1.(i) ~~由~~ $\{x \mid f(x) > t\} = \begin{cases} x > f^{-1}(t) \\ x \geq t_0 \end{cases}$ $\quad t \in 2n\}$ $\quad t_0 = \sup\{x \mid f(x) \leq t\}$ 开 ✓

(2) 定义 $d(x, F) = \inf\{ d(x,y) \mid y \in F\}$

$d(\frac{1}{n}, F) = \{x \mid d(x,F) < \frac{1}{n}\}$

$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} d(\frac{1}{n}, F)$ ✓

2. (ii) => (i) 显然.

(i) => (ii) 由开区间结构定理

3. $|(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} \chi_{[0,n)}| \leq e^{-x}$

故 $LHS = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$

4. ~~$|f_n e^{-f_n}| \leq f_n$, 类似期中考试P6~~ $\frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e}$ => $|f_n e^{-f_n}|, |f e^{-f}| \leq \frac{1}{e}$. ~~因 $f_n e^{-f_n} \to$~~

因 $f_n e^{-f_n} \to f e^{-f}$

故 $\int_{[0,1]} f_n e^{-f_n} \to \int f e^{-f}$

5. $\forall n > 0$, $\exists H_n$ 使 $m(H_n) \in (m(E), m(E) + \frac{1}{n})$, 因 H_n 开

$\Pi \ldots \bigcap \ldots$ 即?

4. ~~$|f_n e^{-f_n}| \le f_n$，类似期中考试P6~~ $\frac{x}{e^x} \le \frac{1}{e} \Rightarrow |f_n e^{-f_n}|, |f e^{-f}| \le \frac{1}{e}$，且 ~~$f_n e^{-f_n} \to$~~

且 $f_n e^{-f_n} \to f e^{-f}$

故 $\int_{[0,1]} f_n e^{-f_n} \to \int f e^{-f}$

5. $\forall n>0$，$\exists H_n$ 使 $m(H_n) \in (m(E), m(E)+\frac{1}{n})$，且 H_n 开

取 $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ 即可

6. 反证 $\forall i_0$，$m(E_{i_0}) < \frac{k}{n}$

则 $\sum_{i=1}^{n} m(E_i) < k$

$\int_0^1 (\chi_{E_1} + \cdots \chi_{E_n}) < k$

但对每个 x，$\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} \ge k \Rightarrow LHS \ge k$ 矛盾

7. 设 $B(0,r) \in V$，则 $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{(nr, (n+1)r)}_{\text{记为}E_n} = R$，且 $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^{-1}(E_n) = R$

故知一定存在一个 n，使 $m(f^{-1}(E_n)) > 0$，取 $E = f^{-1}(E_n)$ 即可

扫描全能王 创建