第九讲

2023.4.7

Littlewood 三原则

1° 可测集 $\approx$ 区间的有限并. (nearly)

2° 可测函数 $\approx$ 连续函数 (Lusin)

3° a.e. 收敛 $\approx$ 一致收敛 (Egorov)

Def f a.e. 有限 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $m(\{|f| = +\infty\}) = 0$

Thm (Egorov) 设 $m(E) < \infty$

f, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 可测, a.e. 有限

$f_k \to f$ a.e. $\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon \subset E$ s.t.

$m(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ 且

$f_k \rightrightarrows f$ on A_ε

(nearly uniform convergence)

分析: $f_k \rightrightarrows f$ on $A \implies A = ?$

$$\underbrace{f_k \rightrightarrows f \text{ on } A}$$

$\Updownarrow$ def

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ s.t.

$$\sup_{x \in A} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall k \geq N$$

$\iff \forall l$, $\exists k_l$ s.t.

$$\sup_{x \in A} |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{l}, \quad \forall k > k_l$$

$\implies \exists k_l \nearrow \infty$, s.t.

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=k_l}^{\infty} \left\{ |f_k - f| < \frac{1}{l} \right\}$$

<u>Lem 1</u>

$f_k \rightrightarrows f$ on $A \iff \exists k_l \nearrow \infty$ s.t.

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=k_l}^{\infty} \left\{ |f_k - f| < \frac{1}{l} \right\}.$$

由此，问题约化为：$\forall \varepsilon>0$，是否 $\exists\, k_\ell \uparrow \infty$，

s.t.
$$A_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{k=k_\ell}^{\infty} \left\{ |f_k - f| < \frac{1}{\ell} \right\}$$

满足 $\underbrace{m(E \setminus A_\varepsilon)}_{\|} < \varepsilon$?

$$m\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{k=k_\ell}^{\infty} \left\{ |f_k - f| \geq \frac{1}{\ell} \right\} \right)$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=k_\ell}^{\infty} \left\{ |f_k - f| \geq \frac{1}{\ell} \right\} \right)$$

$\Longrightarrow$ 进一步约化为：$\forall \ell$，$\exists\, k_\ell$ s.t.

$$m\left(\bigcup_{k=k_\ell}^{\infty} \left\{ |f_k - f| \geq \frac{1}{\ell} \right\} \right) < \frac{\varepsilon}{2^\ell}$$

而不妨设 $f_k \to f$ pointwise （为什么？）

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\{ f_k \not\to f \}}_{= \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{ |f_k - f| \geq \frac{1}{\ell} \right\}} = \phi$$

$$\Rightarrow \forall \ell,\ \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \tfrac{1}{\ell}\} = \phi.$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=j}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \tfrac{1}{\ell}\} \searrow \phi$$

测度之连续性 $\Rightarrow$ $\exists\, k_\ell$ s.t.

$$m\left(\bigcup_{k=k_\ell}^{\infty} \{|f_k - f| \geqslant \tfrac{1}{\ell}\}\right) < \frac{\varepsilon}{2^\ell}$$

从而 Egorov Thm 得证.

Rmk　Egorov Thm 中条件 "$m(E) < \infty$" 不可去

反例：$E \overset{\text{def}}{=} (0, \infty)$

$f_k \overset{\text{def}}{=} \chi_{(0,k)}$

$f \overset{\text{def}}{=} \chi_{(0,\infty)}$

则 $f_k \to f$ pointwise

但 $\{|f_k - f| > \tfrac{1}{2}\} = [k, \infty)$.

Thm (Lusin)

设 E 可测，f 在 E 上可测且 a.e. 有限.
则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists F_\varepsilon \subset E$ 闭 s.t. $m(E\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$
且 $f|_{F_\varepsilon}$ 连续.

Rmk. 这里

$f|_F$ 连续 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\in F$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，s.t.
$|f(y)-f(x)|<\varepsilon$，$\forall y\in B(x,\delta)\cap F$

例：$f=\chi_{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不连续，但 $f|_{\mathbb{Q}}$ 和
$f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ 却连续.

Pf Step 1 先假设 f simple.

令 $f \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$ (标准表示)
$\left(\Rightarrow \biguplus_{k=1}^{N} E_k = E \right)$

对每个 k，
$\exists F_k \subset E_k$ 闭 s.t.
$$m(E_k\setminus F_k)<\frac{\varepsilon}{N}.$$

令
$$F \overset{def}{=} \bigcup_{k=1}^{N} F_k$$
$\Rightarrow$ $F \subset E$ 闭，$m(E \setminus F) < \varepsilon$

$\forall x \in F$，$\exists !\ k_x \in \{1, 2, \cdots, N\}$，s.t.

$x \in F_{k_x}$ （$\because F_1, \cdots, F_N$ 互不相交）

令
$$\delta \overset{def}{=} \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x, F \setminus F_{k_x})$$
$\Rightarrow$ $f \equiv C_{k_x}$ on $B(x, \delta) \cap F$

$\Rightarrow$ $f|_F$ 在 x 连续.

Step 2 假设 f 可测，a.e. 有限
假设 $m(E) < \infty$

不妨设 f 是实值函数.

$\Rightarrow$ $\exists\ \varphi_k$ simple，$k = 1, 2, \cdots$ s.t. $\varphi_k \to f$

$\xRightarrow{\text{Egorov}}$ $\exists A_\varepsilon \subset E$，$m(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$，s.t.

$\varphi_k \rightrightarrows f$ on A_ε.

Step 1

$\Longrightarrow$ 对每个 φ_k，$\exists\ F_k \subset A_\varepsilon$ 闭 s.t.

$m(A_\varepsilon \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ 且 $\varphi_k|_{F_k}$ 连续，

令 $F \overset{def}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$

$\Longrightarrow$ $F \subset A_\varepsilon$ 闭 且

$m(A_\varepsilon \setminus F) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(A_\varepsilon \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Longrightarrow$ $m(E \setminus F) < \varepsilon$

而 $\left.\begin{array}{l} \varphi_k|_F \text{ 连续，} k=1,2,\cdots \\ \varphi_k|_F \rightrightarrows f|_F \end{array}\right\} \Rightarrow f|_F$ 连续

Step 3 一般情形

令 $E_1 \overset{def}{=} E \cap \overline{B_1(0)}$,

$E_k \overset{def}{=} E \cap \left(\overline{B_k(0)} \setminus \overline{B_{k-1}(0)}\right)$, $k \geq 2$

$\Longrightarrow$ $E = \biguplus_{k=1}^{\infty} E_k$

对每个 k，由 Step 2，$\exists F_k \subset E_k$ 闭 s.t.

$m(E_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ 且 $f|_{F_k}$ 连续

令

$$F \overset{def}{=} \biguplus_{k=1}^{\infty} F_k \quad 闭$$

$\Longrightarrow$ $f|_F$ 连续

且 $m(E \setminus F) < \varepsilon$

Thm 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，f 在 E 上可测

则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续 s.t.

$$m(\{f \neq g\}) < \varepsilon$$

Tietze 延拓定理

(X, τ) — 正规拓扑空间

$E \subset X$ 闭 $\Longrightarrow$ E 上任一连续函数

可延拓为 X 上连续函数