第二讲

$\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

$B_r(x) \overset{\text{def}}{=} \{ y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r \}$

<u>Def</u> 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in E$

如果 $\exists r > 0$ s.t. $B_r(x) \subset E$, 则称 x 是 E 之内点.

如果 E 中每点均为内点, 则称 E 是开集.

<u>HW</u>: 设 $\tau \overset{\text{def}}{=}$ $\mathbb{R}^n$ 中开集全体

证明: (i) $\phi, \mathbb{R}^n \in \tau$

(ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

(iii) $A_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$

<u>Def</u> 设 X 是非空集合,

$2^X \overset{\text{def}}{=}$ X 之子集全体

如果 $\tau \subset 2^X$ 满足

(i) $X, \phi \in \tau$

(ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

(iii) $A_\alpha \in \tau,\ \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau$

则称 τ 是 X 上一个拓扑，τ 中元素称为 X 中开集，(X, τ) 称为拓扑空间

Def 设 $E \subset \mathbb{R}^n$

称 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 E 的极限点（聚点）是指

$$B_r(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \phi,\ \forall r > 0$$

$\left(\iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E \setminus \{x\},\ \text{s.t. } x_n \to x \right)$

$E' \overset{def}{=}$ E 的极限点全体，称为 E 的导集

$\overline{E} \overset{def}{=} E \cup E'$ 称为 E 的闭包

$\partial E \overset{def}{=} \overline{E} \setminus \mathring{E}$ --- 边界.

如果 $\exists r > 0$ s.t.

$$B_r(x) \cap E = \{x\},$$

则称 x 是 E 的孤立点

如果 $E' = E$，则称 E 是完全集

（即完全集 ＝ 不含孤立点的闭集）

Def F_σ 集 $\overset{def}{=}$ 可数个闭集之并集

G_δ 集 $\overset{def}{=}$ 可数个开集之交集

Note: E 是 F_σ 集 $\Longleftrightarrow$ E^c 是 G_δ 集

例: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 是 F_σ 集

Def 如果 $\mathscr{A} \subset 2^X$ 满足

(i) $\phi \in \mathscr{A}$

(ii) $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{A}$

(iii) $A_n \in \mathscr{A},\ n=1,2,\cdots \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$

则称 $\mathscr{A}$ 是 X 上一个 σ-代数.

Rmk: (ii) + (iii) $\Longrightarrow$ "$A_n \in \mathscr{A},\ n=1,2,\cdots \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$"

Def 设 $\mathcal{F} \subset 2^X$

包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 σ-代数 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ 称为 $\mathcal{F}$ 生成的 σ-代数

是指: $\forall$ σ-代数 $\mathscr{A} \supset \mathcal{F}$

$\Longrightarrow \mathscr{A} \supset \mathcal{M}(\mathcal{F})$

Def $\mathcal{B} \overset{def}{=\!=}$ $\mathbb{R}^n$ 中开集全体生成之 σ-代数.

称为 Borel σ-代数.

$\mathcal{B}$ 中元素称为 Borel 集

例: 开集. 闭集, F_σ 集, G_δ 集

$F_{\sigma\delta}$ 集 ($\overset{def}{=\!=}$ 可数个 F_σ 集之交集)

$G_{\delta\sigma}$ 集 ($\overset{def}{=\!=}$ 可数个 G_δ 集之并集)

$F_{\sigma\delta\sigma}$ 集, $G_{\delta\sigma\delta}$ 集, ...

Thm ($\mathbb{R}$ 中开集之结构)

$\mathbb{R}$ 中非空开集可唯一地表为至多可数个互不相交之开区间之并集.

Pf 设 $G \overset{open}{\subset} \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x \in G, \exists r > 0$ s.t. $(x-r, x+r) \subset G$

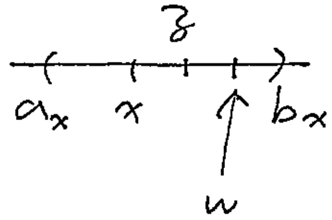
令

$$a_x \overset{def}{=\!=} \inf\{y \in \mathbb{R} : y < x, (y, x) \subset G\}$$

$$b_x \overset{def}{=\!=} \sup\{z \in \mathbb{R} : z > x, (x, z) \subset G\}$$

(Note: a_x 可能为 $-\infty$, b_x 可能为 $+\infty$)

$I_x \overset{\text{def}}{=} (a_x, b_x)$



1° $I_x \subset G$

$\forall z \in I_x$，不妨设 $z > x$

$\xRightarrow{b_x\text{之定义}}$ $\exists w$ s.t.

$z < w < b_x$ 且 $(x, w) \subset G$

$\xRightarrow{\text{特别地}}$ $z \in G$

$$\Rightarrow \quad G = \bigcup_{x \in G} I_x$$

2° $\forall I_y, I_z \in \{I_x\}_{x \in G}$

要么 $I_y \cap I_z = \phi$

要么 $I_y = I_z$

假设 $I_y \cap I_z \neq \phi$

$$\Rightarrow y \in \underbrace{I_y \cup I_z}_{\text{仍是开区间}} \subset G$$

$\xRightarrow{I_y\text{定义中的“最大性”}}$ $I_y \cup I_z \subset I_y$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow I_z \subset I_y \\ \text{同理，} I_y \subset I_z \end{array}\right\} \Rightarrow I_y = I_z$$

3° $\{I_x\}_{x\in G}$ 至多可数.

不同的 I_x 不相交 $\Longrightarrow$ 包含不同的有理数

$\Longrightarrow$ 对应 $\mathbb{Q} \to \{I_x\}_{x\in G}$ 中每个 q 至多

$$q \mapsto I_x \ni q$$

对应一个 I_x，从而 I_x 的"个数"不会多于 q 的"个数"

Rmk: 如果 $a_x, b_x \in \mathbb{R}$，则 $a_x, b_x \notin G$

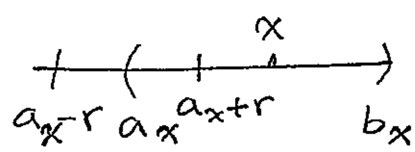
假设 $a_x \in G$

$\Longrightarrow \exists\, r>0$ s.t. $(a_x-r, a_x+r) \subset G$

$\Longrightarrow (a_x-r, x) \subset (a_x-r, a_x+r) \cup (a_x, b_x)$

$\subset G$

与 a_x 的定义矛盾



Def 设 $G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

如果开区间 $(a,b) \subset G$ 且 $a, b \notin G$

则称 (a,b) 是 G 的一个构成区间

2025.5.10

Cor 全 $G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$ 表为互不相交的开区间之并, ⑦

则这些开区间一定是构成区间.

Def $\mathbb{R}^n$ 中形如

$$R \overset{\text{def}}{=\!=} [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

$$= \{(x_1, \cdots, x_n) : a_i \le x_i \le b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n\}$$

的集合称为矩体

如果 R 的各边长均相等, 则称之为方体.

形如 $\frac{p}{2^k}$, $p, k \in \mathbb{Z}$ 的数称为二进有理数

顶点为二进有理数点的方体称为二进方体

(dyadic cube)

Thm ($\mathbb{R}^n$ 中开集的结构)

$\mathbb{R}^n$ 中非空开集可表为 ~~可数~~ 可数个内部互不相交的闭方体之并.

Pf 对 $k \in \mathbb{Z}$,

$$\Gamma_k \overset{\text{def}}{=\!=} \{\text{边长为 } 2^{-k} \text{ 的二进方体}\}$$

$$\mathcal{F}_0 \overset{\text{def}}{=\!=} \{Q \in \Gamma_0 : Q \subset G\}$$

$$\mathcal{F}_1 \overset{\text{def}}{=\!=} \{Q \in \Gamma_1 : Q \subset G \setminus (\bigcup_{R \in \Gamma_0} R)\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{F}_k \overset{\text{def}}{=\!=} \{Q \in \Gamma_k : Q \subset G \setminus (\bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{R \subset \Gamma_i} R)\}$$

$$\vdots$$

<u>Claim</u> $$G = \underbrace{\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_k}}_{\text{至多可数个，内部互不相交}} Q$$

1° RHS $\subset$ LHS

平凡

2° LHS $\subset$ RHS

$\forall x \in G$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exists Q^{(k)} \in \Gamma_k$ s.t.

$x \in Q^{(k)}$ $\quad (\because \mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in \Gamma_k} Q)$

(Note: 这个 $Q^{(k)}$ 不一定属于 $\mathcal{F}_k$, $\because$ 它不一定 $\subset G$)

$\xRightarrow{x\text{是}G\text{的内点}}$ $\exists r > 0$, s.t. $B_r(x) \subset G$

$\Rightarrow$ 当 k 充分大时，

$$Q^{(k)} \subset B_r(x) \subset G$$

由 $\mathcal{F}_k$ 之定义

$\Rightarrow$ $Q^{(k)}$ 一定包含于 $\mathcal{F}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_k$ 中

某个二进方体.

$$\Rightarrow \quad x \in Q^{(k)} \subset \bigcup_{j=0}^{k} \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_j} Q \subset RHS$$

$\mathbb{R}^n$ 中二进方体

$$\Gamma_k \overset{def}{=} \left\{ 2^{-k}\left([0,1]^n + m\right),\ m \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Gamma_k$$

1° 每个 Γ_k 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个划分

2° $\forall Q, R \in \mathcal{D}$, $Q \cap R \in \{\phi, Q, R\}$