p}} + m(E_2)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|\chi_{E_1}\|_p + \|\chi_{E_2}\|_p$$

Thm (Minkowski 不等式)

设 $1 \le p \le \infty$. $\forall f, g \in L^p(E)$,

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

i.e.

$$\left(\int_E |f+g|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_E |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$$

（HW：何时等号成立？）

Thm（Hölder不等式）

设 $1 < p < \infty$，$p' \overset{\text{def}}{=} \dfrac{p}{p-1}$ 称为 p 的共轭指标

$\forall f \in L^p(E)$，$\forall g \in L^{p'}(E)$，

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

（HW：何时等号成立？）

Lem $\forall a, b \geq 0$，$\forall \lambda \in (0,1)$，

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Pf $b = 0$ 时平凡

设 $b \neq 0$.

等价于：$\left(\dfrac{a}{b}\right)^\lambda \leq \lambda\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1 - \lambda$

往证为：

$$t^\lambda \leq \lambda t + 1 - \lambda, \quad t \in (0,\infty)$$

Pf of Hölder

以下平凡情形： $\|f\|_p = 0$ 或 $\|g\|_{p'} = 0$

或 $\|f\|_p = \infty$ 或 $\|g\|_{p'} = \infty$.

下设 $0 < \|f\|_p, \|g\|_{p'} < \infty$

Step 1 先设 $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$.

令 $a \overset{def}{=} |f|^p \qquad b \overset{def}{=} |g|^{p'}$

$$\lambda = \frac{1}{p} \Longrightarrow 1-\lambda = \frac{1}{p'}$$

Lem $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |fg| &= a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p'}} \\ &= a^{\lambda} b^{1-\lambda} \\ &\leq \lambda a + (1-\lambda) b \\ &= \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{p'}|g|^{p'} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{p'}^{p'}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Step 2 一般情形

令

$$\tilde{f} \overset{\text{def}}{=} \frac{f}{\|f\|_p}, \quad \tilde{g} \overset{\text{def}}{=} \frac{g}{\|g\|_{p'}}$$

$$\Longrightarrow \quad \|\tilde{f}\|_p = \|\tilde{g}\|_{p'} = 1$$

$$\overset{\text{Step 1}}{\Longrightarrow} \quad \|\tilde{f}\tilde{g}\|_1 \le \|\tilde{f}\|_p \|\tilde{g}\|_{p'} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Pf of Minkowski

$p=1$ 或 $p=\infty$ 时 平凡

设 $1 < p < \infty$.

$$\|f+g\|_p^p = \int_E |f+g|\,|f+g|^{p-1}\,dm$$

$$\le \int_E |f|\,|f+g|^{p-1}\,dm + \int_E |g|\,|f+g|^{p-1}\,dm$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_E |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f+g|^{(p-1)p'} dm\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_E |g|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f+g|^{(p-1)p'} dm\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{注意} \\ (p-1)p' = p\end{array}}$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p^{p-1}$$

$$\Rightarrow \quad \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

Q: $\|\cdot\|_p$ 是不是 $L^p(E)$ 上范数？

当 $1 \le p \le \infty$ 时

三角不等式 ✓

齐次性 ✓

但 $\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow f = 0$

（而是 $f = 0$ a.e.）

在 $L^p(E)$ 中引入等价关系

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f = g \text{ a.e.}$$

把 $L^p(E)/\sim$ 与 $L^p(E)$ 等同

<u>Thm</u> 设 $1 \le p \le \infty$. $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ 是赋范空间.

Thm (Riesz-Fischer)

设 $1 \le p < \infty$, $L^p(E)$ 完备.

Pf 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^p(E)$ 是 Cauchy 列

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, s.t.

$$\|f_k - f_j\|_p < \varepsilon, \quad \forall k, j \ge N.$$

$\Rightarrow$ $(\varepsilon = \frac{1}{2})$, $\exists k_1$ s.t.

$$\|f_k - f_{k_1}\|_p < \frac{1}{2}, \quad \forall k \ge k_1$$

$(\varepsilon = \frac{1}{2^2})$ $\exists k_2 > k_1$ s.t.

$$\|f_k - f_{k_2}\|_p < \frac{1}{2^2}, \quad \forall k \ge k_2$$

$\vdots$

$\exists k_j > k_{j-1}$ s.t.

$$\|f_k - f_{k_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \quad \forall k \ge k_j$$

$\vdots$

$\Rightarrow$ 子列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 满足

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

令 $M \stackrel{\text{def}}{=} \|f_{k_1}\|_p + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p$

$$g_N \stackrel{\text{def}}{=} |f_{k_1}| + \sum_{j=1}^{N} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$$

$$g \stackrel{\text{def}}{=} |f_{k_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$$

Minkowski

$\Longrightarrow \quad \|g_N\|_p \leq \|f_{k_1}\|_p + \sum_{j=1}^{N} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p$

$$\leq M$$

而 $\quad g_N^p \nearrow g^p$

MCT

$\Longrightarrow \quad \int_E g^p \, dm = \lim_{N\to\infty} \int_E g_N^p \, dm \leq M^p$

$\Longrightarrow \quad g \in L^p(E)$

$\Longrightarrow \quad g$ a.e. 有限

注意到 $\quad f_{k_N} = f_{k_1} + \sum_{j=1}^{N-1} (f_{k_{j+1}} - f_{k_j})$

$g_N \to g$ a.e. $\Longrightarrow \quad \exists f$ s.t.

$$f_{k_N} \to f \quad \text{a.e.}$$

$$\left(\because \quad \left|\sum_{j=\ell}^{m}\left(f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\right)\right| \leq \sum_{j=\ell}^{m} \left|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\right| \to 0 \text{ as } \ell, m \to \infty \right)$$

Fatou

$$\Longrightarrow \quad \int_E |f|^p \, dm \leq \liminf_{N\to\infty} \int_E |f_{k_N}|^p \, dm$$

$$\leq M^p$$

$$\Longrightarrow \quad f \in L^p(E).$$

$\forall \ell$,

$$\|f - f_{k_\ell}\|_p^p = \int_E |f - f_{k_\ell}|^p \, dm$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \int_E |f_{k_j} - f_{k_\ell}|^p \, dm$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\ell\to\infty} \|f - f_{k_\ell}\|_p \leq \lim_{\ell\to\infty} \liminf_{j\to\infty} \|f_{k_j} - f_{k_\ell}\|_p$$

$$= 0 \quad (\because \text{ Cauchy })$$

最後,

$$\|f_k - f\|_p \leq \|f_k - f_{k_\ell}\|_p + \|f_{k_\ell} - f\|_p$$

$$\to 0 \text{ as } k, \ell \to \infty$$