第十一讲 (2023.4.14)

Thm (Levi, MCT)

$$0 \le f_k \nearrow f \ \text{a.e.} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dm = \int_E f \, dm$$

Pf 不妨设 $E = \mathbb{R}^n$ (以 $f_k \cdot \chi_E$ 代替 f_k)

不妨设 $f_k \nearrow f$ pointwise

$\Rightarrow \int f_k \, dm \nearrow$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm$ 存在 (可能为 $+\infty$)

Case 1 $\lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm = +\infty$

平凡

Case 2 $\lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm < +\infty$

$f_k \le f \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm \le \int f \, dm$

Claim $\lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm \ge \int f \, dm$

$\forall \varphi$ simple, $0 \le \varphi \le f$

$\forall \alpha$ with $0 < \alpha < 1$

令 $E_k \overset{\text{def}}{=} \{ f_k \ge \alpha \varphi \}$, $k = 1, 2, \cdots$

$$\Rightarrow E_k \nearrow \mathbb{R}^n$$

令 $\varphi \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{F_j}$ （标准化表示）

测度连续性

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{N} a_j \, m(E_k \cap F_j) \to \sum_{j=1}^{N} a_j \, m(F_j)}$$

i.e. $\int_{E_k} \varphi \, dm \longrightarrow \int \varphi \, dm$

as $k \to \infty$

而

$$\int f_k \, dm \ge \int_{E_k} f_k \, dm$$

$$\ge \int_{E_k} \alpha \varphi \, dm$$

$$= \alpha \int_{E_k} \varphi \, dm$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \int f_k \, dm \ge \alpha \lim_{k \to \infty} \int_{E_k} \varphi \, dm$$

$$= \alpha \int \varphi \, dm$$

$$\xRightarrow{\alpha \to 1^-} \lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm \geq \int \varphi \, dm$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm \geq \int f \, dm .$$

<u>Thm</u> (Fatou 引理)

设 $f_k \geq 0$, $k=1,2,\cdots$ 可测 on E

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \, dm \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \, dm$$

<u>Pf</u>. $\forall k$,

$$\inf_{j\geq k} f_j \leq f_i , \quad \forall i \geq k$$

$$\Rightarrow \forall i\geq k, \quad \int_E \inf_{j\geq k} f_j \, dm \leq \int_E f_i \, dm$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_E \inf_{j\geq k} f_j \, dm}_{\text{关于 } k \text{ 单调增}} \leq \inf_{i\geq k} \int_E f_i \, dm \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \, dm = \int_E \lim_{k\to\infty} \inf_{j\ge k} f_j \, dm$$

$$\overset{MCT}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E \inf_{j\ge k} f_j \, dm$$

$$\overset{\text{by } (*)}{\le} \lim_{k\to\infty} \inf_{i\ge k} \int_E f_i \, dm$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \, dm$$

<u>HW</u>: 举例：f_k, $k=1,2\cdots$ 非负可测，s.t.

(i) $\lim_{k\to\infty} f_k$ 存在

(ii) $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dm$ 存在

(iii) $\int_E \lim_{k\to\infty} f_k \, dm < \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dm$

<u>Rmk</u>: Fatou $\Rightarrow$ MCT

$$f_k \nearrow f \Rightarrow \int f_k \, dm \le \int f \, dm, \ \forall k$$

$$\Rightarrow \limsup_{k\to\infty} \int f_k \, dm \le \int f \, dm$$

而 Fatou $\Rightarrow \int f\,dm \le \liminf\limits_{k\to\infty} \int f_k\,dm$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k\,dm = \int f\,dm$$

Prop (正线性)

设 $f, g \ge 0$ 可测，$\alpha, \beta \ge 0$.

$$\int (\alpha f + \beta g)\,dm = \alpha \int f\,dm + \beta \int g\,dm$$

Pf

$\int \alpha f\,dm = \alpha \int f\,dm$ 平凡

只需证 $\longrightarrow \int (f+g)\,dm = \int f\,dm + \int g\,dm$

$\exists\, \varphi_k \ge 0$ simple s.t. $\varphi_k \nearrow f$

$\exists\, \psi_k \ge 0$ simple, s.t. $\psi_k \nearrow g$

$$\overset{\text{MCT}}{\Longrightarrow} \int (f+g)\,dm = \lim_{k\to\infty} \int (\varphi_k + \psi_k)\,dm$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int \varphi_k\,dm + \int \psi_k\,dm \right)$$

$$= \int f\,dm + \int g\,dm$$

Prop (逐项积分)

$f_k \geq 0$, $k=1,2,\cdots$ 可测,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \quad \Rightarrow \quad \int f \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, dm$$

(a.e. 有限)

Pf $\forall N$,

$$\int \left(\sum_{k=1}^{N} f_k \right) dm = \sum_{k=1}^{N} \int f_k \, dm$$

而 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} f_k \nearrow f$

$$\overset{\text{MCT}}{\Longrightarrow} \int f \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, dm$$

Def 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, f 在 E 上可测

如果 $\int_E f^+ dm$ 和 $\int_E f^- dm$ 中至少

有一个有限, 则定义

$$\int_E f \, dm \overset{\text{def}}{=} \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm,$$

称为 f 在 E 上之积分

如果 $\int_E f^+ dm$ 和 $\int_E f^- dm$ 均有限，则称 f 在 E 上可积.

$L^1(E) \overset{def}{=}$ E 上可积函数全体.

$L^1 \overset{def}{=} L^1(\mathbb{R}^n)$

Prop $f \in L^1(E) \iff |f| \in L^1(E)$

Pf: "$\Longrightarrow$" 平凡

"$\Longleftarrow$"

$$\max\{f^+, f^-\} \leq |f|$$

$$\Longrightarrow \max\left\{\int_E f^+ dm, \int_E f^- dm\right\} \leq \int_E |f| dm$$

Prop $f \in L^1(E) \Longrightarrow f$ 在 E 上 a.e. 有限

Prop $L^1(E)$ 是向量空间, i.e.

$\forall f, g \in L^1(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in L^1(E)$

Pf 只考虑 $E=\mathbb{R}^n$ 的情形（可用 $f\chi_E$ 代替 f）

$f, g \in L^1 \Rightarrow f, g$ a.e. 有限

$\Rightarrow |\alpha f+\beta g| \leq |\alpha||f|+|\beta||g|$ a.e.

$$\Rightarrow \int |\alpha f+\beta g|\,dm \leq \int (|\alpha||f|+|\beta||g|)\,dm \overset{\text{正线性}}{=} |\alpha|\int |f|\,dm+|\beta|\int |g|\,dm < +\infty$$

Prop（线性）

$\forall f, g \in L^1(E)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_E (\alpha f+\beta g)\,dm = \alpha\int_E f\,dm+\beta\int_E g\,dm$$

Pf 只证明

$$\int (f+g)\,dm = \int f\,dm+\int g\,dm$$

令 $h \overset{\text{def}}{=} f+g$

$\Rightarrow h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$

$$\Longrightarrow \quad h^+ + f^- + g^- \overset{\text{a.e.}}{=} h^- + f^+ + g^+ \qquad \left(\begin{array}{c} f.\ g.\ h \text{ 均} \\ \text{a.e. 有限} \end{array}\right)$$

正线性

$$\Longrightarrow \int h^+ dm + \int f^- dm + \int g^- dm = \int h^- dm + \int f^+ dm + \int g^+ dm$$

$$\Longrightarrow \int h^+ dm - \int h^- dm = \int f^+ dm - \int f^- dm + \int g^+ dm - \int g^- dm$$

Prop (可数可加性)

设 $f \in L^1$, E_k, $k=1,2\cdots$ 可测且互不相交.

则

$$\int_{\biguplus_{k=1}^{\infty} E_k} f \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \, dm$$

Pf 令

$$E \overset{\text{def}}{=} \biguplus_{k=1}^{\infty} E_k$$

$\forall N$,

$$\chi_{\biguplus_{k=1}^{N} E_k} = \sum_{k=1}^{N} \chi_{E_k}$$

$$\Rightarrow \int_{\bigcup_{k=1}^{N} E_k} f^+ \, dm = \int f^+ \cdot \chi_{\bigcup_{k=1}^{N} E_k} \, dm$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int f^+ \chi_{E_k} \, dm$$

因为 $f^+ \chi_{\bigcup_{k=1}^{N} E_k} \nearrow f^+ \chi_E$

$$\Rightarrow \int_E f^+ \, dm = \int f^+ \chi_E \, dm$$

$$\overset{MCT}{=} \lim_{N \to \infty} \int f^+ \chi_{\bigcup_{k=1}^{N} E_k} \, dm$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \int_{E_k} f^+ \, dm$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^+ \, dm$$

同理,

$$\int_E f^- \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^- \, dm$$

$$\Rightarrow \int_E f \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \, dm$$

Prop (单调性)

设 $f, g \in L^1$

$$f \le g \implies \int f\,dm \le \int g\,dm$$

Pf $\quad 0 \le g - f \implies 0 \le \int (g-f)\,dm$

Prop (三角不等式)

设 $f \in L^1$, 则

$$\left| \int f\,dm \right| \le \int |f|\,dm$$

Pf

$$f \le |f| \implies \int f\,dm \le \int |f|\,dm$$

$$-f \le |f| \implies -\int f\,dm \le \int |f|\,dm$$

Thm 设 $f \in L^1$, 则

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \subset \mathbb{R}^n$ with $m(B) < \infty$, s.t.

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} |f|\,dm < \varepsilon$$

Pf $\hat{i}$ $f_k \overset{\text{def}}{=\!=} |f| \cdot \chi_{B_k(0)}$, $k = 1, 2, \cdots$

$\Longrightarrow f_k \nearrow |f|$

$\overset{\text{MCT}}{\Longrightarrow} \lim_{k \to \infty} \int f_k \, dm = \int |f| \, dm$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N,$ s.t. $\forall k \geq N$

$$0 \leq \underbrace{\int |f| \, dm - \int f_k \, dm}_{= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k(0)} |f| \, dm} < \varepsilon$$

HW: Ex. 9, 10