# 中国科学技术大学

# 2021-2022 学年实变函数期末考试试卷

所在院系 ____________ 姓名 ____________ 学号 ________________

**注意：请将所有答案写在题后空白处。所有题目的解答要有详细过程，其中使用的定理或命题需要注明。**

1. 概念题（20 分，每小题 5 分）

(a). 叙述 Lusin 定理（提示：关于可测函数和连续性的那个定理）；

(b). 叙述控制收敛定理；

(c). 设 $f$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上定义的有限值可测函数，叙述 $f$ 的极大函数的定义；

(d). 叙述 $[a,b]$ 上定义的绝对连续函数的定义。

(a)：设 $f: \cancel{[a,b]}\ E \to \mathbb{R}$ 可测，则若 $m(E)<\infty$，则 $\forall \delta>0$，$\exists F \subset E$ 闭，$m(E\setminus F)<\delta$，$f|_F : F \to \mathbb{R}$ 连续

(b) 设有 E上 可测函数列 $\{f_n\}$，$f$，若 $f_n \to f$ a.e. 且 $\exists g \in L^1(E)$，$|f_n| \le g$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int f$

(c) $f^*(x) = \sup\limits_{\substack{B \ni x \\ B\text{为球}}} \frac{1}{|B|}\int_B |f|$（非中心的），或 $f^*(x) = \sup\limits_{r>0} \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} |f|$（中心的）

(d) 若 $\forall$ ~~ε~~ $\varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使 $[a,b]$ 分割 $a=x_0<\cdots<x_n=b$，$\sup\limits_{1\le i\le n}|x_i-x_{i-1}|<\delta$，有 $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|<\varepsilon$



2. （20 分，每小题 5 分）通过分别构造具体的定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数列来说明以下的命题：

(a). $L^1$ 收敛不保证几乎处处收敛；

(b). $L^3$ 收敛不保证 $L^2$ 收敛；

(c). 依测度收敛不保证 $L^1$ 收敛；

(d). 依测度收敛不保证几乎处处收敛。

(a) $\sin nx\, \chi_{[0,1]}(x)$

(b) $\cancel{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{0.4}} \chi_{[k,k+1)}$

(c) $n^2 \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$

(d) 同(a)

3. (10 分) 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 有连续的导数。问 $f$ 是不是有界变差函数？为什么？

是，$T_f[0,1] = \int_0^1 |f'(x)|\,dx < \infty$



4. (15 分) 设 $B$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球，$f_n: B\to\mathbb{R}$ 是一列可测函数，而且满足 (a) $f_n$ 几乎处处收敛于函数 $f$；(b) $\|f_n\|_{L^2(B)}\le 1$ 对于任何的 $n$；求证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_B f_n = \int_B f.$$

由 Egorov. $\forall \varepsilon>0$, $\exists E\subset B$, $m(B\setminus E)<\varepsilon$, 在 $E$ 上 $f_n$ 一致收敛于 $f$.

由 Fatou 引理，$\cancel{\int_E \lim_{n\to\infty} f_n \; f| \le}$ $\quad \int_{B\setminus E}|f| \le \cancel{m(E)}\sqrt{m(B\setminus E)}\left(\int_{B\setminus E}|f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\le \sqrt{m(B\setminus E)}\,\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\int_B |f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \sqrt{m(B\setminus E)} < \sqrt{\varepsilon}$$

$\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n>N$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in E$. 则 $n>N$ 时

$$\int_B |f_n-f| = \int_E |f_n-f| + \int_{B\setminus E}|f_n-f|$$

$$\le \varepsilon\, m(B) + \sqrt{m(B\setminus E)}\left(\|f_n\|_{L^2(B\setminus E)} + \|f\|_{L^2(B\setminus E)}\right)$$

$$\le m(B)\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}$$

使 $f_n \xrightarrow{L^1} f$，更有 $\lim_{n\to\infty}\int_B f_n = \int_B f$

5. (15 分) 设 $f_n$ 是定义在 $[a,b]$ 上的单调增的绝对连续函数。如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 $[a,b]$ 上点点收敛于 $f$，求证：$f$ 也是绝对连续的。

$f_n' \geq 0$，若有 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ a.e.，则 $\int_a^b f' = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{MCT}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n'$

$$\overset{AC}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(b) - f_n(a)) \overset{\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{收敛}}{=} f(b) - f(a)$$

使 $f$ AC.

故只用证 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ a.e. 作 $\cancel{R}S_N(x) = \cancel{\sum_{n=1}^{\infty}} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$，则 $S_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n'(x)$，

$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$，依题 $R_N$ 良定，且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S_N(x) + R_N(x)$，故 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = S_N' + R_N'(x)$，a.e.

（注意 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 单调，故 a.e. 可导. 作差

$R_{N+1}'(x) - R_N'(x) = S_N'(x) - S_{N+1}'(x) = -f_{N+1}'(x) < 0$，a.e.，使 $\lim_{N\to\infty} R_N'(x) = R(x)$ 存在 a.e.，

由于 $R_N$ 单增，故 $R_N' \geq 0$，由Fatou引理，$\int_a^b R(x)\,dx \leq \underline{\lim}_{N\to\infty} \int_a^b R_N'(x) \leq \underline{\lim}_{N\to\infty} (R_N(b) - R_N(a))$

$$\cancel{= \underline{\lim}_{N\to\infty} \int_a^b R_N \sum_{n=}} \overset{条件}{=} 0$$

故 $R(x) = 0$ a.e.

6. (15 分) 设 $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$，而且 $\int_{\mathbb{R}^d} \phi = 1$，对于任何 $t > 0$，定义 $\phi_t(x) = t^{-d}\phi(\frac{x}{t})$.

(a). 若 $f$ 是有紧支集的连续函数，求证：当 $t \to 0$ 时，$f * \phi_t$ 一致收敛于 $f$；(10 分)

(b). 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，求证：$\lim_{t\to 0} \|f * \phi_t - f\|_{L^1} = 0$ (5 分)。

(a) $|f * \phi_t(x) - f(x)| \leq \int |\phi(y)||f(x-ty) - f(x)|\,dy$

$$\leq \int_{|y|<R} |\phi(y)|\,dy \sup_{|y|<R} |f(\cdot - ty) - f| + \int_{|y|\geq R} |\phi(y)|\,dy \, 2\sup|f|$$

由 $\phi \in L^1$，知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists R > 0$，$\int_{|y|>R} |\phi(y)|\,dy < \varepsilon$，由一致连续性，

$\lim_{t\to 0} \sup_{|y|<R} \sup|f(\cdot - ty) - f| \to 0$ 对 $x$ 一致，故

$\overline{\lim_{t\to 0}} |f * \phi_t(x) - f(x)| \leq \varepsilon$，$\forall x$，$\varepsilon$ 一致成立，使 $f * \phi_t \rightrightarrows f$

(b) $\|f * \phi_t - f\|_{L^1} = \int \left| \int (f(y)\phi_t(x-y) - f(x)\phi_t(y))\,dy \right| dx$

$$\leq \int \left| \int |f(x-y) - f(x)||\phi_t(y)|\,dy\right| dx$$

$$\leq \int_{|y|<\varepsilon} \int |f(x-y) - f(x)||\phi_t(y)|\,dx\,dy + \int_{|y|>\varepsilon} \int |f(x) - f(y)||\phi_t(y)|\,dx\,dy$$

$$\int_{|y|<\varepsilon} \int |f(x-y) - f(x)|\,dx\,|\phi_t(y)|\,dy \leq \sup_{|y|<\varepsilon} \|f(\cdot - y) - f\|_{L^1} \int |\phi(y)|\,dy$$

积分平移连续性

~~而 ε 充分大处~~，固定一个 $\varepsilon$，使 $\int_{|y|<\varepsilon} \int |f(x-y) - f(x)||\phi_t(y)|\,dy < \delta$，对此 $\varepsilon$，

$\int_{|y|>\varepsilon} \int |f(x) - f(x-y)||\phi_t(y)|\,dy \leq 2\|f\|_{L^1} \int_{|y|>t\varepsilon} |\phi(y)|\,dy \to 0$，$t \to 0$，

使 $\overline{\lim_{t\to 0}} \|f * \phi_t - f\|_{L^1} < \delta$，$\forall \delta > 0$，即 $f * \phi_t \xrightarrow{L^1} f$

7. （5 分）设 $E$ 是 $\mathbb{R}$ 上指定的零测度集合，证明存在一个单调的函数 $f$，使得 $f$ 在集合 $E$ 上不可导。

取开集列 $G_k \supset E$，$m(G_k) < \frac{1}{2^k}$，作 $f(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{G_k}$；易见 $f'(x) = \infty, \forall x \in E$